

■ [美]C.格里博格 J.A.约克编
■ 杨立 刘国斌等译 ■ 刘式达 杜先之等校

混沌

对科学和社会的冲击

湖南科学技术出版社





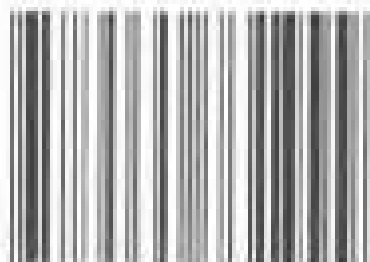
在过去 10 年里,人们对混沌动力学的兴趣陡增。随着越来越多的科学学科受到有关混沌特性日益增长的知识的影响,一批卓越的专家在本书中集中评述了混沌对科学的引导作用以及对社会认识的影响。

本书所提供的文献均出自数学家、物理学家、生物学家和医学科学家、地球科学家、工程师、经济学家及社会科学家——包括对混沌进行研究的先驱者和世界学术带头人——之手。本书关于混沌现象的经验的思想是从于生动激烈的、国际跨学科的交流而产生的。它总结了专家们所交流的混沌对自然科学和社会科学在过去和将来可能的冲击影响。本书对混沌理论的总体冲击影响进行了评价,并希望进一步加强有关科学家之间的联系,使他们能够发现在各自领域中运用混沌动力学的重要性。

读者将从本书中获得混沌理论发展历史的珍贵文献,以及在該领域中奠基者们具有历史意义的交流记录。

■ 混沌理论三卷 一

ISBN 7-5357-3199-6



9 787535 731999 >

N·93 定价:25.00 元

**The Impact of Chaos
on Science and Society**

混沌

对科学和社会的冲击

[美]C.格里博格 J.A.约克编

杨立 刘巨斌等译

刘式达 杜先之等校

湖南科学技术出版社

THE IMPACT OF CHAOS ON SCIENCE AND SOCIETY,
by Celso Grebogi and James A. Yorke

Copyright ©1997 by The United Nations University

Simplified Chinese Edition copyright:

2001 Hunan Science & Technology Press

All Rights Reserved. Authorized translation from the English
language edition published by The United Nations University.

**湖南科学技术出版社获得本书中文简体版中国大陆
地区独家出版发行权。**

著作权登记号：18-2001-054

版权所有 侵权必究

混沌对科学和社会的冲击

编 者：[美] C. 格里博格 J. A. 约克

译 者：杨 立 刘巨斌等

校 者：刘式达 杜先之等

责任编辑：戴 涛

出版发行：湖南科学技术出版社

社 址：长沙市湘雅路 280 号

<http://www.hnstp.com>

邮购联系：本社直销科 0731—4375808

印 刷：湖南省新华印刷二厂

(印装质量问题请直接与本厂联系)

厂 址：邵阳市双坡岭

邮 编：422001

经 销：湖南省新华书店

出版日期：2001 年 5 月第 1 版第 1 次

开 本：850mm×1168mm 1/32

印 张：13.625

插 页：4

字 数：352000

书 号：ISBN 7-5357-3199-6/N·93

定 价：25.00 元

(版权所有·翻印必究)

1991年4月15~17日，由联合国大学发起组织的“混沌对科学和社会的冲击”学术会议在东京大学召开。全世界有24名科学家参加，包括Feigenbaum, Yorke, Frisch, Ruelle等知名学者，我国的郝柏林院士和我参加了会议。由于出版组织者的变动，会议文集直到1997年才在联合国大学出版社出版。现在经杜先之教授的多方努力，湖南科学技术出版社的积极支持，会议文集的中文译本终于面世了。

很多青年同志经常问：混沌（Chaos）和分形（Fractal）是新名词，它们对科学会产生什么影响？那么该书的文章和York写的前言，多少能给读者一些启发。假如从牛顿（1643~1727）1680年在伦敦皇家学会发表《自然哲学的数学原理》算起，物理学已经历了300年。在这300年中，物理学已经完成了两次革命。第一次是以伽利略、牛顿为代表的17世纪物质、力和运动的研究；第二次是本世纪量子力学、相对论和放射性的发现。我认为混沌和分形的发现使物理学进入了复杂物理学的阶段，该阶段的研究以与人类生活、生产更加息息相关的生命科学、地球与环境科学等为主要标志。长期统治物理学的是确定论，确定论的代表论点是法国科学家拉普拉斯的名言：只要知道初条件，我就可以决定未来的一切。对确定论的首次冲击是分子运动论，它说明对大量分子的运动，不可能用经典力学给出每个分子运动的完整描述，而必须用随机的统计方法。给确定论以较大冲击的是量子力学的出现，海森伯格的测不准关系说明无法同时精确测量位置和速度这两个量，这就说明未来有些量是不能精确预测的。而混沌的发现给确定论以最大的冲击，它

告诉我们确定的系统可以出现随机的结果，因而在确定论和随机论之间搭起了桥梁，复杂物理学中出现的像天气、地震等现象看起来是随机的，无规律的，但它们却遵循确定性的方程。这就给复杂现象的研究以巨大的动力。

下面我们给出过去和现在对一些问题的认识上的差别就足以说明混沌和分形的意义：

过去我们只知道，确定的系统只有确定的结果，现在我们更知道，确定的系统也可以有不确定的结果，这是非线性动力系统的内在随机性；

过去我们只知道，离散的动力系统（映射）的迭代可以收敛到不动点，现在我们更知道，它还会收敛到混沌吸引子，若用过去的观点看，这似乎应该叫不收敛；

过去我们总认为“海岸线有多长？”的提法，“湍流中有多少涡旋？”的提法，“现在气候变暖了”的提法都是正确的，但是现在更知道这些提法都是不合适的，因为海岸线的长度、涡旋的个数、气候的冷暖都是随尺度变化而变化的；

自然现象和社会现象本来就是多种多样的，过去我们只知道定常状态、周期状态、拟周期状态，现在我们更知道又多了一种“混沌”状态；

过去一般认为一个系统周期性的输入，一定就是该周期的输出，现在我们更知道输出的周期可以有多种，包括混沌输出；

过去我们一般知道平移不变性（对称性）、旋转对称性等等，现在我们又知道随尺度变化而不变的“标度不变性”，或“标度对称性”；

过去我们习惯于从实际空间的投影——单变量的时间序列去作预测，现在我们更知道反过来从单变量时间序列重新构造原来的相空间去作预测更有效；

过去总以为复杂现象一定要用复杂的模型来描述，现在演化规则非常简单的细胞自动机（cellular automata）就可以模拟出像雪花那样美丽复杂的图像

.....

总之，混沌的提出使我们对过去认识不到的问题有了新的认识，混沌由于其对问题的认识的概念有所突破，有所深化，它成为 21 世纪的学科前

沿已成定局。但是它对科学和社会的冲击究竟有多大？参加这次会议的各位专家都各有评说。可以肯定的是，随着科学和技术的发展，这种冲击必将扩大，适当时间必有客观的评价。

刘式达

2000年8月28日于北京大学

前言

关于自然界中混沌行为的知识不断增长，而确认这种行为的科学学科也日益增加，因此促使联合国大学和东京大学共同发起组织一批博学的专家来评估混沌对科学引导以及对社会认识所产生的冲击。

混沌对科学和社会的冲击所引起的专题讨论会，是联合国大学国际科学、技术前沿系列研讨会的第一届，它于1991年4月15～17日在东京大学召开。会议聚集了来自9个国家的数学家、物理学家、生物学和医学科学家、地球学家、工程师、经济师以及社会科学家等，其中许多是混沌研究中从事各学科间混沌现象研究经验交流的先驱者和世界学术带头人。

本书由研讨会的论文组成。我们相信它的出版将会帮助不同领域的人们来评估过去20多年来混沌理论发展的普遍影响。它还将进一步加强科学家之间的相互作用，他们可能发现混沌动力学在他们各自的领域中扮演着重要的角色。下面我们对每一篇文献作些简要的评述。

Ding, (丁明州), Grebogi 和 Yorke 的文章是一篇混沌动力学的综述。他们的与研究历史有关的介绍提供了论坛，在这里能够提出和评估一些重要问题。

Campbell 和 Mayer-Kress 的文章提出了采用非线性动力学来模拟社会政治问题的论点。特别是他们研究了两国或多国之间国际军备竞赛的模型。作者强调的一个重点是即使社会现象的数学模型决不会替代政治直觉和才

智，但是数学分析在进行决策过程中，可以揭示出应当考虑的关于系统的某些不可避免的结果。

关于人脑是否遵循某些确定性动力学的问题，过去已经争论多年了。事实表明某些病态情况如慢性癫痫病确实具有一定的确定性动力学行为。对于正常人脑其动力学特性的可靠的识别仍然是难以捉摸的，但是占优势的论点支持这种看法，即根据脑电图(EEG)上记录的脑电活动，就性质上来说可能是混沌的。Mandel 和 Selz 的文章以不同的见解再度提出问题。他们认为迄今所积累的神经病学的资料表明，人脑呈现出的是一种准周期动力学。他们的文章简明扼要地总结了相关的生理事实并集中深入地查阅了所引证的支持该结论的理论论点。

混沌理论界的研究者典型地采用了各种方法来解决非线性系统中所遇到的问题。这些方法一般可分为数值仿真，定性的物理考虑 (physical hand-waving)，以及严格的数学理论证明。正如 Ruelle 在他的文章中指出，通过这些方法的交叉研究，在过去 10 年中展现了特别富有成果的脑力工作。他的文章简明扼要，理应使那些想要找出关于混沌与数学之间复杂而微妙关系的人们感到兴趣。

这是非常确凿的事实，枪乌贼巨轴突以及其他相对简单的生物系统在适当的环境条件下呈现出混沌动力学状态。这个领域中先驱者之一，Aihara，在他的文献中以丰富的参考资料在生物学和人工网络中提供了关于混沌及其发生的简明摘要。并且，该文用实验的和数值的两方面例证作出了充分的说明。

如果谁要列出自然科学传统分领域的表，来阐明哪一门学科从混沌发展理论受益最多的话，那物理学无疑会居首位。当评估混沌对物理学的冲击或者反过来评估物理学对混沌的影响时，研讨会引发了该领域中两位专家 Feigenbaum 和 郝柏林的评论。Feigenbaum 的文章指出物理学日常研究由于混沌的出现而受到修正的几种方式。尤其是一些研究者的思想现在对探索流体湍流的产生和化学反应的问题更加条理系统。此外，数据分析技术的武

库也已经大大地随着非线性动力学的新方法而丰富起来，从而揭示出前所不能的潜在规律的信息。另一方面，已有的物理技术也强烈地影响着混沌动力学的研究，正如 Feigenbaum 自己在倍周期分叉的工作上就引用了从物理学相变原理中来的重整化群方法。

郝柏林的文章从混沌作为一个科学名词的历史起源开始综述，接着讨论了在科学中两套描述体系即确定性与随机性。他也触及了量子混沌和符号动力学这样的内容。为了深入地论述过去 20 年来混沌的影响和发展，他提到他的小组所编目的大量文献，包括 200 多种书和 7000 多篇论文。在认识混沌以前，研究者对一些看上去像随机运动的现象置之不理，如明确定义的系统——非线性电路以及简单的机械系统——强迫动摆，而一旦相信了混沌存在之后，物理学家们即开始在整个宇宙中注意到混沌。

量子混沌这个术语使用不当。该名词实际上想要指的是经典混沌的量子力学印迹，也就是说量子力学系统其经典对应呈现出混沌动力学。Ikeda 的文章评述了这个激动人心的领域中的一个方向，即量子混沌有可能作为不可逆性和耗散的根源。他的文章对有兴趣详细研读该课题的人们来说是有价值的。

混沌这个词如果单独使用，是典型的关于系统的不稳定的瞬时行为。这一点显然是不够的，当人们面对着要了解发展充分的湍流而其特点具有空间和时间的复杂性时，Kaneko 沿着这个方向已经迈开了一步，而他的同事们研究了包含大量耦合的混沌子系统，即所谓耦合映像点阵 (CML)。Kaneko 对本书的贡献是他总结了该领域中的最近进展，特别是对有可能将 CML 应用于生物系统的模型建立和信息处理等，作了详细说明。

正如郝柏林在文章中指出，生态学家 Robert May 已经在某种程度上使物理学家从他们的 300 年确定性老梦中惊醒过来。因为 May 早期对一个简单的叫做 Logistic 映射的生态模型的研究，已经对复杂生态模型的理解取得了很大的进展。问题是这个理论认识如何联系真实世界？这就是 Kendall, Schaffer, Tidd 和 Olsen 的文章中所提出的论点。他们提供的第一个有趣的结果表明，与质

朴的直觉相反，在生态系统中混沌的出现可以加强物种的生命力，使其在面对区域的和局部的扰动时得以生存。文章中所描述的另一结果是关于麻疹传染病的动力学原因；他们提出患病人口的变化，在经历一个多年周期后，可以认为是一种激变诱发的间歇现象。在这篇引起兴趣的文章中还有其他一些推测的意见。

本文集的另外一篇文献，由该领域的学术带头人，从生物学和医学科学展望的角度写成。经过了过去十余年，Glass 及其同事们已协调一致地在运用动力学方法来了解复杂的生理学现象方面开辟了一片新土地。在这篇文章中他主要集中精力研究动态病的理论和实践，这种动态病是以不规则时序表征身体病态情况的。我们感到最惊人的是他在心脏学学科上有关理论和实验密切关联的生动描述。正如他认为，“这样一种理论和实验的交织，在生物学科学上是少有的，而且也清楚地表明非线性动力学与医学问题的关联。”

有两篇文章是关于地球科学的，它们覆盖了气象学和地震学。Speranza 回顾了气象学中混沌的长久历史，它是最先识别混沌现象的领域之一。他断定尽管有这样早的开始，但混沌对气象学的冲击仍停留在整个学科的一个有限的理论区域。他的分析指出了一些途径，其中一些新的解决中尺度系统的数学方法（译注：相对于过大或过小尺度系统讲），当用于大气动力学时可望混沌理论对气象学科产生较大的影响。Keilis - Borok 评估了混沌对地震研究和预测的冲击，他断言即使在现阶段混沌理论的应用性还远不清楚，但非线性动力学和混沌的概念可能已具有重要的意义。

混沌对工程冲击的评估文章出自 Bishop。文中他强调在如同防止一条船倾覆这样的工程应用中，扮演临界角色的不是混沌吸引子而是混沌鞍点，它引起混沌的过渡，从而构成整体工程完整性的一个最重要的一环。他从自己对非线性分析的经验得出结论，认为混沌动力学的新观念及其关联的总的几何概念，无疑对工程问题的分析将会有深远的影响。

经济原理的传统知识把经济时序的起伏归因于随机的外扰动。只是在最近,人们对经济数据中非线性的存在和经济系统的可能的确定性机制才予以严重关注。经济学家以及其他人士已经提出许多方法来建立一个不论是由决定性源或随机性源所产生的给定时间系列。Boldrin 在他的文献中简要地总结了这些发展的目前情况。他指出许多经济学家受到混沌理论在物理科学中成功的激励,已经作出贡献建立起动态时间序列分析技术的基础。但是这种技术对实际数据的应用还不能产生满意的结果。不管怎样,非线性动力学和混沌的发现已经提供一个新的角度来评价老的资料以及一个新的前景来发展经济学理论。

Mayntz 的文章讨论了自然科学理论和社会科学理论之间的关系。她深表怀疑的是在理论交换中的一种倾向即从自然科学中借来一些概念把它重新措辞用以表示众所周知的社会现象。她认为这个过程没有导致新的认识。

最后,Ueda 的文章论及了奇怪吸引子和混沌的起源。这是一篇他勇敢奋斗的个人报道,他为了实现他确信的非同一般的想法,抵制住传统和误解的强大阻力。这对任何一个对混沌发展史感兴趣的读者来说都是一篇精彩惊人的文章。

以 Feigenbaum 为主席的专家们针对混沌对科学和社会的冲击,展开了交叉学科间的讨论。讨论的要点记录在本论文集的最后一章中。

最后,本书的文献体现了许多学科的广阔领域,而本书自身又强调了过去 20 年来我们已经亲眼目睹的混沌动力学研究的迅猛发展,并且揭示了混沌对自然和社会正在开始产生影响的前景。

Celso Grebogi 和 James A. Yorke, College Park

Mingzhou Ding (丁明州), Boca Raton

Water Shearer, New York

C. 格里博格博士 美国马里兰大学的数学教授，该校杰出的研究员，美国自然科学学会会员。曾获得 Senior Humboldt 奖、Toshiba Chair 奖和 Fulbright 学会奖。

J.A. 约克博士 美国马里兰大学著名的数学教授，自然科学技术学院的负责人。曾在 1980 年获得 Guggenheim 学会奖，是广为人知的“混沌”一词的创造者。

目录

前言	(1)
1. 混沌动力学	(1)
2. 混沌与政治：非线性动力学在社会 - 政治问题 上的应用	(18)
3. 脑电图是一种奇怪的吸引子吗？脑干神经元放 电方式与脑电图的节律	(60)
4. 混沌对数学的冲击	(93)
5. 神经网络中的混沌	(106)
6. 混沌对物理学的冲击	(124)
7. 混沌和物理学	(130)
8. 不可逆性与量子混沌	(142)
9. 高维混沌的冲击：动力系统复杂性的进一步发 展	(171)
10. 混沌对生物学的冲击——前景美好的研究领 域	(186)
11. 动态疾病——非线性动力学和混沌对心病学 与内科学的冲击	(218)
12. 混沌对气象学的冲击	(231)
13. 地震预报问题中的混沌概念	(241)
14. 混沌对工程领域的冲击	(254)
15. 混沌对经济理论的冲击	(274)
16. 社会中的混沌现象：混沌理论对社会学冲击 的思考	(296)
17. 奇怪吸引子和混沌的起源	(322)

18. 混沌对地球物理学的冲击	(353)
小组讨论：混沌对科学和社会的冲击	(371)
开幕词	(398)
原著作者名单	(400)
索引	(402)
后记	(417)
译者名单	(419)

丁明州, Celso Grebogi 和 James A. Yorke

摘 要

本文讨论混沌动力学的基本概念及近年来的发展, 其目的是为今后可能提出与讨论的重要问题提供论坛。另外, 在本文关于历史的评述中将明显地看到: 近 20 年来, 混沌动力学在数学领域以外的深远意义已被普遍认识。其实在此以前, 从上个世纪末以来, 就已有持续发展。这个发展是以 Poincaré, Birkhoff 及 Kolmogorov 的名字为永恒标志。他们的播种工作, 为今天我们所目睹混沌动力学的应用研究的迅猛发展奠定了基础。

一、引言

早在上世纪中叶, Maxwell^[1]已经认识到物理系统可能对初始值敏感。但直到 Poincaré 的工作以前并不存在对混沌动力学的系统研究。1881 ~ 1886 年期间, Poincaré 在一系列论文中^[2]分析和命名了动力学系统所显示的定性特征, 从此就成为该领域的学者的基本知识的一部分。Poincaré 的贡献的影响可以进一步从如下事实看出: 尽管从他那个时代以来, 已经取得了巨大进步, 但在一个世纪前引起他们的兴趣的很多问题, 至今仍然是研究的前

沿。

一个典型的动力系统能够表现出各种类型的瞬时特性，为了理解一种类型的特性与其他特性的区别，可以首先考虑一个平面上的简单的连续系统。根据 Poincaré-Bendixson 定理，我们知道如果一个自治的常微分方程的一个解是有界的，不趋近于一个平衡点，那么它的轨迹必然以螺旋形式趋近一个周期轨道（极限环）。然而这样的二维自治系统不可能出现混沌。高维自治的常微分方程和平面上的自治的离散系统能够出现包括混沌在内的更加丰富得多的动力特性。一个高维系统的例子是天体力学中的三体问题，对它的研究与太阳系是否稳定这类重要问题有直接的关系。Poincaré 指出三体问题通常是不可积的，在一些非常特殊的点附近，他称为同宿点，相空间轨迹必然是非常复杂的。这一观察结果可认为正是动力系统中具有混沌特征的第一征兆。探索在这样一个同宿点附近有什么情况发生已开展了多年。早在本世纪初，Birkhoff^[3]已迈出了重要的一步。他的结果提供了在同宿点附近一个更详细的动力学描述。Cartwright 和 Littlewood^[4]在他们研究 Van der pol 方程中偶然碰到了同样的同宿点现象。Levinson^[5]简化了 Cartwright 和 Littlewood 的一些工作，并提供了简化的 Van der pol 方程的复杂特征的一个更精细的描述。Smale^[6]将他们与他的马蹄映射相连，解释了他们的结果。马蹄映射（一个长方形与它被折叠成马蹄形的自身的映像相交所产生的一种映射）存在一个混沌的不变集合，他指出这样的马蹄必然能在同宿点附近发现，而且嵌入在这样的马蹄内有无穷多的周期点（有不同的周期）和无穷多存留在马蹄内的不规则振荡轨迹，这些轨迹不会稳定到周期态。接着就证明了许多非线性系统中都存在马蹄，如 Duffing 方程、Van der pol 方程，以及在一些典型的映射中，如 Hénon 映射。在大约同一时期，Peixoto^[7]作出了一项重大贡献，他在微分方程研究中，引入了拓扑空间的概念，使两个定性等价的系统有了精确的含义。与这些工作同时进行的还有俄罗斯数学学派的工作，最著名的有 Kolmogorov 和他的学生们^[8~10]。我们将在以下

的几节中进一步评述他们的贡献。

马蹄的存在本质上并不意味着能观察到混沌特性。马蹄自身的不变集合是不稳定的。有趣的是虽然混沌吸引子看起来总是包含有同宿点，但同宿点的存在并不能保证吸引子是混沌的。因为在这些区域也存在周期吸引子。证明在能够模拟物理系统的非线性映射中，存在混沌吸引子仍然是一个引人注目，但又是很困难的未解问题。在一个典型映射中已经取得了进展，例如一维二次映射，在一系列具有正测度的参数值范围内具有混沌吸引子^[11]。最近 Carleson 和 Benedicks^[12]证明对有充分小的 Jacobian 的 Hénon 映射也有类似的结果。

在一个系统中存在混沌轨道会有明显的分叉并能间接地观察到，即使轨道不是吸引的。当一个系统有多个吸引子时，在有关吸引域的边界能够呈现非常复杂的图案。对于平面上的可逆的映射，他们的边界是分形的。这使得初值在边界附近时，预测最终状态异常困难。一般来说，这样的边界包含有马蹄，因而包含有无穷多不稳定的周期轨道。在一个动力系统中仍然有其他的非吸引混沌集合，这表明它们是瞬变混沌。实际上这样的瞬变混沌和它的特征对正确认识系统是重要的。因此，一般地说，对实验和数值系统研究吸引的和非吸引的混沌集合的特征是一个重要的问题。

二、混沌的测定

A. 熵

当轨道的初始值不能精确地知道时，沿着轨道前进，解的指数形式发散意味着信息的丢失。熵是用来测定在单位时间内丢失了多少个存储单元的信息。根据概念的不同也根据轨道信息丢失平均值的算法的不同，熵的定义不同。

在信息论中，信息熵的定义是 Shannon^[13]在 1948 年引入的。在动力系统中熵的使用是由 Kolmogorov^[14]与 Sinai 的部分合作中

引入的。实际上 Shannon 的熵的定义与 Kolmogorov 熵（也称为度量熵）的定义本质上是相同的。由 Ornstein^[15]提出的一个著名定理，伯努利变换说明，具有相同的熵的某些基本动力系统是等价的，即存在变量从一个转变到另一个（不连续）的改变。

一个映射 f 的拓扑熵是一个数 $h(f)$ ，它可认为是 f 在所有边界轨迹上求平均值的动力学复杂性的测度。与 Kolmogorov 的概念不同，拓扑熵定义的是一个区域的测度而不是一个概率测度。但他们是紧密相关的，拓扑熵是 1965 年首次由 Adler, Konheim 和 McAndrew^[16]提出的。一个更有用的、数学上的等价定义是后来由 Bowen^[17]给出的。最近由于将拓扑熵与其他几何量相连，使计算拓扑熵的可能性增加了。事实上，已经表明对光滑映射，拓扑熵是光滑圆盘的最大容积增长率^[18]。对一个表面区域收缩的微分同胚，熵能通过计算边界长度的增长率来确定（在这种情况下边界由有限数量的一维曲线组成）。这些结果开创了用简单的数值算法估计拓扑熵的可能性。这些算法在应用中也是值得注意的。

B. 维数、测度和李雅谱诺夫指数

Lebesgue 的测度理论给出了在实线上的集合的线性测度定义、在平面上集合的平面测度定义和三维空间中集合的三维测度定义等。由于线性、平面等思想，测度不能直接与包含这些集合的空间维数相连。同样的，由于长度的定义不仅存在于实线上的集合中，而且也存在于任意维空间中的线段上。线性测度的定义能够扩展到任何维数空间中点的集合中。这一问题由 Carathéodory^[19]提出并解决。他给出了在 n 维空间中，一个集合的 d 维测度，其中 d 和 $n \geq d$ 都是任意的正整数。Carathéodory 关于维数的定义，后来被 Hausdorff^[20]推广用来描述非整数维的集合。这就是现在著名的一个集合的 Hausdorff 维数。这样的有非整数维的集合被称为分形集（由 Mandelbrot 创造的名词）。Besicovitch 对这样的分形集合的研究作出了显著的贡献^[21]。对动力

系统，在相空间中分形集合可认为是奇怪吸引子，它是一个复杂的有限集合，它的典型轨道是渐近的。“奇怪吸引子”一词是由 Ruelle 和 Takens^[22]创造的。他们将湍流的产生与这样的奇怪吸引子相连。

另外一种维数的概念是容量维。容量维的定义首先由 Kolmogorov^[14]提出，它是 Hausdorff 维的简化。容量维的优点是他更易于从数据中测量。因此在实际中就更有用。对一个奇怪吸引子，在一给定精度范围内，容量维的值指示出需要多少信息来确定集合内的点分布 (Location)。例如，如果想知道在一定精度 ϵ 内，构成吸引子的点集，那么为了确定吸引子的分布人们必须确定用长度为 ϵ 的立方体覆盖吸引子的最少数目的布局。对典型的吸引子人们认为 Hausdorff 维和容量维有相同的值，但直到现在这一推测的正确性并没有得到严格的证明。

确定一个吸引子的维数是描述吸引子的动力学特性所需的基本参数。为了充分认识一个吸引子的特征，人们还必须考虑吸引子上点的“密度”或“分布”。计算容量维时，虽然通过一个典型的轨迹访问某些立方体的频率比访问其他立方体的频率低些，但覆盖吸引子所需的所有立方体都是同样重要的。这一不同可通过在吸引子上引入概率测度和根据包含在立方体内的测度计算权重加以考虑。通常假设存在这样一种测度，称为自然测度，它确定某一典型的轨迹访问吸引子不同区域的频率。在任意均匀的双曲吸引子上，自然测度的存在由 Bowen 和 Ruelle^[23]的结果作保证，这一结果与 Sinai^[24]的结果相关。到目前为止，对所有种类的吸引子，自然测度的存在仍是一个未解决的问题。

混沌系统中另一个重要的概念是 Lyapunov 指数，它首次由 Oseledec^[25]提出。这些指数描述了一个映射在平均意义上导数的渐近特性，规定了两条相邻轨道的局部特性，对 N 维相空间中的每个点 x ，我们考虑映射在 x 点的第 n 次迭代的偏导数 Jacobian 矩阵 $J(n)$ 的本征值，其中 n 为正整数。随着 n 趋于无穷， f 在 x 的 Lyapunov 数是本征值 $J(n)$ 的模开 n 次方。在 x

的这些 Lyapunov 数的自然对数被称为映射在 x 的 Lyapunov 指数。

函数的时间平均是一个动力系统中渐近特性的一种标准测度，他们与混沌系统具有特殊的关系。各态历经理论^[26]说明，假如这一函数由不变的自然测度衡量，可用计算的时间平均作为相空间平均。自然测度与其他实验可测量有密切的关系，如吸引子的分维数、Lyapunov 指数和熵。

一种确定概率分布特征的维数谱由 Rényi^[27] 提出。它们中最简单的一个是信息维。它表示随着位数或字节精度的增加，确定吸引子上一个点的信息增加的快慢。信息维比容量维或 Hausdorff 维更容易为实验科学家理解。另一个有关的维数是 Lyapunov 维，它由系统的 Lyapunov 指数确定。一个未证明的猜想是对一个典型的动力系统，信息维和 Lyapunov 维是相同的^[28]。Ledrappier 和 Young^[29] 证明由 N 维随机微分同胚 ($N \geq 2$) 组合产生的样本测度的信息维由 Kaplan 和 Yorke 猜想的 Lyapunov 维给出。除 $N = 2$ 外，对非随机情况这一证明并不成立。

最容易从实验数据得到的，也是最广泛使用的维数是由 Grassberger 和 Procaccia^[30] 提出的相关维数，但在解释这样一种计算结果时必须当心。在以前根据这种算法给出的一些结论中已经产生了矛盾。因此在应用 Grassberger-Procaccia 算法计算实际数据时，需要进一步分析，以充分了解该算法的局限，以便校正这些局限。

对维数来说，一个有趣的事实是在混沌吸引子上点的概率分布是一种非常简单的非均匀分布。特别是存在一种任意精细的尺度所交织的结构区域，其中一些典型轨迹上的点是稠密的，而这些区域本身是稀疏的。这样的吸引子被称为多重分形，可用 Rényi 维数谱表示它的特征。大概地说这样的维数谱包含有吸引子的稠密和稀疏区域的维数，多重分形的研究是一个活跃的研究领域：新技术和与实验相关的多重分形特征的计算和分析程序可望在未来进一步发展起来。

三、通向混沌的道路

在科学和工程中，对理论和实验学家来说，研究耗散系统中混沌的产生是混沌研究的中心问题之一。这一研究提出了如下的问题：随着系统的某些参数连续的变化，一个系统是如何从非混沌进入混沌的。系统从规则运动变到混沌运动的一些道路已经为人所知。例如，对任一个在三维环面上的常向量场，我们可选一个小的扰动，就能产生混沌吸引子^[22]。更准确地说，经过 3 次连续的 Hopf 分叉，系统就可任意地接近一个混沌吸引子。

由数值模拟和物理实验已经证实存在 4 种重要的通向混沌的道路。它们是倍周期分叉道路、阵发道路、危机道路和拟周期道路。在一维离散系统中能够出现所有的通向混沌的道路。它们中最著名的是由 Hyrberg^[31]在平方映射中首次观察到的周期倍分叉进入混沌的道路。

以倍周期分叉进入混沌具有普适性。在分叉图中的几何自相似性已使得研究者，最早是 Feigenbaum^[32]采用重整化群技术研究分叉现象，最终解释了分叉中的普适的规律性。重整化群技术最早是为研究基本粒子理论，后来为研究物质中的相变而发展起来的。

另一种从单一周期演化到混沌的道路具有阵发特征^[33]。在这一道路中，在某一些数值时，稳定的规则特性变为规则运动中时不时间隙猝发出混沌特性。由于在转变点吸引集的相空间范围突然改变，阵发进入混沌道路可认为是间隙的。在这种情况下，阵发道路与周期倍分叉是完全不同的。另一方面，它们都由局部分叉产生，在这种意义上它们又是相似的。

混沌也能通过称为危机（Crisis）的方式产生^[34]。与阵发道路一样，危机道路也是间隙的。但它是由全局演化引起的，如跨越稳定与不稳定流型时。在临界之前的参数值，吸引运动是非混沌的，但通常存在瞬变过程，在达到它们的渐近规则运动之前，轨迹看起来是混沌的。随着参数达到临界值，混沌的瞬变过程持

续时间趋于无穷。经过临界后，产生持续的混沌运动。

在拟周期产生的混沌情况下，人们可增加一个非线性参数，同时调整第二参数，以保持某一类型的拟周期性（即保持固定的旋转数）。这样随着参数的增加，达到临界值时布满拟周期轨道的环面是些有限的碎片。另外，重整化群技术已用来研究环面的破裂^[35]。

显然，除了混沌的产生之外，用重整化群技术研究向混沌的转换是相当成功的。这一技术能否扩展用来对完全混沌的多重分形奇怪吸引子结构进行更全面的研究仍然是悬而未决的问题。

在物理实验中已观察到上述的通向混沌的所有道路，例如，在流体热对流、在非线性和激光中已观察到倍周期分叉道路。在 Rayleigh ~ Bénard 对流和搅动的化学反应中看到了阵发道路。在非线性和 Josephson 结和激光中还观察到了危机道路。在对流和固态实验中观察到拟周期转换到混沌道路。计算模拟表明 Lorenz 系统中，既存在阵发道路也存在危机道路。我们认为在许多系统中已经证明存在周期倍分叉、阵发、危机和拟周期进入混沌的道路。毫不怀疑还存在其他未知的通向混沌道路，特别是在高维系统中。

四、物理系统中的混沌

自从 Poincaré 时代以来，人们已认识到混沌动力学的复杂性和它与同宿点的关系。这使人们认识到在动态过程中混沌特性将是很普遍的。然而在耗散系统中，存在同宿点并不意味着存在奇怪吸引子。事实上，混沌特性可能是瞬态的。从某一初始数据开始的轨迹可以永远不规则地振荡，但这样的初始条件可能依赖于趋于零的概率测度集合。在这种情况下，实验者如果丢掉一个典型轨道演化的开始部分，他观察到的渐近特性将非常简单，可能是一个稳定态。

在 60 年代，一些数学家已发现大量的混沌系统的实例，著名的有 Anosov 系统^[36]，他有混沌吸引子。这种系统的一个重要

特征是他们是结构稳定的。这意味着小的摄动不会使系统改变特征（除非这一小的变化等价于坐标系的改变）。结构稳定性的要领是由 Andronov 和 Pontryagin^[37]提出的。在西方，Lefschetz^[38]的工作促进了这一理论的建立。随后 Smale^[39]根据描述的所有结构稳定性过程，设计了一个程序。当时人们相信对动力系统稍加扰动可产生某种结构稳定的系统，很明显许多的这些结构稳定的系统有混沌吸引子，可是这些观点和新现象对工程和物理科学影响甚微。

在 70 年代对混沌特性的认识发生了戏剧性的变化。一系列事件激发了数学家和科学家的想像力：

(1) 一篇被忽视的由 Lorenz^[40]发表的论文，清晰地描述了一个具有混沌特性的系统的计算机研究结果。顺便说说，像大多数在实际上碰到的系统一样，这一系统被证明不是结构稳定的。

(2) Hénon^[41]和其他西方及苏联的研究者在数值实验中发现了许多具有混沌吸引子的动力系统的例子。

(3) Ruelle 和 Takens^[22]利用混沌吸引子的结论解释了湍流是如何产生的。

(4) Li 和 Yorke^[42]给出了一个简单的具有不稳定特性的一维例子。他们为了描述这一特性，借用了“混沌”一词，用来明确表示混沌动力学的特征。

(5) May^[41]的论文报道了倍周期分叉进入混沌的道路（Myrberg 发表在 50 年代和 60 年代的论文后来才发现）。

在 70 年代后期，计算机技术已发展到这样的程度，许多科学家已能买到带有增强图形的交互式计算机。混沌的例子在科学的每个领域迅速扩大。计算机技术的出现也产生了很大的不同。理论科学家使用计算机研究微分方程和映射已取得了很大的进展：显示了吸引子、计算了 Lyapunov 指数和分维数。甚至像分形域边界和魔鬼台阶这种非吸引混沌也得到了很详细的研究。另一方面，实验科学家仅靠相图和功率谱这种有限的技术，在直接分析时间序列数据时已取得了很大的成功。例如，用革新的实验技

术已仔细研究了在大量的流体流动中从拟周期转换到混沌的过程^[44]。另外，实验学家详细地研究了随物理参数改变，在混沌和周期性之间变化的分叉序列。这样的实验发现为某些理论预测奠定了基础，如在倍周期分叉中发现 Feigenbaum 普适常数。

实验科学家研究的许多实际系统是无穷维的（像流体），一个可能的问题是从低维系统获得的理论结论是否仍然有用。最近已提出了一系列的理论方法研究这一问题。确定维数的惯性流形^[45]方法就是一个例子。已经得到的许多例子显示低维系统常常可描述无穷维系统的动力学特性，更进一步能得到所需维数的范围。虽然人们对将大量的混沌动力学理论知识应用到实际物理系统中的信心逐渐增强，但仍然存在一个问题，这就是怎样利用在高维或无穷维系统中存在的低维动力学来简化数值计算。

1980 年，Packard 等^[46]为实验和理论学家的结合迈进了一步。他们宣称，假如 n 足够大，使用延迟时间 T 将一个时间序列转变为 n 维空间，那么这样的 n 维点的演化等价于由原时间序列给出的系统的动力学特性。Takens^[47]给出的理论证明显示这一论点与 Whitney 的嵌入定理相同。这些结论使得由实验数据计算 Lyapunov 指数、维数和其他动力学参数成为可能。在取得这一进展后不久，产生了由时间序列寻找存在确定性的动力学系统的研究高潮。研究领域已从简单的非线性电路扩展到人类的大脑。探索这些动力学参数的含意和相关的预测工作是当今一个活跃的研究领域。

五、噪声和计算机的舍入误差

由于在混沌吸引子中相邻点的轨迹是指数发散的，就存在这样的问题，实验上产生的或计算机模拟出的轨迹（存在混沌放大的实际噪声或计算机舍入误差），如何能与混沌系统的真实轨迹一致？更准确地说，当人们在初始条件附近选择一个初值形成一条真实轨迹，它仍保留在扰动前的轨迹附近，称这种系统有影子特性（Shadowing Property）。结构稳定的系统就有这种特性。实际

上 Bowen^[48] 认为这种特性是一个“公理化系统” (Axiom A Systems) 的最重要的性质。这种系统是结构稳定的。

然而问题是在应用中发现的混沌吸引子实际上不是结构稳定的。因此一个自然的问题是影子特性是否能在这种情况下保持。最近的研究结果^[49,50]表明即使有同样的初始条件, 数值模拟的轨迹仍将与真实的轨迹相偏离。但对长的时间周期, 在数值轨迹附近仍存在另一条真实轨迹。在 Hénon 映射中 (一种非结构稳定的系统), 用具有 14 位精度, 进行 100 万次迭代计算得到的一条典型数值试验轨道与真实轨迹相差无几。因此对低维 (一维或二维) 系统, 回答上述问题是肯定的, 但对高维系统, 仍然不很清楚。这是今后要继续研究的一个重要问题。

六、哈密顿系统

在哈密顿系统中一个主要的研究方向是研究随着系统被扰动变为不可积时, 可积系统如何失去稳定性的? 具有 n 个自由度的自治的哈密顿系统的相空间是 $2n$ 维的。当能量守恒时, 轨迹被限制在 $2n - 1$ 维能量表面上运动。在可积条件下每一条轨迹被进一步限制在 n 维环面上, 嵌套的环面交叉在一起充满能量表面。当系统被扰偏离可积条件, 对充分小的扰动, 著名的 KAM 理论保证许多的不变环面仍存在。

最简单的非平凡情况是 $n = 2$ 。它在许多应用中也是有价值的。这种情况下的环面是一条闭合曲线, 它在能量表面中约束了混沌运动的区域。系统的轨迹既可在环上运动, 又可在他们之间运动。随着扰动增强, 更多的环破裂产生更多的混沌运动。这种系统常常可用 Poincaré 截面方法研究。结果是一个二维面积守恒映射 (area-preserving map)。如果哈密顿系统是可积的, 相应的 Poincaré 映射有依赖于不变环面的轨道, 它收敛于一个不动点。在映射下, 每个环面的旋转数是坐标的连续函数。为了研究系统偏离可积性时, 不变环面的破裂, 我们使用环状空间的面积守恒扭曲映射。近年来研究已经显示, 在环状空间的内、外边界上,

在映射的旋转数之间给定一个数 r ，存在一个将 r 作为它的旋转数的不变集合（称 Aubry - Mather 集合）^[51]。当旋转数为有理数，不变集合在不变曲线（Kolmogorov^[8]、Arnold^[9] 和 Moser^[52] 后称 KAM 曲线）上或是稠密的或是 Cantor 集。随着系统参数变化，使他远离可积性。在环状空间上，具有无理旋转数的 KAM 曲线可能失去平滑性，脱变成 Cantor 集合。对在二维映射中 KAM 曲线的破裂也进行了其他的研究工作，包括探索一个旋转数的 KAM 曲线非存在性的 Chiri Kov 准则^[53]，Greene^[54] 的有关孤立 KAM 曲线旋转数的工作，Kadanoff^[55] 和 Mackay^[56] 应用重整化群技术研究得到的在临界状态的孤立 KAM 曲线的特征。还进行了强混沌的二维面积守恒映射的轨道的扩散特性研究。实际上，混沌轨道在逃逸前，将在包含 KAM 表面的区域内存留很长时间。这种“粘性”效果对哈密顿系统中的颗粒输运有重要的意义。

对大于二个自由度的系统，我们对其了解甚少。在这样的系统中，一个 n 维环面不能分为 $2n - 1$ 维能量表面。实际上，Arnold^[57] 已给出了一个特殊的例子，对一个偏离可积情况的一个小扰动，能够形成一个混沌的精细连接带，渗透到接近能量表面上的任意点。从这些连续带出发的轨道最终可访问能量表面上每一个邻近轨道，虽然这可能需要很长时间。在这些高维系统中，对混沌粒子运动的统计特性的确定仍然是混沌动力学中未搞清楚的，也是引起人们兴趣的研究领域。

与可积系统相对应的，存在另一类包含复杂的混沌系统的极端情况。已经显示出大量的有趣系统属于这一类情况。特别是 Sinai^[58] 获得的结果，显示出弹性碰撞硬球系统属于这类情况。这一结果的重要性在于它对一个看起来是合理的，虽然是理想化的真实模型所作的统计力学假设给出了一个可靠的依据。在应用中碰到的哈密顿系统通常都是不可积和复杂的混沌系统。在大多数方面，对这些系统的认识仍然寥寥无几。

七、符号动力学

最早用于混沌研究的技术之一是符号动力学。符号动力学的最早例子是由 Hadamard^[59] 和 Morse^[60] 在研究负曲率表面上的短程流动构造的。

$$x = \dots x_{-2} x_{-1} x_0 x_1 x_2 \dots$$

符号动力学系统是其相空间由双向的无穷符号序列组成的系统。其中 x_n 是从一个有限的字母表中选取的，在一个最简单的例子中，序列告诉我们在某一个时刻 n ，一条轨迹是否在一个集合 A 中。对一个给定的映射和一个在相空间的集合 A ，一个序列是与每一条轨迹相关的。如果在时刻 n ，轨迹是在 A 集合中，那么 x_n 为 1，否则 x_n 为零。如果相空间被许多集合所分割，我们就需要更多的符号序列。符号动力学在各种情况下都可出现，例如，在马蹄映射中，如果点在长方形的左半部分，我们写 $x_n = 0$ ，如果在右半部分， $x_n = 1$ 。因此，可以认为给定任意的序列 0s 和 1s，就有一条轨迹以那种顺序访问有关的半部分。在这种情况下，我们说符号动力学是两种符号的全移位 (full shift)。

在移位变换下，给定序列的集合是不变的。这意味着，如果一个特殊序列是在一组序列中间，那么这个序列就是它所有的符号向左移一位（或向右移一位）。在许多情况下，符号动力学不是全移位，即符号中的某块是禁止移位的。例如，0s 和 1s 序列空间可能有这样的规则，5 个连续的 1s 块不能移位。另一个例子是规定某种符号不能立即出现在另一种符号之后。这样的符号动力学称为有限类的移位。从数学上讲，存在两类重要的问题，(1) 确定在两种符号序列之间相互转变的映射的存在性和性质。(2) 描述序列映射到它自身空间的这类映射在迭代后呈现的性质。根据抽象数学的性质，大多数关于问题 (1) 的基础理论工作领先于对它有关的物理问题的认识。

元胞自动机给出了大量的第二类问题的例子。它们与物理现象的关系已得到认识，特别在使用元胞自动机模拟各种物理情况

(励磁介质动力学、流体、相转变等)方面。在这提到的一个基本问题是对元胞自动机还没有一个充分的数学基础:对它们自身的模型系统,人们了解很少。然而,它们确有不平凡的精确模拟结果。符号序列理论的进一步发展很可能在许多不同类型的应用方面都是非常有用的。

八、结论

混沌动力学的知识遗产可一直追溯到 Maxwell 和 Poincaré。其他的许多科学家对推动混沌动力学进入一种令人激动的科学研究事业作出了贡献。这些研究的影响远超过了数学和物理的影响。

要强调的是,在一定程度上,由于各个学科中都存在混沌的特性,使得近年来对混沌动力学和它的应用研究迅速增加。最基本的参与者,一方面有数学家,另一方面有科学家和工程师。虽然数学能够,也确实产生了他自身的问题。但从物理学、化学、工程学和其他领域形成的特殊例子提供给数学,使数学注意到了那些对科学和技术最重要的事情。由基础理论研究提供的真知灼见,为科学家和工程师完善思想、深入观察提供了思想框架。这一思想框架为解释和理解在他们研究的相关领域中的非线性现象培育出了丰硕的成果。

我们认为非线性动力学发展起来的概念和技术已极大地增强了我们处理自然界中复杂的非线性过程的能力。在这卷文集中发表的论文已明确地反映出混沌动力学的广泛应用领域。

参考文献

- [1] L. Campbell and W. Garnett, *The Life of James Clerk Maxwell*, ch. 14 (Johnson Reprint Corporation, New York, 1969).
- [2] H. Poincaré, *Oeuvres*, vol. 1 (Gauthier-Villars, Paris, 1950).
- [3] G. D. Birkhoff, *Collected Works*, vols. 1 and 2 (American Mathematical Society, 1950).

- [4] M. L. Cartwright and J. E. Littlewood, *London Math. Soc.* 20: 180 (1945).
- [5] N. Levinson, *Ann. Math.* 50: 127 (1949).
- [6] S. Smale, *Bull. Amer. Math. Soc.* 73: 747 (1967).
- [7] M. M. Peixoto, *Ann. Math.* 69: 199 (1959).
- [8] A. N. Kolmogorov, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 98: 525 (1954).
- [9] V. I. Arnold, *Russ. Math. Surveys* 18: 5 (1963).
- [10] Ia. G. Sinai, *Russ. Math. Surveys* 25: 137 (1970).
- [11] M. V. Jakobson, *Comm. Math. Phys.* 81: 30 (1981).
- [12] L. Carleson and M. Benedicks, *Ann. Math.* 133: 73 (1991).
- [13] C. E. Shannon, *Bell Syst. Tech. J.* 27: 379 (1948).
- [14] A. N. Kolmogorov, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 119: 861 (1958).
- [15] D. S. Ornstein, *Advances in Math.* 4: 337 (1970).
- [16] R. L. Adler, A. G. Konheim, and M. H. McAndrew, *Trans. Amer. Math. Soc.* 114: 309 (1965).
- [17] R. Bowen, *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 470 (Springer-Verlag, Berlin, 1975).
- [18] S. Newhouse, in *The Physics of Phase Space*, *Lecture Notes in Physics*, vol. 278 (Springer-Verlag, Berlin, 1986).
- [19] C. Carathéodory, *Nach. Ges. Wiss. Göttinger*, 406 (1914).
- [20] F. Hausdorff, *Math. Ann.* 79: 157 (1919).
- [21] A. Besicovitch, *Math. Ann.* 110: 321 (1934).
- [22] D. Ruelle and F. Takens, *Comm. Math. Phys.* 20: 167 (1971).
- [23] R. Bowen and D. Ruelle, *Invent. Math.* 79: 181 (1975).
- [24] Ia. G. Sinai, *Russ. Math. Surveys* 27: 21 (1972).
- [25] V. I. Oseledec, *Trans. Moscow Math. Soc.* 19: 197 (1968).
- [26] G. D. Birkhoff, *Proc. Nat. Acad. USA* 17: 656 (1931).
- [27] A. Rényi, *Acta Mathematica (Hungary)* 10: 93 (1959).
- [28] J. L. Kaplan and J. A. Yorke, in *Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points*, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 730, edited by H. O. Peitgen and H. O. Walter (Springer-Verlag, Berlin, 1979).
- [29] F. Ledrappier and L. -S. Young, *Commun. Math. Phys.* 117: 529

(1988).

- [30] P. Grassberger and I. Procaccia, *Phys. Rev. Lett.* 50: 346 (1983); *Physica* 9D: 189 (1983).
- [31] P. J. Myrberg, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.* 256: 1 (1958); *ibid.* 268: 1 (1959); *ibid.* 366: 1 (1963).
- [32] M. J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* 19: 25 (1978).
- [33] Y. Pomeau and P. Manneville, *Comm. Math. Phys.* 74: 189 (1980).
- [34] C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* 48: 1507 (1982).
- [35] S. Oslund, D. Rand, J. Sethna, and E. D. Siggia, *Physica* 8D: 303 (1983); M. J. Feigenbaum, L. P. Kadanoff, and S. J. Shenker, *Physica* 5D: 370 (1982).
- [36] D. Anosov, *Proc. Steklov Inst. Math.* 86: 61 (1968).
- [37] A. Andronov and L. Pontryagin, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 14: 247 (1937).
- [38] S. Lefschetz, "Geometrical Differential Equations: Recent, Past and Proximate Future," in *Proc. Symp. Diff. Eq. and Dyn. Syst.*, edited by J. Hale (Academic Press, New York, 1967).
- [39] S. Smale, *The Mathematics of Time: Essays on Dynamical Systems, Economic Processes, and Related Topics* (Springer-Verlag, New York, 1980).
- [40] E. N. Lorenz, *J. Atmos. Sci.* 20: 130 (1963).
- [41] M. Hénon, *Comm. Math. Phys.* 50: 69 (1976).
- [42] T. Y. Li and J. A. Yorke, *Am. Math. Monthly* 82: 985 (1975).
- [43] R. M. May, *Nature* 261, 459 (1976).
- [44] J. A. Glazier and A. Libchaber, *IEEE Trans. Circuits and Systems* 35: 790 (1989).
- [45] P. Constantine, C. Foias, and R. Temam, *Memoirs of AMS*, vol. 53, no. 314 (1985).
- [46] N. H. Packard, J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, and R. S. Shaw, *Phys. Rev. Lett.* 45: 712 (1980).
- [47] F. Takens, in *Dynamical Systems and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics*, vol. 898, edited by D. Rand and L. S. Young (Springer-Verlag, Berlin, 1981).

- [48] R. Bowen, *J. Diff. Eq.* 18: 333 (1975).
- [49] S. M. Hammel, J. A. Yorke, and C. Grebogi, *Bull. Amer. Soc.* 19: 465 (1988); *J. Complexity* 3: 136 (1987).
- [50] C. Grebogi, S. M. Hammel, J. A. Yorke, and T. Sauer, *Phys. Rev. Lett.* 65: 1527 (1990).
- [51] R. S. Mackay and J. D. Meiss, eds., *Hamiltonian Dynamical Systems* (Adam Hilger, Bristol, 1987).
- [52] J. Moser, "Stable and Random Motion in Dynamical Systems," *Annals Math. Studies* 77 (Princeton University Press, New Jersey, 1973).
- [53] B. V. Chirikov, *Phys. Rep.* 52: 265 (1979).
- [54] J. M. Greene, *J. Math. Phys.* 20: 1183 (1979).
- [55] D. Bensimon and L. P. Kadanoff, *Physica* 13D: 82 (1984).
- [56] R. S. Mackay, Renormalisation in Area-Preserving Maps, Ph. D. Thesis, Princeton University (1982).
- [57] V. I. Arnold, *Russ. Math. Surveys* 18: 85 (1964).
- [58] Ia. G. Sinai, *Russ. Math. Surveys* 25: 149 (1970).
- [59] J. Hadamard, *J. Math. Pures et Appl.* 4: 271 (1898).
- [60] M. Morse and G. A. Hedlund, *Am. J. Math.* 60: 815 (1938); *ibid.* 61: 1 (1939).

David K. Campbell 和 Gottfried Mayer-Kress

摘 要

本文就我们的了解，讨论固有的非线性现象最近进展中所提出的课题，用数学模型分析环境和社会—政治问题。我们将说明特别是在许多非线性系统中存在确定性混沌，使我们揭示系统的性能的能力也受到限制，即使有精确数学模型。另一方面，混沌理论可以提供较精确的短期预测的工具，即使对于表现为完全随机的系统。混沌也提供新的时间演化范例，具有复杂的有界增长及有限资源，而没有相应的停滞与退化。这与传统的历史进化论（可用成语“事物停止增长，就开始衰落”描述的）形成反差。通过单个确定性解探索大量事物的状态，形成适应与进化的潜力。在人工生命模型的文章中已导出“在混沌边缘的生命”的观念，说明如下原理：混沌的精巧的平衡与有序是成功的进化的最优解。因为我们的主要目的是教学与启发，不打算处理复杂问题的实际模型，而是介绍一系列简单模型，用以说明适当地考虑非线性可以呈现越来越复杂的形态。我

们从马尔萨斯的人口增长初步模型开始，并且指出只要与非线性效应相联系就会显著地改变所期望的人口动力学。接下来讨论有点讽刺意味的两个问题的模型——天气预报与军备竞赛。在军备 - 竞赛模型中我们考虑一个与人口动力学有关的特殊类型，即 L. F. Richardson 在第一次世界大战后提出的。然而，我们讨论的例子是属于离散时间的。对于它们的控制变量的一定范围内，这些模型表现确定性混沌，我们将讨论这个性质是如何限制我们在各种状态下对输出结果的预料和预测能力。

然后，我们简单描述探索混沌系统的高敏感度的方法，以显著提高预报和控制混沌系统的能力。说明甚至简单模型可能有许多不同的解共存，并说明如何通过机器学习方法寻求最优解，例如神经网络和遗传算法等。

我们考虑将军备 - 控制模型普遍化为面向目标的框架，使之可以同时模拟不同层次的量化格式。在计算网络中所取的节点可以表示纯概念性的模型，即不适于定量分析的领域；也可以是分级结构模型，可以进行任意细的定量或完善化。

最后，我们通过几点评论来结束我们的一般论题。强调指出：复杂环境及社会 - 政治问题的数学建模事关增强国际稳定与合作，值得动员一切技术努力，尽管它具有艰巨性与局限性。

一、引言

在“混沌对科学和社会的冲击”的会议上，很自然要问：现

代科学的一个基本技术——即数学建模，包括广泛使用计算机仿真——对全球致力于增强稳定与合作有何贡献。稍加思索就很清楚，潜在的贡献是深远的：例如，人们可以立刻指出许多引起国际严重关注的环境问题如温室效应，臭氧消耗，核冬天等。这些问题的特殊的局部行为与全球后果之间的因果关系的定量了解只有研究高度完善化的，包含许多微妙与抗衡的效应的数学模型。关于社会—政治问题的建模，情况变得更为复杂——例如，汇率或股票市场波动的经济后果，第三世界债务，艾滋病流行——除了这些技术问题，人们还必须试图解释难于预测的人类心理。我们期望基于全球生态学问题以及资源有限与环境恶化的一般后果等问题应当成为日益相关的因素，必须在任何军备竞赛模型中考虑。

每个这些问题都包含许多独立的，复杂相互作用的组成部分。显然，数学建模的一个紧迫的，基本技术难题是数量化这些相互作用；例如，在温室效应问题中定量地了解巴西雨林对于保护大气二氧化碳的稳定所起的作用。这些技术问题将仍然是——而且应当是——专家视野之内。而在某些情况下，这些问题的解决要求许多不同学科的专家成功的合作。在这个领域里，重大课题是开发意义明确的模型，恰当地反映问题的主要特性；对于这个技术挑战，要注意一句通俗而有名的警句：“废进，废出”。

然而，在这些每个问题所特有的技术课题之外，还有系统本身的性质所提出的难题与局限，系统中许多相互作用的组成部分，某些可能适时地修改其性态。这种有适应性的复杂系统的行为从日常生活经验来看往往似乎是非直觉的——甚至是违反直觉的——例如，这些系统固有的非线性特性意味着当系统中描述其相互作用的参数有细微变化时可能突然而显著地发生行为方式的改变。再者，突发性经常出现，即突然出现系统初始形式中完全不明显的特性。在自然系统中的自组织理论已试图分析这种行为的某些方面^[31]。

虽然很难期望非专业人员注意到围绕这些复杂问题技术建模

的特殊方面的微妙细节，但这是至关重要的，特别是对可能的行动过程负责决策的人应注意到影响模型的适用性与可靠性的一般约束及特征的第二层。为了取得这种认识，重要的是超越习惯的线性直觉并识别复杂的适应性系统可能和不可能发生的行为。发展适当的非线性直觉至关重要，因为很明显数学模型在可信的范围内不仅能告诉我们什么很可能发生，也能将我们的视野限定在可能发生的事件上。在下面关于人口增长的建模历史的讨论中，我们要举例说明建模中这方面的问题。

本文的主要目的是通过描述和举例说明复杂的，相互作用的，具有非线性性质的环境与社会-政治问题的几个一般性课题及其数学建模的局限性，以有助于发展非线性数学的功能（或者按一般说法：数值化思维能力^[55]）。我们的观点是基于自然科学对非线性现象的认识已取得了相当新近的进展（见，例如[8]）。特别是，非线性动力学理论的兴起已经表明分岔，吸引子，吸引盆域，确定性混沌及分形的概念对于理解非线性的可能后果是根本性的。

下文中我们试图基本上通过举例来介绍这些概念的大部分。为了明确并且意识到我们自己的局限性（特别是在时间和空间上），我们将集中注意于两个最重要的概念：（1）分岔；（2）确定性混沌。为了讨论这些概念还要介绍其他概念如分形，盆域及盆域边界。分岔是系统控制参数的小变化，突然地（有时是显著地）性质上改变系统的行为。这个概念大概非专业人员也是熟知的，主要是由于这种现象的许多方面在60年代“灾难理论”的标题下讨论过^[67]。它与复杂的环境问题有密切关联：事实上，温室效应的主要担心是大气中二氧化碳浓度的细微变化导致全球平均气温的些许变化（也许不过 $1 \sim 2^{\circ}\text{C}$ ），可以引起气候的灾难性改变（由于非线性反馈机制），包括人为冰川时期。有特殊意义的是全局性分岔，它将影响几类解的吸引盆域的结构：系统未来的行为作为现行状态的函数非常敏感地依赖于系统参数。对于某参数，初始条件的整个邻域可能趋向于相同的渐近解或吸引

子，即所有初始条件似乎都在同一个盆域中。参数的一个微小变化可能使盆域边界发生全局性，非线性移动，以至初始点集分裂成趋向不同吸引子的子集。这种边界的几何性质可能非常复杂或者出现有如海岸线，大理石花纹一样的分形。即使系统的渐近状态是很有序和非混沌的，这种现象也可能发生。

相反，确定性混沌现象只有最近才为公众所注意^[28]；因此在全部重要性被理解之前还有许多推广工作要做。如上文所指出，这种现象的本质是，即使系统的演变一步一步按照精确的确定性规律，没有任何随机影响，在长时间内，其行为可能实质上是不可预测的，就像抛掷一枚硬币。受确定性规律控制的系统可能出现明显的随机行为，与我们的正常直觉完全相反。也许由于这种直觉生来就是线性的。实际上，确定性混沌不可能在线性系统内发生。更可能由于我们根深蒂固的有如钟表运行的宇宙观，这种观点在西方曾经被伟大的法国数学家与自然哲学家拉普拉斯在《概率论的哲学论文集》中强有力地指出：“在任何给定的时刻，一个智者知道所有的力，它赋予自然以生命，保持构成它的生物的相互位置。如果他的智慧足够深远，将他的数据进行分析，就可以将最大的宇宙天体，最轻的原子的运动概括为单一的公式；对于这样一个智者没有不确定的事物；未来正如过去一样都呈现在他的眼前。”简言之，拉普勒斯主张根据对宇宙初始状态（包括力）的了解导出关于宇宙最终状态的精确认识。实际上，牛顿力学中，在原则上忠实于这个信念。

然而，在现实世界中，初始状态的精确了解是不能达到的。某质点的速度无论多么精确的测量，还可以要求更精确的测量。尽管，一般地说，我们可能认识到无能力获得这种精确的知识，但通常假定如果两个单独的实验的初始条件几乎相同，则最终条件也几乎相同。对于大多数平稳运动的正常系统，这个假定是正确的。但是，对于某些非线性系统却是错误的，结果是确定性混沌。

本世纪初，另一位伟大的法国数学家及自然哲学家 Heri

Poincaré 十分精确地理解了这种可能性并写道（译文见“科学与方法”^[56]）：一个被忽视的小变化，决定了不得不注意的相当大的效应。然而我们会说仅仅是偶然。假如我们精确地懂得自然规律和初始时刻宇宙的位置，就可以准确地预见后续时刻同一宇宙的状态。但是，即使宇宙规律对我们不再有什么秘密，我们也只能近似地知道初始状态。如果这使我们能够以同样的近似预见后续状态，这就是我们所要求的一切。我们会说被自然规律所控制的现象已经预测到。但事情并非总是如此，仍然会出现初始条件微小变化导致最终现象的巨变。前者一个微小的误会使后者产生巨大的错误。这样预测变得不可能，我们就有了意外现象。

在物理学上，确定性混沌的概念澄清了许多以前无法解释的现象，包括例如流体向湍流的转变。有一个例子与后面要讨论的天气预报本质的局限性有关。虽然以几天为尺度的天气预报现在的精确度是几十年前不敢想象的，然而，确定性混沌理论告诉我们再也不能大大延长预报时间，因为数据采集和计算机模拟所花的努力将呈指数增长。这就是确定性混沌在环境建模上定量的局限性的明显说明。但是，即使混沌对某个特殊过程的建模带来较多的定量的深刻认识，也会使我们对非线性系统的复杂性及其模型可能出现的结果扩大视野、加深理解。

在有关非线性动力学系统的混沌行为的讨论中，应该区分两种类型：保守系统，例如描述平面运动的混沌，和耗散系统，例如通过自组织系统所产生的，或一般有阻尼的被驱动系统。再后者我们关心的是有吸引的混沌行为：存在一个渐近吸引的混沌集的开邻域，被吸引到特定吸引子的所有点的集合称为该吸引子的吸引盆。

为了举例说明非线性效应，如分岔、混沌的后果，我们利用一个新近才被理解的非线性事实，它的某些性质是普遍性的。例如，在过渡到混沌时，基本上已研究和识别三种不同方法，它们被应用于意想不到的许多似乎不相干的现象中。这种普遍性表明，一般非线性系统的特定行为的本质特征 可以从研究有同样

行为的简单系统来推理。这样，研究一系列简单模型，只要适当考虑非线性，就可以说明可能发生的更为复杂的行为，以代替处理极其复杂的现实的环境问题模型。我们事先向精通数学的读者致歉，并相信我们为了上述目的而故意简化的表述。

第二节我们开始讨论也许是人类最基本的环境问题——即人口动力学——并就单个种族¹的人口增长模型的发展过程给出十分精简的历史透视。从大家熟悉的马尔萨斯基本模型开始，说明引入非线性效应，比如增长极限，以及与种族不能连续再生产有关的离散性，急剧地改变了所期望的人口动力学²。

另外，我们将说明，在某些情况下，人口动力学的非线性模型可以预示人口随时间振荡的周期性循环。我们还要说明，在其他情况下，这些同样的模型可以预示不稳定的，非周期性人口波动：正如我们将了解的，这些波动是用确定性混沌来描述。我们将探索这个行为的根源并试图对它的后果给出一个直观的解释。

第三节我们转入每个人每天都要碰到的问题，即天气预报。它既对全球安全相当重要，又是一个长期停滞（并且无效）的数学建模难题。我们说明 L. F. Richardson 早期的工作如何揭示天气预报的局限性，由于天气固有的非线性特质。然后，我们讨论 E. N. Lorenz 在 60 年代提出的一个明显的模型（十分简化了的），阐述所有一般非线性现象的数学性质，包括从一种类型的行为到另一类型的分岔，以及参数在一定范围内的确定性混沌。我们讨论这个行为如何在原则上限制我们预报天气的能力，主要是依赖于可资利用的计算与观察资源。

第四节我们转入军备竞赛模型，我们的讨论仍然基于 L. F. Richardson 的开创工作。我们开发了一系列逐渐减少非现实性的模型（着眼于双重否定）描述在这个特殊舞台上国家间的竞争，并且说明这些模型与第二节所讨论的人口动力学模型某些惊人的固有相似。我们说明这些模型中的混沌可能性有两个不同后果，即军备及国防费用存在着随时间的实际混沌涨落，以及甚至在简单的胜/败状态下，混沌所引起的不确定性。再讨论这些结论对

于进一步的建模与决策所隐含的意义。

第五节我们提出开发计算机辅助政治的展望的某些思考。我们讨论当最优解的存在还不知道的情况下,计算机技术如高速、交互计算-博弈界面、可视化及音响工具,很可能对于搜索策略,提供有力的、有启发性的深入见解,以便寻求接近于最优的解。

最后,第六节通过几点注释,结束我们的论题。要强调指出:复杂环境问题及社会-政治问题的数学建模极端重要,尽管它有其局限性,也由于它的挑战性,值得动员一切技术力量,为加强国际稳定与合作而努力。

二、人口动力学简单模型的演进

人口动力学是首先研究的,而且仍然是最重要的环境问题之一。显然,自然与人口增长率是环境规划者所关注的核心问题。但同样还有一系列问题与种族竞争的人口动力学有关:包括猎食者/猎物,寄生者/宿主,或剥削者/被剥削者之间的关系。而在初级层次上,描述人口动力学的模型是简单的,且易于激起兴趣的。因此,很自然地我们将它引进来,作为讨论非线性现象的手段。

单个种族的入口动力学最简单的模型包括一个随时间演变的单变量,即该种族的总人口。而描述几个种族竞争或共生关系的模型则涉及多个变量。每个变量代表一个种族的人口。尽管我们介绍的历史是非常简略和有选择的,但是可以看到这些模型发展过程中基本上所有的一般特征,如我们在引言中提到的。

A. 马尔萨斯动力学及指数增长

18世纪末,在《人口原理》论文中,马尔萨斯基于他精心措辞的前提“两性间的热情是必要的,并且将维持接近于现在的状态”,作出结论:“世界人口如不加以抑制,将以几何级数增长”。虽然,马尔萨斯立即意识到这种漫无边际的增长是不可能的,并且在他的论文中提出抑制入口增长的办法,这个模型还是

不能解脱地与他的名字联系在一起。该模型描述了孤立系统在不变的环境条件下随时间的连续演变，以及面临的无限增长。用微积分的精确语言：定义 t 时刻的人口为 $N(t)$ ，根据马尔萨斯的前提，人口随时间的变化率 $dN(t)/dt$ 与 $N(t)$ 本身成正比，则有

$$dN(t)/dt = rN(t) \quad (1)$$

其中 r 是常数，代表人口的增长率（即有效再生产）。显然它是一个本质性参数，完全确定人口动力学特征。事实上，式 (1) 的解可以显式地给出，且其性质决定于 r 。若时刻 t 的人口初值为 $N(0) = N_0$ ，在任意 t 时刻，人口的规模为

$$N(t) = N_0 e^{rt} \quad (2)$$

解表示无界指数增长 ($r > 0$ ，见图 1) 或指数衰减 ($r < 0$ ，见图 2)。对于特殊情形 $r = 0$ ，人口保持常数。

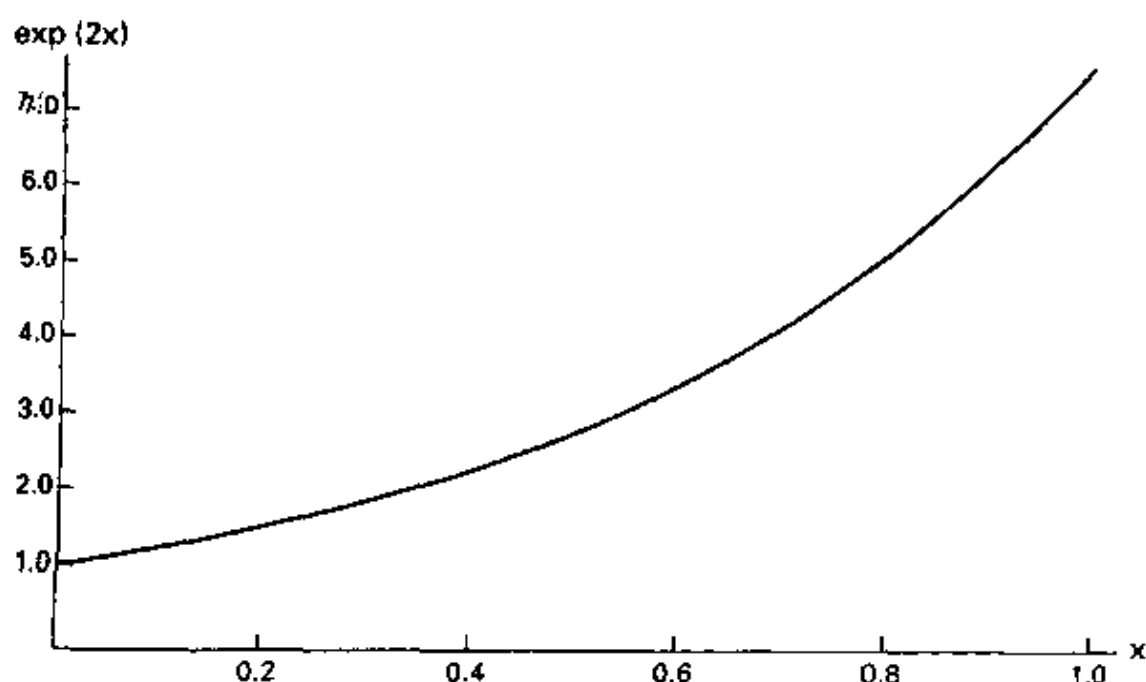


图 1 有正增长系数的马尔萨斯方程的指数增长解。没有非线性饱和，解发散到无穷大

作为一个动力学系统马尔萨斯方程 (1) 极为简单。它是线性的，方程中变量 $N(t)$ 是一次，所以两个 (1) 的不同解的迭加仍为 (1) 的解。如 (2) 所示，对于所有初始值可以给出任何时刻的解析解。对于一般 r ，只有一个定点，即使得 $dN(t)/dt = 0$ 的 $N(t)$

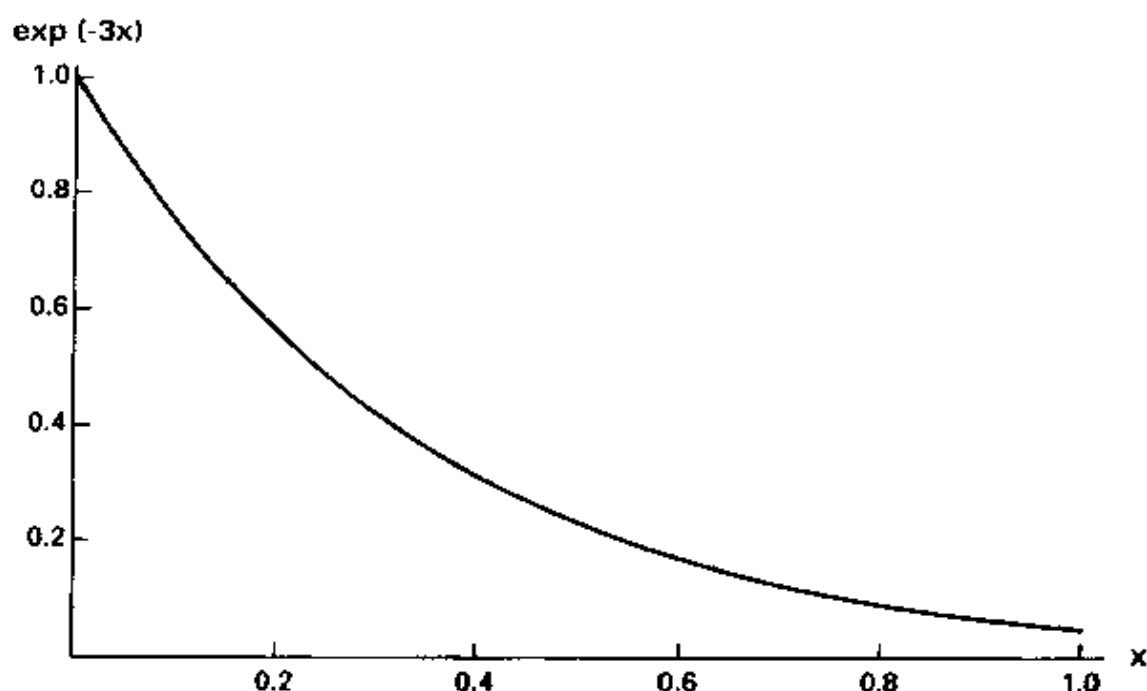


图2 有负增长系数的马尔萨斯方程的衰减指数解。当时间成为无穷大，解渐近于零

值，以至人口并不随时间而变，该值就是 $N(t) = 0$ ，完全没有人口。

虽然 (1) 是线性的，参数 $r = 0$ 是引言中所讨论的意义上的分岔点，因为该点的解有基本性质上的改变。然而，变化的性质比典型的非线性动力学系统中的复杂分岔简单的多。还要注意：就解的性质不致由于 r 的微小变化而改变这一意义上说，除了在 $r = 0$ ，解是稳定的。

马尔萨斯方程是早期研究的杰出例子，模型导出的结果可以支配我们的感觉与认识，不仅知道什么是可以确信的，还可以知道什么是可能发生的。马尔萨斯的工作有巨大的影响；事实上，术语“马尔萨斯的”仍然意味着无节制，破坏性的增长。而人口无节制地增长最终必然导致危机，这一思想对达尔文进化论及李嘉图的经济理论都有深刻影响。

从广泛应用来看，也按现在我们更广阔的视野，马尔萨斯的增长预言都似乎相当天真。但必须强调马尔萨斯方程在那些还不能有效地限制增长的领域，实际上往往工作得很好。一个很有关

系的例子就是流行病的初期增长，典型地服从指数形式。AIDS 病毒流行的初期没有出现预计的指数增长，这一事实已被证明，对于开发与各种危险状态的真实行为模式相适合的数学模型来说，是关键性的观察结果^[13]。然而，超过有效范围，天真的指数增长可能导致可笑的结果：有一个有趣的例子，上个世纪关于纽约交通发展的估计，基于马车数量增加率，当时预见到将来纽约街道要覆盖几英尺厚的马粪！

B. 连续 Logistic 动力学及增长极限

马尔萨斯论文之后两代，比利时的社会统计学家 Pierre-Francois Verhulst 提出并命名了现在出名的 logistic 方程，模拟马尔萨斯人口增长的极限效应。虽然，人口增长的极限有许多根源，基本的一个是环境的承受能力：即，若人口增加超过了一定的规模，环境无法支持，结果有效再生产率或繁殖率变为负值。这个效应的模拟可以在方程 (1) 中，用 $r(N) = r(1 - N/N_\infty)$ 代替 r 。注意，当人口远远小于 N_∞ 时， $r(N)$ 以马尔萨斯方程中的常数 r 为极限，在这个范围内指数增长完全合理。然而，当人口增加达到一点，超过该点人口对环境的冲击不再能忽视，既存在一个最大的可支撑人口规模 N_∞ 。这个值可以渐近地达到。

logistic 方程的特殊形式是

$$dN(t)/dt = rN(t)(1 - N(t)/N_\infty) \quad (3)$$

logistic 方程显然是非线性的。注意存在着与 $N(t)^2$ 成比例的项，并且有两个定点： $N(t) = 0$ 及 $N(t) = N_\infty$ 。只考虑与实际有关的情形，固有的繁殖率为正， $r > 0$ ，我们发现在 $N(t) = 0$ 的定点是不稳定的。既对解少加摄动就会随时间增长。而 $N(t) = N_\infty$ 是稳定解。尽管 (3) 是非线性的，由于它只包含单个变量，仍然可得解析解：

$$N(t) = N_0 / [N_0 + (N_\infty - N_0)e^{-rt}] \quad (4)$$

在图 3 中绘制不同初始条件的 logistic 方程的几个解。注意，当初始值大于稳定解时，人口减少直到达到稳定定点的值 N_∞ ，

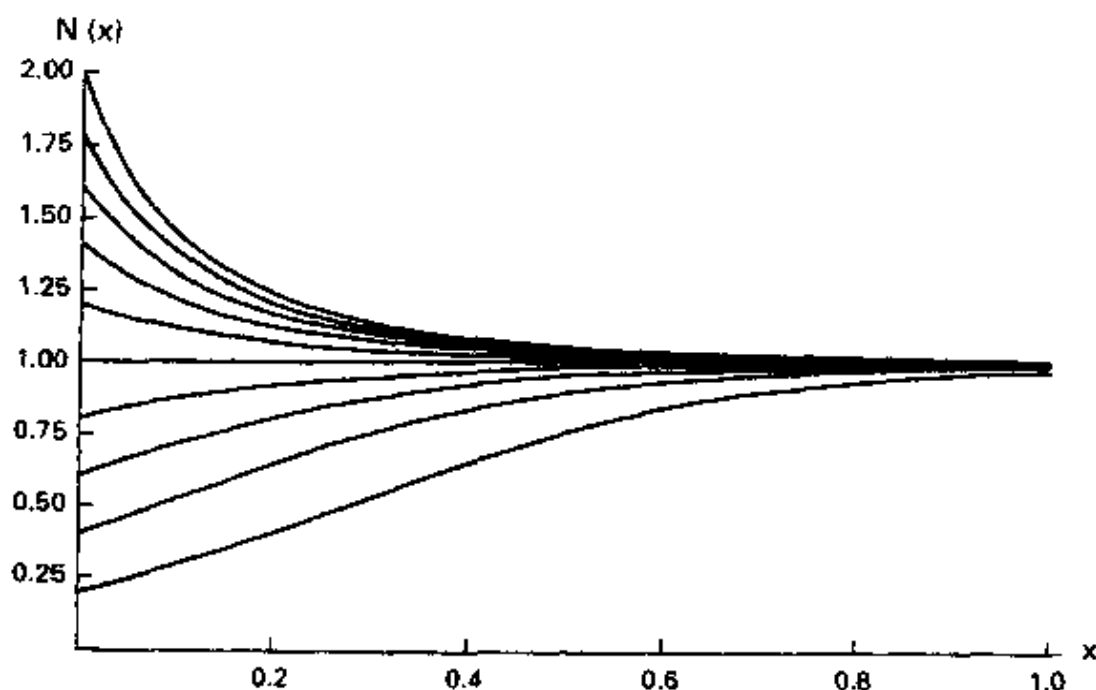


图3 对于不同初始条件的 Verhulst (logistic) 方程的几个解。有正的初始条件的所有解渐近于稳定的不动点 $N = N_x$ 。

而对于较小的初始值，人口增加以至达到这个值。另外，参数 r 的改变不会引起长时间系统动力学特性的量的变化。因此，可以作出强有力的预测：只要有任何人口，就有惟一的长期远景人口，其渐近值为 N_x 。下面我们将看到这个强的可预报性在更为现实的模型中并不可期。

C. 离散 logistic 动力学及确定性混沌

许多种族的人口动力学有一个重要特征^[43]，再生产是间歇的而不是连续的。例如，对于某些昆虫，某一年的总数可以表示为上一年总数的函数。数学上说，时间连续的微分方程 (3) 代之以离散时间的映射，使一个时刻的总数与下个时刻的总数相关联。方程的数学结构上似乎改变很小，但对于人口可能的行为模式却有深远影响。

为了着重说明这个质的差别，让我们改变符号标志，以整型量 n 作为时间序列的下标，用变量 x_n 表示时间 n 的人口。为了简化，标定环境的承载能力为 1，则离散 logistic 映射取如下形式

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) \quad (5)$$

为了使人口不至变为负的， x_n 的值必须限制在 $0 \leq x_n \leq 1$ ，并且允许繁殖率的取值为 $0 \leq r \leq 4$ 。人口的增长决定于映射的迭代，需要多少次就可以迭代多少次。特别有意义的是当时间，即迭代次数 n 趋近于无限大时的结果。特别是，初始人口值在区间 $(0, 1)$ 随机地选取，并迭代许多次，当过渡过程消失后，人口状况将如何？

由此可见，这种行为紧密依赖于繁殖率参数，且在 r 的某一区域出现分岔，即引言中所谈到的对微小变更的响应是突然与急剧的变化。当 $0 \leq r \leq 1$ ，可以证明 x_n 的值降到 0，当 n 趋近于无穷大，与初始值无关。换言之，当过渡过程消失后，所有区间 $(0, 1)$ 的点都被吸引到定吸引点 $x = 0$ 。定点的稳定性可以用标准的数学方法研究^[24]，可以证明，当 $r < 1$ 定点是稳定的。因此，小的繁殖率不足以支撑任何人口，该种族就要消亡。

当 r 精确地等于 1，存在分岔。在 $x_n = 0$ 的定点变成不稳定的，并且被另一定点所代替。该点的值依赖于 r 。这个值立即可以算出，因为在定点有 $x_{n+1} = x_n = x^*$ ；代入 (5) 即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*(r) = 1 - 1/r \quad (6)$$

因此当 r 从 1 移动到 3，定点 x^* 的值从 0 移动到 $2/3$ 。用人口的术语，该种族趋向于一个固定的人口总数；这正像上面看到的连续 logistic 人口动力学模型的形态，除了式 (5) 的另外的细节，人口的渐近值依赖于繁殖率。再者，稳定性分析证明在 $1 < r < 3$ 的范围内定点是稳定的。

一个更有意思的分岔发生在 $r = 3$ 。突然地，长时间解在两个值之间振荡，而不是趋向于单个定点：该模型有一个周期为 2 的吸引极限环，并且预示人口渐近值将经历两年一度的循环变化。当 r 进一步增加，人口渐近值的性态变得难于置信的复杂，如图 5 所示的吸引集合，即渐近人口值。在 logistic 映射中是 r 的函数。可以清晰地看到在 $r = 3$ 的分岔形成周期 2 的极限环。但

更惊人的是当 r 移到 3.5 及以后, 首先有周期 4, 再有周期 8 极限环, 然后是一个吸引集合变得不可置信复杂的区域。事实上, 如果仔细分析 logistic 映射, 可以发现当 r 增加到周期 8 极限环之后出现周期 16, 32, 64 等循环, 这一过程只有在周期变成无穷大才停止。所有这些发生在 r 值低于 $r_c = 3.56\cdots$ 的有限区域。这种(无限)分叉序列很自然地被称为周期倍串级, 现在已被视为从规则到混沌形态的经典途径之一。对于所有(不是全部, 如图 5) r 值大于 r_c 吸引集合没有明显的周期性, 即点 x_n 的序列不重复自己。对于这些 r 值, 简单 logistic 映射显示确定性混沌, 以吸引集合为结局。远远比小于 r_c 的吸引定点及极限环复杂, 称为奇怪吸引子。

虽然可以作出更正确的数学描述, 但只要注意到确定性混沌的几个显著特征, 就可以掌握它的本质。第一, 对于呈现混沌运动的 r 值, 对初始值有敏感的依赖性, 这是 Poincaré 预料过的。如果两个初始值选得很接近, 经过短时间, 后续迭代的距离就会呈指数发散。所形成的演变过程, 就像掷骰子一样。第二, 序列不仅不是周期的, 而且不是有任何有限个周期解叠加而成。用数学术语说: 该时间序列(见图 4)的富氏变换并没有一系列相应于离散频率的不同峰值, 而是一个宽频带, 即通常的有随机外部干扰的形式。

考虑到大于 r_c 的吸引子集的复杂性, 并不致令人惊讶, 正如典型的混沌动力学问题, 这个模型不适宜于解析方法求解。不过, 有一个很好的解析结果, 可以表述确定性混沌问题的特征, 量化解对初始条件的敏感性, 但失去了关于初始条件的信息。考虑特殊情形, $r = 4$ 。令 $x_n = \sin^2 \theta_n$, 则对于 $r = 4$ 的 logistic 映射为

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta_{n+1} &= 4\sin^2 \theta_n \cos^2 \theta_n \\ &= (2\sin \theta_n \cos \theta_n)^2 \\ &= (\sin 2\theta_n)^2\end{aligned}\quad (7)$$

因此, 这个映射只是简单的倍角 $\sin$ 函数的平方, 且解为 $\theta_{n+1} = 2\theta_n$ 。用初值 θ_0 表示,

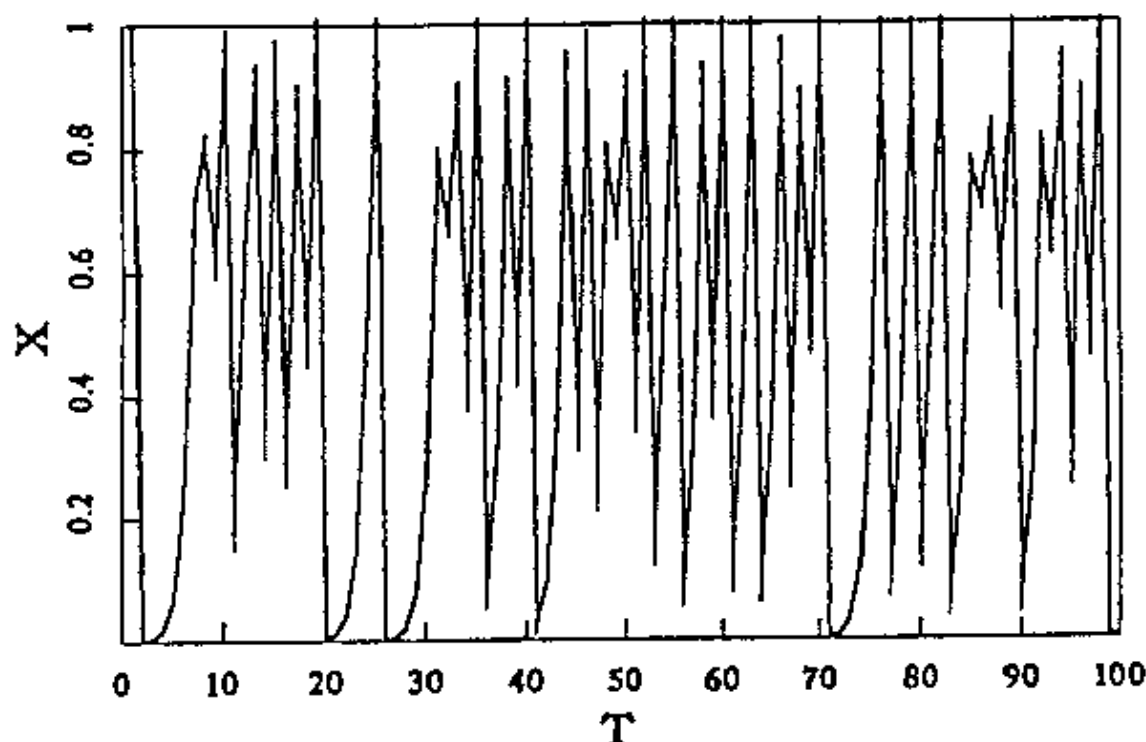


图4 离散 logistic 方程的混沌解, 参数为 $r = 4$, 初始条件为 $x_0 = 0.499$ 。解任意接近于区间的每一点, 但大部分时间接近于区间的终点 (因为不变尺度中的奇异性)

$$\theta_n = 2^n \theta_0 \quad (8)$$

由此可见: 第一, 存在对初始条件非常敏感的依赖性。第二, 从相邻初始条件出发, 出现指数形式的偏离。用有限位二进制表示 θ_n , 可见此映射相当于简单的移位运算。在计算机上运算每一次都是用圆整误差代替尾数, 每一次迭代失去一位的信息。如果已知初始条件为 48 位精度, 经过 48 次迭代就不再保留初始条件的信息。换言之, 虽然 logistic 映射是完全确定性的, 由于邻近的初始条件是指数偏离的, 除非在很短时间内, 所有运动的信息编码存储在初始状态中, 而动态特征本身一点也没有。

可以进一步用数学语言来阐明: 对于 $r = 4$, logistic 映射导致一个稠密覆盖全部可能取值的 x 区间的渐近值。点 $\rho(x)$ 的频率分布在允许区间 $0 < x < 1$ 为 $\rho(x) = 1/\pi \sqrt{x(1-x)}$ 。

另外, 对于 $r = 4$ 的变换表明 logistic 方程等价于移位运算中的 Bernoulli 过程。这一过程是计算机中随机数发生器的基础。最

后, 对于 $r = 4$ 可以更精确地说: logistic 映射确定性动力学导致像掷骰子一样的形态。将单位区间一分为二, 符号 H 代表所有 $x_n < 0.5$ 的值, T 代表所有 x_n 大于 0.5 的值。如果只记录对于这个 r 值的序列 H_s 及 T_s , 就不能区分 logistic 动态与真正的掷骰子。

从这个简单例子中可以学到的东西还多得多。限于篇幅只得作如下简短的总结。第一, 可能要问: 在 logistic 映射中标志从有序到混沌的周期倍串级, 对于更一般的非线性系统有什么典型意义。结论是: 周期倍串级决不是耗散非线性系统由有序运动转变为混沌的惟一形式。许多其他途径, 如准周期、间歇等已被识别与分析。

第二, 如果系统中出现周期倍串级, 就可以从理论上论证该串级具有不依赖于 logistic 映射特殊性质的普遍特性。这个非常重要的、关系到非线性动力学的普遍性的理论结果已经被一个实际流体实验中周期倍增的普遍特性所证实。下文将通过天气预报模型说明这个普遍性。

第三, 图 5 说明方程 (5) 的吸引集的另一明显特性, 即包含非平庸的, 事实上是放大的自相似结构。在此数学模型中, 这个自相似结构出现在所有 (较小的) 规模上。因此, 这个图是一类混沌动力学中通常出现的, 复杂无限分支几何体的例子, 称为分形。重要的是, 此分形结构发生在问题的参数 r 空间中。在问题的初值空间中也同样有分形的重要实例。

第四, 无论在时间连续的 logistic 动力学还是 logistic 映射中, 对于任意给定的 r 值, 只有一个吸引子, 在更一般的非线性动力学系统中, 可以发现多个吸引子及渐进的形态模式。在这种情形, 从哪一个初始条件开始演变决定系统最终渐进于哪一个吸引子。那些导致同一个吸引子的初始条件的集合, 称为该吸引子的吸引盆。可以证明吸引盆的边界同样具有十分复杂的上述^[29]分形结构。此时, 系统将显示另一种形式的对初始条件的敏感性。即对哪一个吸引子演变非常敏感地依赖于确切的初始条件。注意: 即使吸引子不是混沌的, 这一现象也存在。轮盘赌便是一个

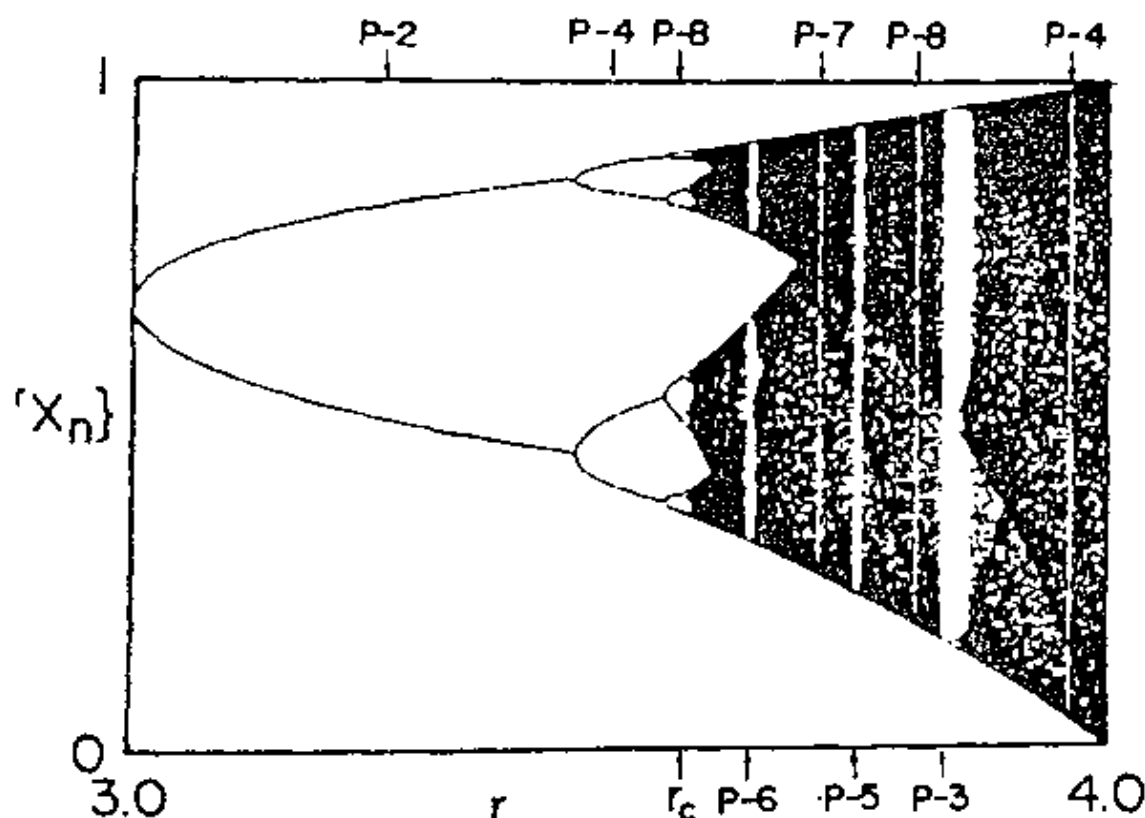


图5 离散 logistic 方程的分岔图，参数为 $3 < r < 4$ 。系统的吸引子用点集表示垂直方向对分岔参数 r 。明亮的区域表示周期吸引子（有限点集），周期用图中上部和下部有标号的箭头表示。参数 r_c 表示周期倍分岔的聚点，即相应于周期为 $P = 2^n$ ， $n \rightarrow \infty$ 的周期轨道的极限（来源：J. D. Farmer, J. P. Crutchfield, B. Huberman, 物理学报道 92: 45 (1982)）

熟知的例子。它的最终状态总是一个不动点，即盘中一个数。但，使许多赌徒为之悲伤的是该不动点非常敏感地依赖于初始状态。也要注意，如果系统有多个吸引子，外界干扰可以导致不同吸引子间的转换。在许多情形，吸引子对抗干扰能力有很大的差异。即某些吸引子较其他吸引子稳定。这个稳定性的范围可能表示在实际环境中可能只出现少数吸引子。特别是，作为噪声敏感性的后果，可能发现^[45]通过噪声导致的有序，使混沌消失。

第五，在区间 $r_c < r < 4$ ，logistic 映射表现一些与混沌有关的更为精巧的现象。当 $r = r_c$ 映射所表现的确定性混沌的实际形式称为有噪声的周期性。在有噪声的周期混沌中，振幅上有周期振荡形式的小尺度混沌调制。在图5中，这个解表现为混沌带。这

些混沌带中散布着周期窗口，它们通常对于扰都很敏感。它的表现是当给定的参数增大（在我们的例子中是繁殖率）导致混沌解；但，同一个参数进一步增大，突然恢复有序运动。这个回到有序的行为，按相关的流体湍流现象，命名为阵发。阵发混沌呈现不规则的有序行为与混沌爆发交替。规则运动的持续时间可能很长，以至系统的表现是非混沌的，直到突然的混沌爆发才显示潜在的复杂性。在环境问题文章中，阵发性现象似乎并不很少，基本上是系统性能的非再生性破坏。相反的现象也有：抗干扰强的混沌形态突然衰变成规则的周期吸引子或不动点，技术术语是危机事件^[29]。

最后，考虑到连续时间模型的重要性，有必要指出为了产生混沌必须具备的复杂性程度。对于只包含两个耦合一阶微分方程的系统，例如描述种族竞争的简单人口模型，如捕食者/猎物，寄生者/宿主。可能发生的最复杂的行为是极限环，类似于 $3 < r < r_c$ 的 logistic 映射。然而，对于三个耦合的一阶微分方程，就可能出现确定性混沌。例见下节的天气预报建模。

三、天气预报：混沌动力学的直观实例

现在讨论一个非常熟悉的现象的非线性模型，即天气预报，它关系到全球安全与生存。虽然在下面的小节中所讨论的模型不能当作所描述的现象的真实模型，它可以通向复杂的环境现象的真实模型的阶梯。因此，它的价值在于指出非线性效应，包括分岔及确定性混沌，也可能在更为实际的模型中发生。

A. 天气预报及 Lorenz 方程

60 年代早期 Edward Lorenz，麻省理工学院的气象学家，开展了一系列的研究，旨在证实天气预报的困难不在于任何外部干扰的随机性，而事实上是可以与完全确定性的描述相协调的。Lorenz^[39]意在量化 Poincaré 的另一定性的见解。Poincaré 在一个先见之明的评论中抓住了气象学的重要性与困难。这就是引自 Sci-

ence and Method 的一段文章中立即可以明显地看到的：

为什么气象学家如此难于给出有相当肯定性的天气预报？为什么阵雨甚至暴风雨似乎是偶然来到的？虽然，人们可能认为通过祈祷求得日食是荒谬的，但是，许多人认为求雨或祈求好天气是很自然的。我们知道大的扰动一般在空气处于不稳定平衡的区域产生。气象学家很清楚平衡是不稳定的，在某地将形成气旋，但是不能精确地说在什么位置；在任何给定的点大于或小于 $1/10$ 度，气旋将在这里爆发而不是那里，使得那个区域免于灾害。如果它们注意到了这个 $1/10$ 度，他们就可能预先知道。但是要么观察没有足够可理解程度，或者没有足够的精确度。这就是为什么似乎一切都由于偶然性的介入。还可以发现同样的对比，一方面是对观察者不觉察的微不足道的原因，另一方面是有相当影响，有时甚至是严重灾难。

为了定量说明这种灵敏的依赖性，Lorenz 开始用一个简化的模型逼近空气中的对流。截断高阶项，忽略高阶耦合，取模型中的三个最低 Fourier 模态，Lorenz 得到如下的非线性一阶微分方程组：

$$\begin{aligned} dx/dt &= -\sigma x + \sigma y \\ dy/dt &= -y + rx - xz \\ dz/dt &= bz + xy \end{aligned} \quad (9)$$

用于空气对流问题， x 表示对流翻滚的速率， y 及 z 分别表示水平及垂直方向的温度变化。在 (9) 中有三个控制参数 σ ， r 和 b 与流动的物理特征有关。显然，方程 (9) 的解的性质与这些参数有密切关系。我们将集中于几个例证情形。为了简化，取固定的 $\sigma = 10$ 及 $b = 8/3$ ，讨论几个 r 值^[66]。

当 $r < 1$ ，对于所有初值，方程(9)演变成在原点($x = y = z = 0$)的不动点。恰恰相似于小参数下的 logistic 映射。当 $r > 1$ ，在原点的不动点变成不稳定的。但，当 r 小于大约 24，所有初始条件吸引到两个同时存在的不动点之一：或者是 $C_1 = \{x = [8(r-1)/3]^{1/2}, y = x, z = r-1\}$ ，也可能是 $C_2 = \{x = -[8(r-1)/$

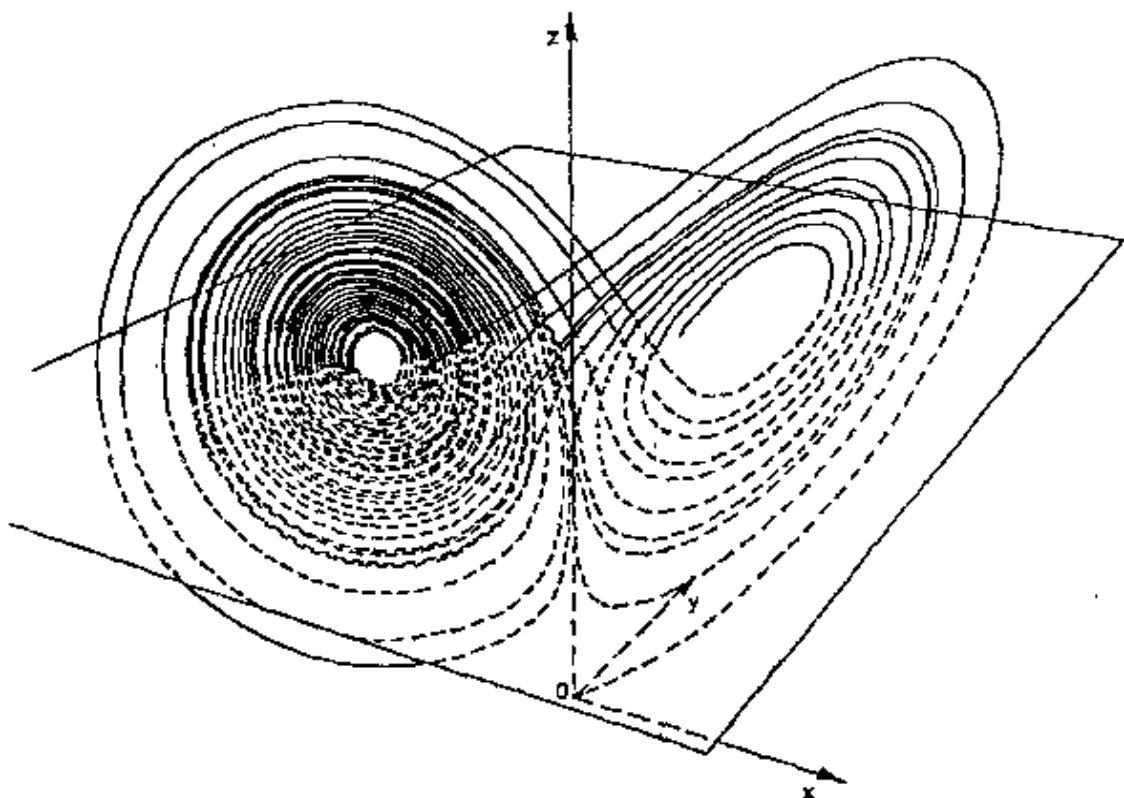


图6 $x-z$ 平面上的 Lorenz 吸引子的投影。吸引子是混沌的，且形成维数稍大于 2 的分形体 ($D_f \approx 2.07$)。它表示解在几何体上不规则地游荡，这些几何体局部地构成无穷多封闭的空间表面

$3]^{1/2}$, $y = x$, $z = r - 1$]。当 r 增加这两个不动点的吸引盆按复杂的方式变化，但对于 $r < 24$ 没有其他吸引子。对于大的 r 值，吸引集本身的性质急剧地改变，且可能出现著名的 Lorenz 吸引子 (奇怪吸引子)。图 6 给出这 3 种情形的透视。这些吸引子表示完全包含在有限域 $x = (x, y, z)$ 空间中的方程 (9) 的解，但这些解并不回到它本身。因为微分方程的解相应于连续曲线，则在时间 $-\infty < t < \infty$, Lorenz 方程 $x(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ 的解的曲线一定是无限长，如果它们不渐近于一个封闭曲线。如果绘制出无限时间系列点 $[x(t), y(t), z(t)]$ 的全部吸引子，可以看到永远环绕，从不相交即不重复的轨迹。图 6 所示的优美纤细的结构可能按任意比例出现，直到无限大。但吸引子不会在空间 (x, y, z) 形成致密的整体。再者，这是分形的一个特征，维的概念推广到非整数值。它表达这样的事实，在某种意义，这些对象处于

混沌动力学

正常的 Euclid 对象（如通常的线，面，体）之间（例如见[42]，[47]）。对于 Lorenz 吸引子，分形维大约是 $D = 2.07$ 。

如果继续改变 r 值，将出现无数个分岔。有些是再现规则的运动。特别是，可以发现通过周期倍串级到达混沌的例子（在 r 恰好大于 215 的区域）。重要的是，在我们关于普遍性的讨论中可以预期 Lorenz 方程中这个串级的许多特征与 logistic 映射中所见到的一致。另一可以说明普遍性的例子是某种形式的激光^[31]，有相似的方程，不大精确但可以更为定性地描述近似的混沌行为。

从原始的天气预报问题的观点看来，Lorenz 方程存在奇怪吸引子解意味着对于大范围的参数模型的长期性态简直不能预测。对子初始条件的敏感依赖性说明从吸引子附近两个非常相近的出发点，可能以显著不同的方式随时间演变。用通俗的语言说这就是所谓蝴蝶效应。一只蝴蝶在北京扇三两下翅膀，可能（原则上）完全改变几天以后旧金山的天气。因此，存在着确定性混沌和奇怪吸引子清楚地指出数学建模的一种形式的局限性。其范围所及从龙头滴水^[64]，电子设备及化学反应^[31]，到气象波动（例如 El Nino^[69]），甚至股票市场的动力学^[62]。

四、混沌动力学与军备竞赛模型

Richardson^[58]的开创性工作为后继的对许多问题进行定量分析的努力建立了舞台。这些问题是国家之间双边或多边的军事战略及经济竞争。这一节我们讨论几个简单的，离散变量 Richardson 方程^[49]。基本上作为简短的演习，指出如何建立并分析社会 - 政治问题的非线性模型。必须强调，我们认为在社会 - 政治舞台上用简单的非线性动力学模型，其动机与用经典的博弈论是有相当差别的。后者的兴趣在于寻求优化策略，得到某一问题的惟一解。混沌理论的主要课题之一是单独的解（历程）基本上是不可能再现的。一个系统对同一个问题可能有许多不同的但等价的解。因此，后者与我们的问题关系不大。

混沌动力学

Richardson 的原始工作开发了用于两个国家间军备竞赛的一组方程。每个国家只有一个变量，总共是两个连续时间上的变量。如上所述，就一般数学意义上，这个假定导致极其局限的，非典型的理论结果。即原来的 Richardson 方程不能展现比不动点或周期振荡更复杂一点的有界行为。然而，正如上面也已指出的，如果增加更多的变量，即加入别的国家或者用多个变量表述一个国家，或者增加时间 - 滞后表示一个国家对另一国家的响应，即开发或部署一种新武器只有经过一段时间才能侦察出来并响应。于是，这些更复杂的连续时间变量模型可以（一般地可以）展示确定性混沌。因为我们的主要目的是举例说明，而不是明确地描述军备竞赛模型，由于上述动机，我们采取比较简单的步骤，考虑时间离散模型。事实上，这也并不是不合理的方法，离散时间可以表示比如预算的批准通常是以年为基础，又如有关的情报并不是连续地提供的。这个离散时间模型，如果是基于非线性方程，对于两个国家的情形，可以看到上述非线性动力学系统所有的显著特征。

A. 两国 Richardson 型模型

为了建立简单的离散时间 Richardson 模型，考虑如下两个国家竞争的例子。以 $x_\alpha(t)$ 表示 α 国在 t 时的军费， $\alpha = 1, 2, \dots, d$ ， α 表示在 d 个国家中所考虑的是哪一个。国家数目（维数 d ）可能很小，例如，如果只考虑北大西洋公约组织与华沙条约组织或者美国与苏联，则 $d = 2$ 。在以后的情形，如果欧洲及中国作为另外的独立国家，则 $d = 4$ 。在各种局部冲突中别的国家也卷入，但主要变量总是少数。在物理系统中 $x_\alpha(t)$ 有时称为模或幅值，也称为阶参数（当形态是混沌的可能有似是而非的说法！）。

$x_\alpha(t)$ 是如何作为时间的函数而运行？我们最熟悉的是驻点状态或不动点，即当时间 t 增加 $x_\alpha(t) \rightarrow x_\alpha^*$ （一个固定的常数）。静止状态 x_α^* 当然依赖于一定的控制参数 a （类似于 logistic 映射方程 (5) 中的 r ）。表示政策，策略，经济约束等。我们首先探

讨论稳定状态 $x_a(a)$ 如何依赖于参数 a ，然后改变控制参数，按照我们的目的和要求（或希望）调整状态。驻点状态，如果是稳定的，使有效期限可以计算而且安全。

1. 两国 logistic 型模型

混沌解的表现形式已在 Richardson 型模型中用很简单的格式描述^[60]：

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= 4ay_i(1 - y_i) \equiv f_a(y_i) \\ y_{i+1} &= 4bx_i(1 - x_i) \equiv f_b(x_i)\end{aligned}\quad (10)$$

这里采用表达形式 $x = x_1$ 及 $y = y_2$ 避免下标及时间变量使表达形式复杂化。变量 x 及 y 分别表示国家 X 及 Y 用于军备的可利用资源的份额。

方程 (10) 中设定某国的军备 x_{i+1} 主要决定于敌国上一年度的军备 y_i ，这是合理的。也许不大合理的是因子 $(1 - y_i)$ ，因为当敌国动员最大可能的军备 ($y_i = 1$)，该国的军备响应却减少到零。

上述模型基本上是一维，步长为两年。 $x_{i+2} = f_a(f_b(x_i)) = f_{a,b}(x_i)$ ，类似地

$y_{i+2} = f_{b,a}(y_i)$ 。两国同时进入稳定状态 x^* ， $y^* [= f_b(x^*)]$ ，同时分岔到一个周期状态，或者同时进入混沌。

在 [60] 中过渡到混沌状态伴随着不可预测的行为，危机性 - 不稳定军备竞赛，也就是增加了战争爆发的危险。虽然，这个解释是可以争议的（例见 [35]，[30] 的讨论），但有一点是清楚的，军备竞赛模型必须考虑到向混沌过渡的可能性。

在 [30] 中讨论了军备竞赛模型的第二种解释：有界的，小规模混沌是稳定的军备控制形势的一部分。虽然，另一方的响应不能详细预测（可能由于某国内部的政治原因），吸引子本身的稳定性可以相信不致出现灾难性意外。这就是说可以期望，如果某国对子国防政策有基本的舆论，但预算的细节就决定于内部讨论。内部意见（鹰派与鸽派）之间的相互作用的影响以及两国

间的相互制约在 [2] 中已讨论。

这种小规模形式的混沌现象与大规模的混沌起伏有区别，后者可能导致无节制的军备竞赛、战争或经济崩溃的危机。所谓危机应理解为模型的全局形态的突然改变：解的爆发，吸引子改变大小及位置。与这种危机密切相关的是对于扰的敏感（例见[5]的定义与讨论）。

2. 资源限制的响应

在 [30] 中将类似的军备竞赛模型的非线性解释为经济约束。该模型定义为如下方程：

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= x_t - k_{11}(x_t - x_s) + k_{12}y_t(1 - x_t) \\y_{t+1} &= y_t - k_{22}(y_t - y_s) + k_{21}x_t(1 - y_t)\end{aligned}\quad (11)$$

变量 x_t 及 y_t 仍然分别表示国家 X 及 Y 在 t 年用于军备可利用资源的份额。军备或军事开支的改变， $x_{t+1} - x_t$ 可以认为与另一国家的军事开支成比例。Richardson 设比例因子为常数。另外假定这个因子本身依赖于剩余的可利用的资源，取 $k_{12}(x_{\max} - x_t)$ 。正如在第二节中，最大的可利用资源份额为 $x_{\max}$ ，由于变量是无因次的，所以在方程 (11) 中取 1。常数 k_{12} 及 k_{21} 都是正的，相当于 Richardson^[58] 的防务强度。常数 x_s 及 y_s 是各国当然的自我防卫军备水平，相当于 Richardson^[58] 的负担不平衡变量。最后，常数 k_{11} ， k_{22} （正的）是假定没有敌国时的消费系数，使之接近于自我防卫军备。这个模型可以认为是 Richardson 原始方程^[58] 的非线性，离散形式。

上述有限资源模型的显著特征是通常向不稳定的急剧的过渡，并没有周期倍增（或其他熟知的）前期现象，作为不稳定的征兆的信号（解释为战争爆发或模型的崩溃）。并且导致不稳定的阈值要低得多，如果两个国家更为独立且假设准确地按同样的方式反应（这个假设并非不现实的）。

3. 全球性的资源限制

如果资源的限制影响所有军费开支，上述模型稍有改变即带来明显不同的性质。其表达式为：

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= x_t + [-k_{11}(x_t - x_s) + k_{12}y_t](x_m - x_t) \\y_{t+1} &= y_t + [-k_{22}(y_t - y_s) + k_{21}x_t](y_m - y_t)\end{aligned}\quad (12)$$

这个简单的全球性资源限制模型 (12) 似乎符合我们的期望：如果相互间防务强度 k 小，反映相信其他国家的平静，就有相当低的军事开支，只稍高于自卫水平 s 。军事开支随 k 的增大而增加。如果 k 超过阈值 k_c (范围 $k_c \leq k < 2 + k_c$)，各国军事开支达到最大值，与其内需无关。如果相互防务因子大于 k_c ，军备竞赛不可避免。军备随着 k 从低到高连续变化，即或多或少不被政府或执政者所觉察。

4. 主动战略防御 (SDI) 模型

一个更为特殊的军备竞赛模型，基于相同的离散时间动力学数学工具，应用于战略防御系统 (SDI) 对超级大国军备竞赛的冲击^[61]。这个简单的模型只包括三个 SDI 元素：(1) 洲际弹道导弹 (ICBMs)，由攻击、战略、核武器组成；(2) 反 ICBM 卫星，任务是从空中打击并摧毁 ICBMs；(3) 在这些卫星能摧毁 ICBMs 之前，反卫星导弹或别的武器发射出来，摧毁头顶上的反 ICBM 卫星。

该模型所描绘的结果表明对于大多数参数的组合，引进 SDI 系统导致广泛的进攻性军备竞赛，而不是过渡到以防御为主的战略格局。减少进攻性武器的数目，即一个以防御为主的途径可以出现，如果每一个洲际弹道导弹的重返大气层的运载工具数目限制到远远低于现已实现的值，或者进攻性武器的精度显著降低。对于军备制造强烈加速的情形 (进攻或防御)，可以发现解的稳定性的丧失，表现为方程向混沌的过渡，可以解释为某一方某种行动的不可预测的政治后果。

实际上，[61] 已通过计算迭代研究了这个模型，包括在给

定时间内的随机干扰（作用于时间的每一步）的影响，然后确定从数值模拟输出的范围。干扰的随机性对于估计可靠的抗干扰能力是十分重要的：与线性系统成反差，非线性系统对某个变量或参数的扰动的响应不能用于推论在多个因素同时被扰动时系统的行为。有点滑稽，我们发现 Murphy 定律关注到这个现象：事情似乎总是这样，复杂系统中许多不利因素协力促成最坏的可能的结果。

B. 三国 Richardson 模型

在这一小节我们讨论 Richardson 模型推广到三个国家间的军备竞赛。这就引入可能的结盟带来另外的复杂性（见例如[74]）。三个国家最自然的结盟形式是两个较弱的国家结盟。否则，两个国家结盟对第三者就有压倒优势。于是，竞争减小到比结盟国之间还要低。因此，假定各国 X, Y, Z 有规范化的军费开支 x_n, y_n, z_n ，其中 n 表示离散时间单位，相应于一个典型的决策期间：例如 x_n 可以表示第 n 年的军事预算。我们研究一般的情形， $x_n > y_n > z_n$ 。这时，按我们的假设 Y 与 Z 结盟对抗 X ，描述 $n+1$ 年的军备水平的方程对于每个国家包含 4 个有关因素：（1）上一年的军备水平 (x_n, y_n, z_n) ；（2）每个国家希望达到的固有的自卫军备水平，与外来威胁 (x_s, y_s, z_s) 无关；（3）从敌国来的外部威胁；（4）经济限制 $(x_{\max}, y_{\max}, z_{\max})$ 。在方程中表示外部威胁的项防范结盟国的国家与在结盟内的国家不同。对于 X 的威胁由对方 Y 与 Z 的军备开支的总和 $(y_n + z_n)$ 构成。对于 Y 所受 X 的威胁，由于 Z 的军费开支而减轻，即 $(x_n - z_n)$ 。对于 Z 所受 X 的威胁为 $(x_n - y_n)$ 。

我们认为军备开支 x_n, y_n, z_n 作为变量，它们的时间演变历程是我们要跟踪的。另外的变量 x_s, y_s, z_s 及 $x_{\max}, y_{\max}, z_{\max}$ 作为参数，正如在上述资源限制模型中所讨论的。有几个参数有效地表示关于要趋近的目标的速率的政治决策。参数 (k_{11}, k_{22}, k_{33}) 确定各国企图达到他固有的，不依赖于外部威胁的军费水

平有多么快。参数 (k_{23} , k_{13} , k_{12}) 表示已觉察的外部威胁将以什么速度去抗衡。在条件 $x_n > y_n > z_n$ 下, 所得到的离散方程为:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + [k_{11}(x_s - x_n) + k_{23}(y_n + z_n)](x_{\max} - x_n) \\y_{n+1} &= y_n + [k_{22}(y_s - y_n) + k_{13}(x_n + z_n)](y_{\max} - y_n) \quad (13) \\z_{n+1} &= z_n + [k_{33}(z_s - z_n) + k_{12}(x_n + y_n)](z_{\max} - z_n)\end{aligned}$$

在模拟计算中, 如果军备开支的排列顺序发生变化, 则方程重新安排, 新的联盟由两个新的弱国组成。考虑到参数多且各个值的不确定性, 应该在广阔范围的参数内研究这些方程^[49], 并设法孤立这些参数的区间, 使该区间的解显示稳健, 规则的行为, 从这里得到敏感的混沌行为。

对此模型的典型解的初步分析^[49]表明 (并非意外) 有多个吸引子, 被形成吸引盆的边界表面所隔开。由某些参数结合形成的状态空间的几个区域里存在小规模混沌。在联盟结构转变的参数空间附近, 系统变得对外部干扰很敏感。这种现象有利于计算机识别临界区域。

虽然, 不能以本节任意一个过于简化了模型的结论作为政治决策的中心基础, 我们认为试图了解和量化因果关系将导致这些问题各方面日益完善的模型。一旦这样的模型产生, 一定需要从一些较为简单模型所获得的深入理解及非线性动力学理论技术去分析这些模型。

五、展望

A. 运用机器寻求最优解

人类直觉及模型识别能力对几个不同领域的问题是非常深刻的。开发这些技能, 用以解决经常出现的问题 (例如电子游戏), 可以得到意想不到的效率。我们也有能力将似乎无关的问题的有效解组合起来, 并加以综合解决更为复杂的新问题。这大概是取得科学技术的大多数进展的常规。最后, 人脑可以对于以往经验或早期解无能为力的问题提出全新的创造性的解答。这就是导致

突破性发现的典型特殊情形（当乘地铁或观看浮云）⁴。然而，对于给定的问题所考虑的因素超过一定的临界复杂性，局限性就成为明显的。这时我们通常退回到个人经验，传统的学识，星象学等。另一方面，有一个创造解决问题的工具的老习惯，主要是增强信息存储能力⁵。这些工具的范围从简单的结构，如儿歌，初步计算工具，铅笔和纸，到计算机模拟与可视化环境，使得我们可以模拟与观察许多不同的迅速接替的现实。今天，可以利用的计算机模拟方法至少有三类人工问题求解。人工智能（AI）是一种广泛应用的方法，借用自关于学习的人脑功能：神经网络已应用于许多不同的领域，包括海湾战争的新式武器中的人工智能特性（最近概况见 [23]）。我们用了基于遗传算法的另一种方法求解最小不平衡军备水平，搜索了 15 维空间参数及初始条件的广义 Richardson 方程。

在这种情形，由于参数空间太大，不可能彻底搜索。因为每个方程对不同的初始条件都要迭代到渐近行为并试验灵敏度（初始条件小的改变是否得到性质不同的渐近行为），参数空间每个点的确定开销都很大。遗传算法提供了智能地搜索参数空间，寻求有价值的区域的可能性。作为一个估计，迭代了 20 步，比较 X （主要国家）与 Y , Z （联盟国）的军费。我们希望最小化的不平衡函数为：

$$F = |x_{20} - (y_{20} + z_{20})|$$

模型中有 12 个独立变量（包括初始条件则为 15）。这些实值参数定义在 $(0, 1)$ 区间，可直接离散为存储单元，对于每个参数用一个二进制编码表示它的存储单元。存储单元的大小用决定于离散时所用的位数（例如 [26] 中对于每个参数用 8 位相当于 $2^8 = 256$ 不同的存储单元）。用遗传算法求解力量平衡以前还没有过。人工设定参数时没有假定这些点存在。遗传算法发现许多不同的解，大部分不退化，这些解不是平庸的（即参数没有设定为 0.0 或 1.0）。与神经网络法形成反差，后者的解常有平庸的。研究参数空间的超平面表明它包含规则的接近完全符合的子域。因

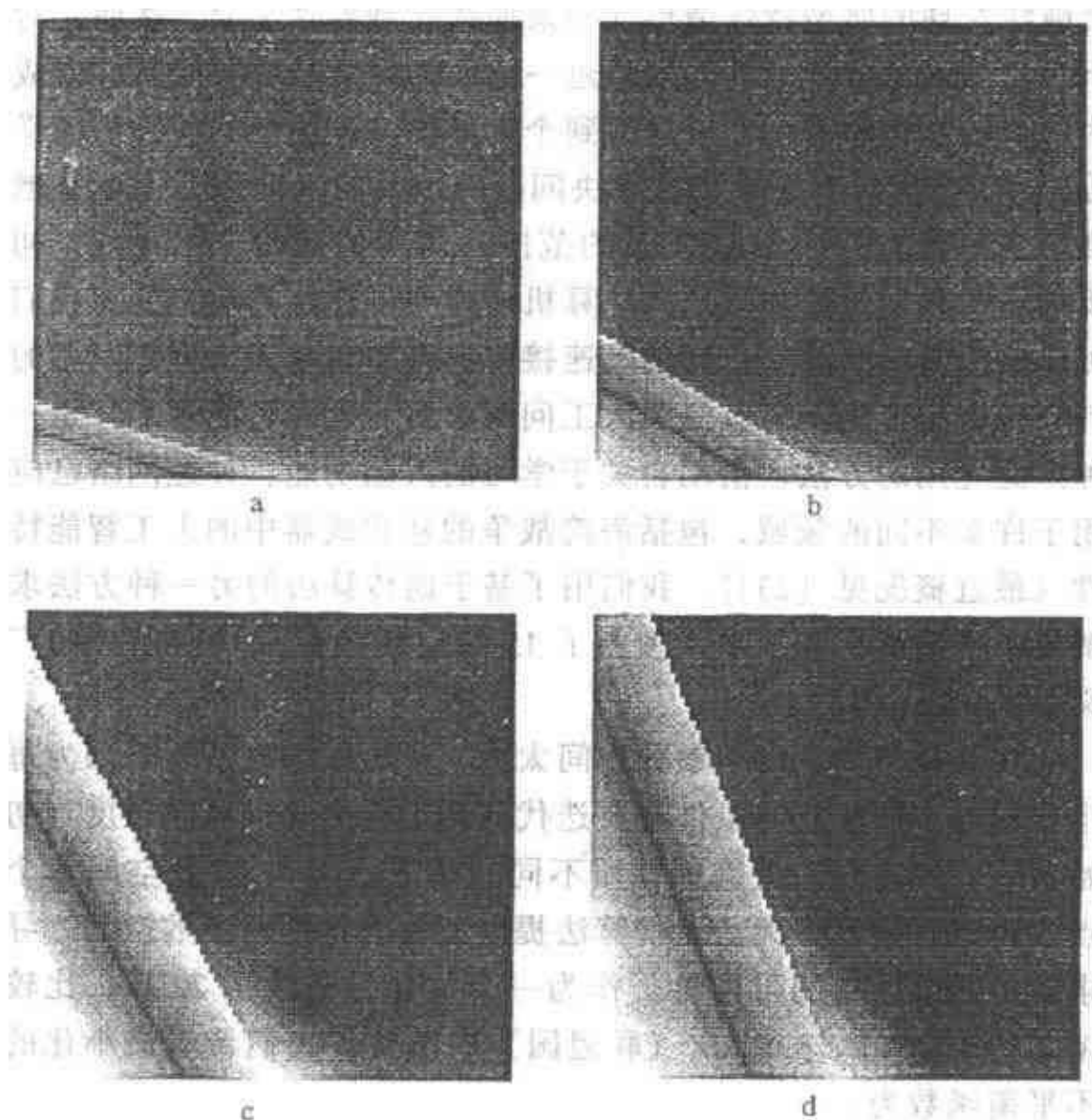


图7 空间参数为 $0 < X_i < 1$ 及 $0 < Z_i < 1$ 的解子域, 对于 (a) $k_{11} = 0.1$, (b) $k_{11} = 0.2$, (c) $k_{11} = 0.6$, 及 (d) $k_{11} = 0.828073$

此对于我们的模型建议用遗传算法一旦找到一个解, 在它的附近容易发现另外的解, 因为系统的光滑性。图7给出这种现象的一例。

B. 混沌的预报和控制

近来用观测到的数据重建非线性动力学模型取得了很大进展 (见如 [14], [21], [16], [22])。假定这些方程等价于产生这些数据的原方程。重建非线性模型可以用来预报所观察的变量的

未来值。计算机模拟与实测的实验结果都指出即使相当复杂的系统，能检测出动态性能的某些确定性成分，从而大大提高预报精度。直接将这个方法用于政治系统或军备竞赛有困难，因为可资利用的历史资料很少，且这种系统极为复杂，永远在演变中^[11]。很长时间规模的全球模型另一极端是在很短时间间隔内处理大量数据。例如，民意测验似乎经常用来评定选民对政府决策的反映。很有可能一些暂时的变量进入统计模型，从而产生影响，例如控制军备谈判。利用这些多成分数据的确定性特征，我们应期望非线性动力学及混沌的进展将用于改进预报（见，例如[53]）。一旦对于我们有价值的系统有了一个好的模型，自然我们能够用我们的知识来控制系统按一定的方式运行：因为混沌系统如此敏感于微小的干扰，必须有可能对小的干扰用很大的倍数放大，按要求的方式来影响系统。快速反馈机构在一定条件下可能实际上使形势恶化，变成新的混沌行为的原点，代替它的方法是利用耗散非线性系统固有的吸引性质，并“引导”其行为到要求的动态特性^([34],[20],[50])。这是用周期信号调协调频接收机的老技术推广到混沌解。

对于一系列模型实例，甚至某些实际实验表明存在最优混沌控制^[34]。它使控制需要的能量极小化，并且比常规方法效率高许多个数量级。这种新技术特别适用于不可能进行反馈的情形。例如，当动力学系统由多个独立或弱耦合的，不能协调运行的单位组成。这种类型的控制与反馈型控制的区别可用一个例子来说明：假设国家提出一项新政策，比如关于毒品，其反馈控制的模拟必须是对系统的观察（识别吸毒者）并强制吸毒者回到要求的行为模式（处罚，复原）。在开环的情形，政策制订应该与现在吸毒者数量的状态无关。政府应进行公开的宣传，教育，奖励符合规范的行为，与个人现在的行为无关。可以想像这样的开环控制是不能静态地工作，它要求很有创造性的，经常变化的努力，吸引作为目标的居民的注意。在许多混沌系统中似乎存在稳定区域，其中外部干扰迅速消除。如果在该系统的稳定域施加外部控

制力（量级不大），其影响可用于诱导原混沌系统进入一个几乎有任何行为的新状态^[36]。政治系统中宣传与大规模控制的联系是显然的，我们愿意指出这种方法与强有力的计算机及信息网络相结合的潜力和危险。

这也不难推想利用这种混沌控制方法于环境问题。例如，在大气中有复杂的形势，温度，压力，水蒸气的不均匀分布。这些变量在一定条件的自组织下，形成飓风或龙卷风。理解这些行为模式的动力学，通过非线性动力学的混沌控制有可能控制这些相互联系的结构产生和消除。

也许有点近于揣测，研究全球气象问题如温室效应，臭氧层损耗，可能获悉挽回人类造成的干扰的负面影响，如二氧化碳排放，仅仅减少这些干扰，已经为时太晚。也许我们将被迫采取积极步骤，如在洋面生成飓风，增强二氧化碳的交换，防止飓风接触地面，将雨云驾御到沙漠化威胁的地区。为了逆转这种趋势，一个可操作的混沌控制理论显然是有价值的。类似地，如果能够建模预告何时何地可能发生地震，我们可以通过小的震动激发这个地震，因此可以确定地震不是意外的，以至有足够时间撤出受威胁的地区。此外，混沌预测算法可能证明是适宜的。

适应性及进化系统

在前述关于军备竞赛的全局性模型讨论中，动力学规律必须明显地结合在模型中。在三国 Richardson 模型的方程中，有一个特别的条件确定谁建立联盟与谁对抗。与上面讲的机器学习密切有关的另一方法，企图达到这些全局性条件作为个别子系统所产生的自组织结构的突发性。它说明在该例中原方程没有与联盟有关的条件。这个总体条件的达到应该是在他/她对各自幸福的个人追求的自然后果（见，例如 [4]）。这个突发的配合行为的理论与模拟的最普遍的意义在研究人造生命的新领域中讨论过^[37]。这一研究的一般结论之一似乎是有价值的和非平庸的进化的实现出现在混沌的边沿，在那里条件既不太严格且强制性的，但也不

是完全无界且无结构的。

新的计算工具，科学可视化/音响化，交互游戏，虚拟现实

上节所讨论的观念一个特殊的应用已经用于新的精巧的计算机游戏，娱乐的非现实的简单模拟。特别是 Maxis 的软件 SimCity 及 SimEarth（基于 Love-Lock 的 Gaia 理论）利用元包自动机性质创建人工环境里的独立单位的群体，它直接反映他们的生活条件。人口的自然行为（用投票选举，所得税，人口迁移等）是惊人地复杂且吸取了我们的经验的主要特征⁶。与多媒体技术相结合，这些模拟可以创建虚拟现实，政治决策在真实世界实现之前有可能预演，包括它的不可逆转的后果（见，例如科威特油田的燃烧）。今天的计算机辅助设计提供从飞机到建筑的新产品的软件模型。赛车制造商首先在计算机上运行（并撞碎）新设计的赛车，因为实际的撞碎花费太大了。飞行员专门在模拟机上训练一般地比部分在实际飞机上训练安全些。各种类型的政治活动类似的计算机模拟对某一问题的响应，可能减少通过政治决策来实现而造成的损失。

与混沌理论发展密切相关的是计算机硬件和软件功能的突破性进展。许多结果实际上是不可能的，如果没有高速，交互图形及科学可视化工具。现在正利用音响效果来表达复杂的，多维数据结构。类似的进展在商业领域也已取得，其决策已日益依据计算机化的数据库及电子图表。在许多平行的进展中我们期望某种收敛和综合：有深远影响的问题的决策必须用这样的方式来表达，即决策者能够直接用电子图表陈述。通常这些是静态的，不包括统计分析和动态模拟。新的电子图表从模拟及可视化要求组成许多特性。因此，我们可以用电子图表阐述 Richardson 模型，因此能够自然地与现有的分析方法及数据处理相结合（见，例如图 8）。

更新近的面向对象的计算工具，例如 NeXT 的 Diagram，使得意向性模型交互积成为网络图，网络节点联结着某一对象。然

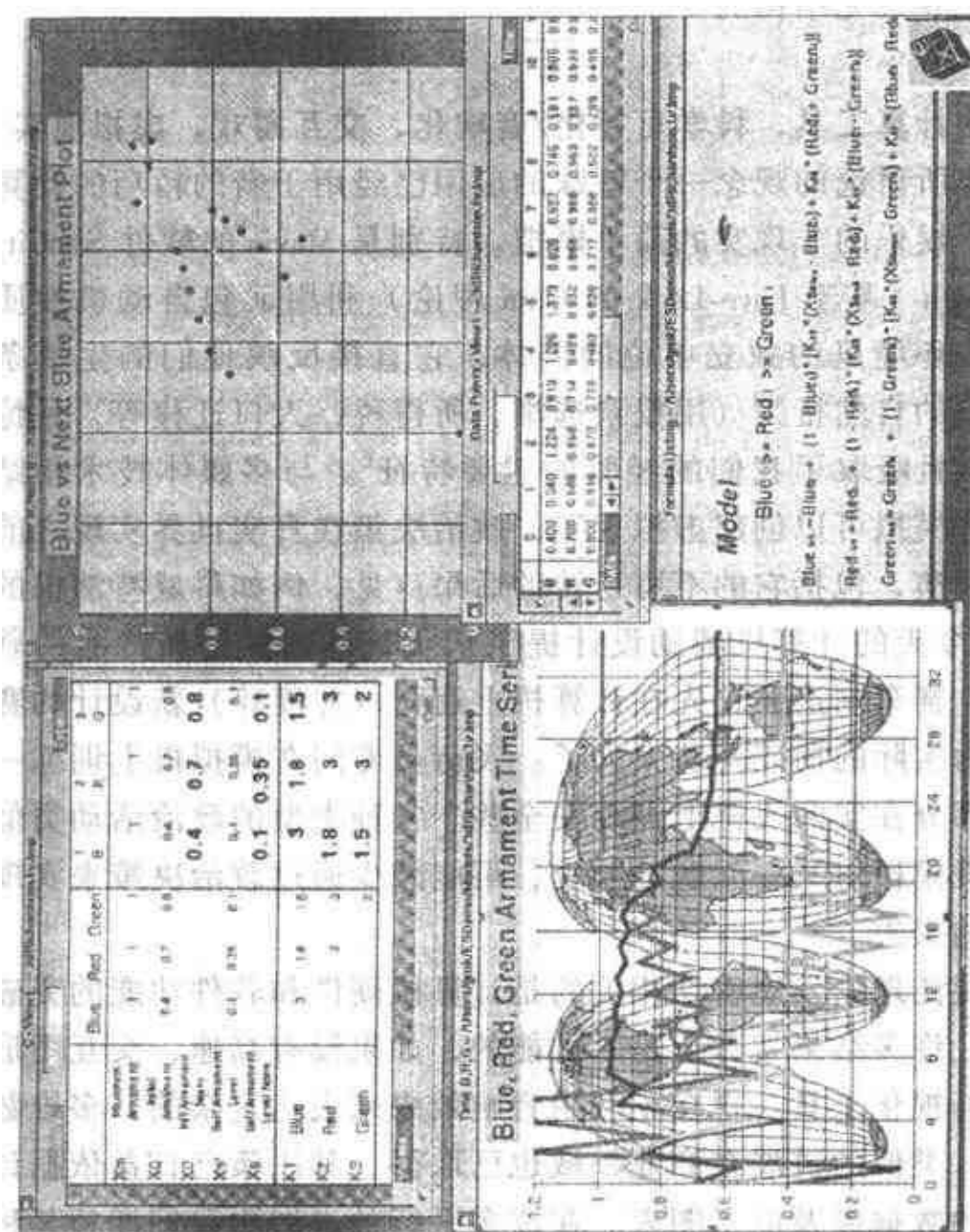


图 8 Richardson 军备竞赛模型的例子

后，就能用文本文件解释节点，也可以是声音，图形，或可视对象。或者用自参考的形式，图形在低层，指示什么因素影响给定的结点。结点也可能是完整的模拟程序，在本机或在远程机上运行。

因此我们可以创建非常复杂的分级结构，既可以是动态的也可以是静态的。用以探索其交互作用的动力学模型既可以是系统的全局也可以是局部。这是与经典的世界模型的基本差别，后者包括几万条程序，一旦编好进行使用，几乎不可能作局部的调

整，例如有些不可预见的因素或发展，像最近东欧的变化。图9给出这种结构的简单例子。在这里，我们引用了联合国的全球环境变化与人类容量规划。以此为基础还结合考虑了有现实价值的某些问题。

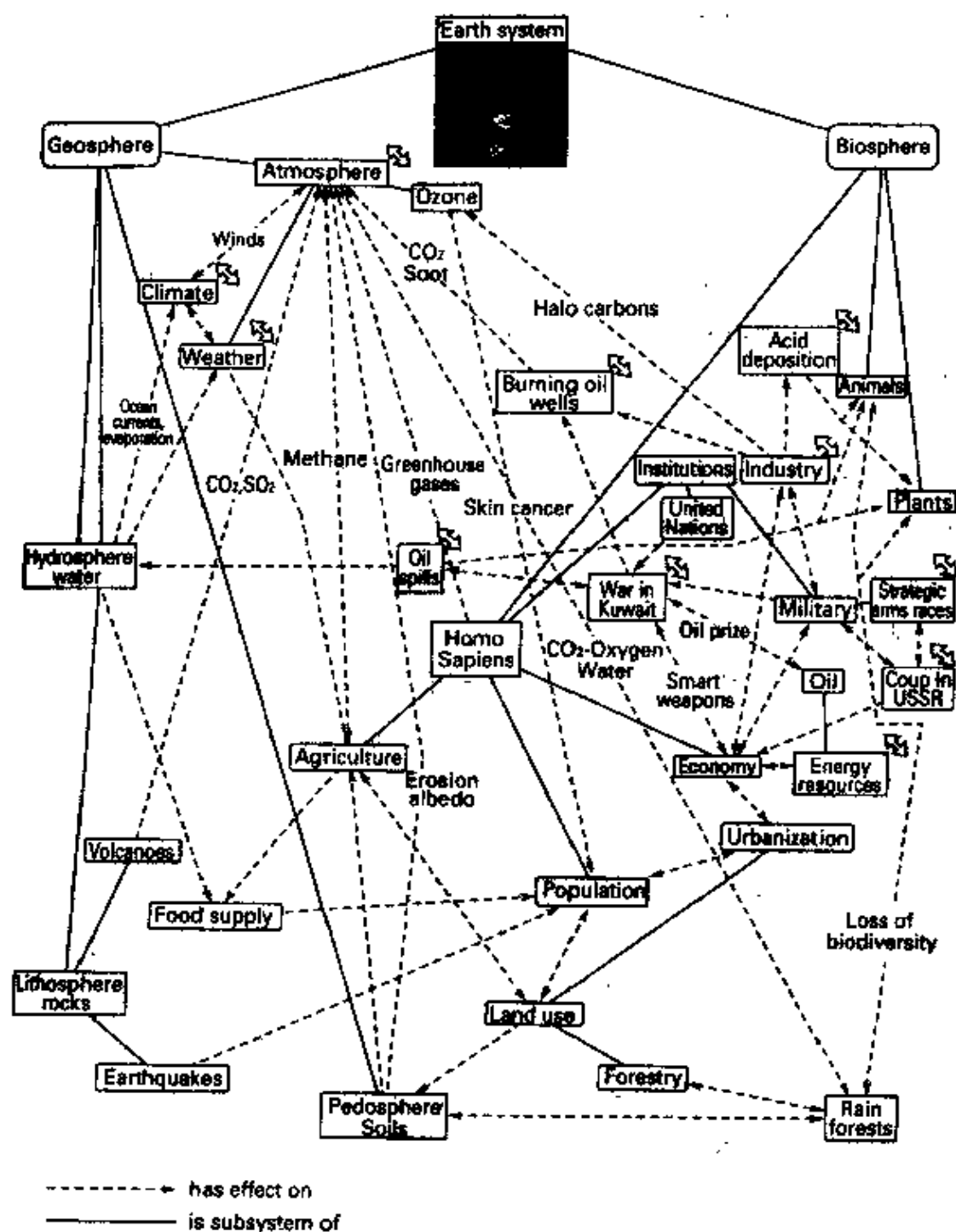


图9 全球环境改变的动态模型(来源:G. Mayer-Kress, 3, 9月1991)

六、讨论与结论：非线性的课题

尽管我们的文章标题相当广泛，事实上只讨论了有限个环境与社会政治问题所固有的非线性提出的数学建模难题。例如，集中注意于用常微分和差分方程表达数学模型，我们策略性地省去一类有影响意义的系统，这类系统中空间变化是重要的。一个对环境问题有显著重要性的例子是流体经过多孔介质，它对先进的石油回收与地下水的污染的建模是必要的。这些系统通常是用偏微分方程建模，这些方程允许时间和空间的自由度连续变化。然而，最近^[32]证明更为离散的方法对于分析这类问题有相当价值，不严格地说，概念上类似于 logistic 离散映射与连续时间 logistic 动力学的对比。

不过，即使在我们选择的有限的课题中，已描述并举例说明许多重要概念，包括某些最近才潜入公众意识的。第一，我们已认识到非线性系统出现分岔并非意外，以至小的参数的变化可以过渡到性质上新形式的解。这次会议讨论的全球温室效应可能是这种现象的一个例子：大气中小的二氧化碳的集中，可能导致全球生态的性质变化。类似地，在分析下列环境现象模型和社会政治问题时都应注意分岔现象：如臭氧层损耗，森林砍伐；又如人口增长，贸易不平衡，技术革新的影响。第二，明显地某些非线性系统的随机行为，由于其对初始条件的强烈敏感及复杂，非周期性，事实上可以用确定性混沌来描述。我们对天气预报的能力基本限制就是确定性混沌的后果之一。第三，我们已经论述典型的非线性系统存在多个吸引盆，且不同的盆之间的边界有不可置信的复杂分形。这表示另一种形式对初始条件的敏感性，其后果是使预报受限制：即使系统的所有长期行为是简单的，对于给定的初始状态（不精确地知道）要确定哪一个吸引子将发生基本上是不可能的。

表面上看，这三点见解似乎相当地不令人高兴，因为好像是给出明显的例子说明对定量理解的能力的限制，即使在有了可靠

模型的情形。但是，就更深层次说，有许多理由可以促进未来的复杂非线性问题的建模。关于我们已知道的局部行动与全球后果的微妙的相互联系和限度引起了高度重视，可能导致面对环境问题更小心和有约束。这个前景基本上是重述我们前面的论点，即模型引导我们的视野关心什么能发生及什么很可能发生。另外，在更为专门的层次上，有几项有希望的进展。某些非线性现象的普遍性，意味着我们有望通过几个简单的范例或模型来理解许多似乎毫不相干的系统。因此，有可能通过所谓智能传输工艺，用某种现象所观察和理解的特性来解释别的现象。另外，事实上确定性混沌是来源于没有随机影响的意义明确的动力学，即我们能够预测短时间的行为。例如提前 10 分钟预报天气，这是任何人打开窗户瞧一下就能做到的。这个新墨西哥山区的笑话，看起来是显然的，但是如果天气真是一阵一阵随机的，即使这样有限的预报也是不可能的。最近有相当进展，用确定性理论开发预报和噪声抑制（见，例如 [22] 及其引文）。这些方法比经典的预报方法对某种系统的行为预报的精度高几个数量级。在 *The Eudæmonic Pie*^[5] 中有更丰富多彩的例子，学过混沌理论的学生，将计算机隐蔽安装在底板上，检测出一系列数据，就可以预测轮子的滚压输出，足够精确地了解系统（只要计算机正常工作）。

面对如此复杂的问题如环境及社会政治舞台，试图量化研究，经过海阔天空的思想翱翔，用基本的共识作为结束也许是适当的。数学模型可以促进我们量化和理解复杂问题各种组成间的因果关系，而现代非线性动力学的分析能力可以加深我们对可能发生的事物的理解，但基本的局限在于这些问题非常的复杂性，固有的不确定性，因此对这些问题的模型必须经常解释为什么可能是，而不是必须是的形像，就像对狄更司的释义。它们永远不能代替人的分析，集体智慧及政治意志。无论如何，与上述属性相匹配，环境和政治社会问题的建模，对于一个新的，更稳定的世界秩序将作出重要贡献。

注 释

1. 人口动力学一词必须从非常普遍的意义来理解：除了生态系统的人口，还可以是化学物质的种类，军备开支的总额等。基本的数学方程并不受内容及其解释的影响。
2. 虽然这个模型看起来在数学上是过于简单化且过时了，但它对社会有巨大的冲击，特别是对经济学的理论思维。它仍然引起热烈讨论如 [52] 所述。
3. 许多计算机的移位运算最右位用零代替，这样就导致虚假的在 $\theta = 0$ 的全局吸引子。
4. 有证据说明人脑本身，为了最清楚地说明世界上的事物，就用了某种混沌动力学性质。
5. 有一个经验法则，人只能自然地记住不超过相当于 7 个十进位数的数字，如美国电话号码。
6. 也许有一天那些计算机游戏将对政治语言和思维有强烈影响，就像今天的神话故事和比喻。

参 考 文 献

- [1] R. H. Abraham, C. Shaw. *Dynamics, the Geometry of Behavior*, vols. 1 - 4. Aerial Press, Santa Cruz, CA (1982 - 1989).
- [2] R. Abraham, A. Keith, M. Koebbe, G. Mayer-Kress. "Double Cusp Models, Public Opinion, and International Security." *Intl. J. Bifurcations and Chaos* 1/2: 417—430.
- [3] A. A. Andronow, A. A. Vitt, and S. E. Khaiken. *Theory of Oscillators*. Pergamon Press, New York (1982).
- [4] R. Axelrod. *The Evolution of Cooperation*. Basic Books, New York (1984).
- [5] T. Bass. *The Eudemonic Pie*. Science of Mind Publishers, Los Angeles (1985).
- [6] P. Berge, Y. Pomeau, and C. Vidal. *L'Ordre dans le chaos*. Hermann, Paris (1984), eng. trans. Wiley (1986).

- [7] S. J. Brams. *Superpower Games*. Yale University Press (1985).
- [8] D. K. Campbell. "Nonlinear Science: from paradigms to Practicalities." 218 – 262. In: *From Cardinals to Chaos: Reflections on the Life and Legacy of Stanislaw Ulam*. Cambridge University Press (1989).
- [9] D. K. Campbell. "Chaos: Chto Delat?" *Nuc. Phys. B (Proc. Suppl.)* 2: 541 – 564 (1987).
- [10] R. Chervin. NCAR, private communication.
- [11] N. Choucri, T. W. Robinson (eds.). *Forecasting in International Relations*. Freeman and Co., San Francisco (1978).
- [12] P. Collet, J. -P. Eckmann. *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*. Birkhäuser, Boston (1980).
- [13] S. A. Colgate, E. A. Stanley, J. M. Hyman, C. R. Qualls, and S. P. Layne. "AIDS and a Risk-Based Model." *Los Alamos Science* 18: 2 – 39 (1989).
- [14] J. Cremers, A. Hübler. "Construction of Differential Equations from Experimental Data." *Z. Naturforsch.* 42a: 797 – 802 (1987).
- [15] J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, N. H. Packard, and R. S. Shaw. "Chaos." *Scientific American* 46 – 57 (1987).
- [16] J. P. Crutchfield, B. S. McNamara. "Equations of Motion from a Data Series." *Complex Systems* 1: 417 – 452 (1987).
- [17] G. Duffing. *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz*. F. Vieweg, Braunschweig (1918).
- [18] J. -P. Eckmann. "Roads to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems." *Rev. Mod. Phys.* 52: 643 – 654 (1981).
- [19] L. Edelstein-Keshet. *Mathematical Models in Biology*. The Random House / Birkhäuser Mathematics Series, New York (1988).
- [20] T. Eisenhammer, A. Hübler, G. Mayer-kress, and P. Milonni. "Resonant Stimulation of a Conservative Nonlinear Oscillator: Classical and Quantum-mechanical Calculations." LA-UR-90-1911 (1990).
- [21] J. D. Farmer, J. Sidorovich. "Predicting Chaotic Time Series." *Phys. Rev. Lett.* 59: 845 – 848 (1987).
- [22] J. D. Farmer, J. Sidorovich. "Exploiting Chaos to Predict the Future." In: *Evolution, Learning, and Cognition*, Y. C. Lee (ed.), World Scientific

- Press, 277 (1988).
- [23] J. D. Farmer. "A Rosetta Stone of Connectionism." *Physica* 42D: 153 – 187 (1990).
 - [24] M. J. Feigenbaum. "Universal Behavior in Nonlinear Systems." *Physica* 7D: 16 – 39, (1983).
 - [25] W. J. Freeman, C. A. Skarda. "How the Brain Makes Chaos in Order to Make Sense of the World." *Behavioral and Brain Sciences* 10/2: 161 – 195 (1987).
 - [26] S. Forrest, G. Mayer-Kress. "Using Genetic Algorithms in Nonlinear Dynamical Systems and International Security Models." In: *The Genetic Algorithms Handbook*, L. Davis, (ed.), Van Nostrand Reinhold, New York (1991).
 - [27] J. A. Forrester. *World Dynamics*. Wright-Allen Press, Cambridge, MA (1971).
 - [28] J. Gleick. *Chaos: The Making of a New Science*. Viking Penguin, New York (1987).
 - [29] C. Grebogi, E. Ott, and J. Yorke. "Crises, Sudden Changes in Chaotic Attractors and Transient Chaos." *Physica* 7D: 181 (1983).
 - [30] S. Grossmann, G. Mayer-Kress. "The Role of Chaotic Dynamics in Arms Race Models." *Nature* 337: 701 – 704 (1989).
 - [31] H. Haken. *Advanced Synergetics*. Springer. Berlin (1983).
 - [32] B. Hasslacher. "Discrete Fluids." In: *From Cardinals to Chaos: Reflections on the Life and Legacy of Stanislaw Ulam*. Cambridge Univ. Press, New York (1989).
 - [33] M. W. Hirsch, S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press, New York (1974).
 - [34] A. Hübler, E. Lüscher. "Resonant Stimulation and Control of Nonlinear Oscillators." *Naturwissenschaften* 76: 67 (1989).
 - [35] M. D. Intriligator, D. L. Brito. "Can Arms Races Lead to the Outbreak of War?" *J. of Conflict Resolution* 28: 63 – 83 (1984).
 - [36] E. A. Jackson, A. Hubler. *Physica* 44D: 407 – 420 (1990).
 - [37] C. G. Langton. *Artificial Life*. Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity, vol. VI, Addison-Wesley, Redwood City (1989).
 - [38] A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman. *Regular and Stochastic Motion*.

Springer-Verlag, New York (1982).

- [39] E. Lorenz. "Deterministic Nonperiodic flow." *J. Atmos. Sci.* 20: 130 – 141 (1963).
- [40] A. J. Lotka. *Elements of Physical Biology*. Baltimore (1925).
- [41] T. R. Malthus. *An Essay on the Principle of Population, as It Affects the Future Improvement of Society, with Remarks on the Speculations of Mr. Godwin, M. Condorcet, and Other Writers*. Published anonymously, London (1798).
- [42] B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman (1982).
- [43] R. M. May. "Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics." *Nature* 261: 459 – 467 (1976).
- [44] G. Mayer-Kress, (ed.). *Dimensions and Entropies in Chaotic Systems*. Springer Series in Synergetics, vol. 32, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg (1986).
- [45] G. Mayer-Kress, H. Haken. "The Influence of Noise on the Logistic System." *J. Stat. Phys.* 26: 149 (1981).
- [46] G. Mayer-Kress, H. Haken. "Attractors of Convex Maps with Positive Schwarzian Derivative in the Presence of Noise." *Physica* 10D: 329 – 339 (1984).
- [47] G. Mayer-Kress. "Fractals." *Physics Bulletin*, September (1988).
- [48] G. Mayer-Kress, H. Haken. "An Explicit Construction of a Class of Suspensions and Autonomous Differential Equations for Diffeomorphisms in the Plane." *Commun. Math. Phys.* 111: 63 – 74 (1987).
- [49] G. Mayer-Kress. "A Nonlinear Dynamical Systems Approach to International Security." In: *The Ubiquity of Chaos*. S. Krasner (ed.), LA-UR-89-1355 (1989).
- [50] G. Mayer-Kress, A. Hübler. "Time Evolution of Local Complexity Measures and Aperiodic Perturbations of Nonlinear Dynamical Systems." In: *Quantitative Measures of Complex Dynamical Systems*. N. B. Abraham (ed.), Plenum, New York (1989).
- [51] C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke. "Crises, Sudden Changes in Chaotic Attractors and Transient Chaos." *Physica* 7D: 181 (1983).
- [52] P. Passel. "Economists Start to Fret Again about Population." *New York Times*, 18 December 1990.

- [53] N. H. Packard. "A Genetic Learning Algorithm for the Analysis of Complex Data." *Complex Systems* 4: 543 – 572 (1990).
- [54] J. Nicolis, G. Mayer-Kress, and G. Haubs. "Non-Uniform Chaotic Dynamics with Implications to Information Processing." *Z. Naturforsch.* 38a: 1157 – 1169 (1983).
- [55] J. A. Paulos. *Innumeracy: Mathematical Illiteracy and Its Consequences*. Hill and Wang, New York (1988).
- [56] H. Poincaré. *Science et Methode. Bibliotheque Scientifique* (1908). Eng. trans. by F. Maitland, Dover Publications. New York (1952).
- [57] T. Poston, I. Stewart. *Catastrophe Theory and Its Applications*. Pitman, London (1978).
- [58] L. F. Richardson. *Arms and Insecurity*. Boxwood, Pittsburgh (1960).
- [59] D. Ruelle. *Chaos in the Soft Sciences*. Preprint IHES/P/90/12.
- [60] A. Saperstein. "Chaos – A Model for the Outbreak of War." *Nature* 309: 303 – 305 (1984).
- [61] A. Saperstein, G. Mayer-Kress. "A Nonlinear Dynamical Model of the Impact of SDI on the Arms Race." *J. Conflict Resolution* 32: 636 – 670 (1988).
- [62] C. Sayers. "Chaos and the Business Cycle." In: *The Ubiquity of Chaos*. S. Krasner (ed.), AAAS, Washington, D. C. (1990), 115 – 125.
- [63] H. G. Schuster. *Deterministic Chaos, an Introduction*. Physik-Verlag, Weinheim, (1984).
- [64] R. S. Shaw. *The Dripping Faucet as a Model Chaotic System*. Aerial Press, Santa Cruz (1983).
- [65] S. Smale. "Differentiable Dynamical Systems." *BAMS* 73: 747 – 817 (1967).
- [66] C. Sparrow. *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*. Springer-Verlag, Applied Mathematical Sciences Series, vol. 41, New York (1982).
- [67] R. Thom. *Structural Stability and Morphogenesis*. Addison Wesley, Reading, MA (1975).
- [68] D'Arcy Wentworth Thompson. *On Growth and Form*, vol. I. 2nd edn. Cambridge University Press, 142 – 159 (1959).

- [69] G. K. Vallos. "El Niño: A Chaotic Dynamical System." *Science* 232, 243 (1986).
- [70] B. Van der Pol. "Forced Oscillations in a Circuit with Nonlinear Resistance (Receptance with Reactive Triode)." *London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag.* 3: 65 - 80 (1927).
- [71] P. F. Verhulst. *Mem. Acad. Roy. Bruxelles* 18: 1 (1844).
- [72] V. Volterra. *Lecons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*. Marcel Brélot, ed. Paris (1931).
- [73] V. Volterra. *Les associations biologiques au point de vue mathématique*. Paris, (1935).
- [74] K. Waltz. *Theory of International Politics*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA (1979).

Arnold J. Mandell 和 Karen A. Selz

一、引言

1982年在 Schloss Elman 举办的 Hermann Hakens 教授的协作者 (Synergetic) 会议上, 第一作者向 Doyne Farmer, Gottfried Mayer-Kress 和 Agnes Babloyantz 提出, 脑电图记录的动物和人大脑的脑电压波动 (EEG) 好像是一种“奇怪的吸引子”(见本次会议报道, Mayer-Kress, 1986)。我们的实验室过去已开始重建相空间, 并按时间序列对各种可观察到的神经生理现象的复杂性进行测量, 而且把我们的发现与常规的频(功率)谱进行比较 (Mandell 等, 1982)。这些测量是通过药理在宽的时间尺度范围内, 对神经系统进行干扰来实行的, 测量中的变化具有相似性, 这提示奇怪吸引子的自然分形结构可能是一种动态机制, 通过具有特征性时间的网状层级, 完成大脑机制的整合。

混沌的结构是否解释了为什么神经转换酶机制在几微秒内, 神经元机制在几毫秒内, 突触机制在几秒内, 适应调节在几分钟内, 而行为的改变则在几小时、几天, 几周或是几月内可以得以协调 (Mandell 等, 1981, 1983)? 通过同宿 (homoclinic) 交叉产生的整体层级马蹄形级联是一种确定性的动力学的候选方法, 它能够产生“放大”不变量, 自仿射的分形轨道, 以致可以想象出大脑时间层级所代表的尺寸水平。显然, 各种形式分形的细胞膜和神经元引出的由 Hodgkin-Huxley 方程式表现出具有间隙与混沌动力学两者的参数空间 (Carpenter, 1981; Rinzel, 1987; Aihara 和

Matsnmoto, 1987; Selz 和 Mandell, 1991)。

奇怪吸引子脑电波“诊断”与我们当时采用的另一种假说相一致，为什么许多在生物动力系统中的疾病通过失去其复杂性来表现自己 (Mandell, 1981, Goldberger 等, 1986; Mandell, 1987)。一种确定性的产生信息的数学对象，如奇怪吸引子，与正常的脑电波和通过大脑提供信息模式的形成，与应用这种正熵的结果 (positive entropy) 相一致，看来是十分自然的。

从那时起，Babloyantz 和她的同事们 (1986, 1988) 已经证实癫痫和一种具有痴呆表现的遗传性大脑变性与脑电图信号复杂性的预期降低相关。按照当代 Renyi 的说法，我们把他们的相关维数 (correlation dimension) 作为熵的第三要素， D_2 (位于 D_0 和 D_1 之后)，此时并没有进一步给它下定义。用这种方法测定脑电图的其他研究似乎支持这样一种概念，复杂性的减少与大脑的警觉性 (alertness) 和智力表现的降低有关。例如，睡眠越深，测量的脑电图复杂性越低 (Babloyantz 等, 1985; Roschke 和 Basar, 1989; Roschke 和 Aldenhoff, 1991)。另一方面，Rapp 等 (1989) 对中枢神经系统功能的研究发现在一些从事再认识和对新鲜事物反应的认知工作的个体中，脑电图的 D_2 状态短暂地增高。

如果使用单一值降解技术，脑电图的 D_2 值有一个范围，一般来说是较低的。例如，在“放松、觉醒”状态下， D_2 一般从较小的指数 3 至 6+。十分清楚这些数值在转换成绝对值时没有什么意义，但在测定—处理—再测定的实验设计中可以作为一种复杂性的标记。最近一个对比应用的例子是发现了微大于 4 的 D_2 值，在从闭眼到睁眼的转变中 D_2 值增加，而在老年人中减小，在有 Alzheimer 痴呆的老年人中则减小更明显 (Prichard 等, 1991)。某些绝对值可能有特殊的意义。下面我们提示维数 n 是一种在脑电图动力学 T^n 空间中的估计值，并认为大脑半球脑电图信号的奇怪吸引子理论不是一种很好的猜想。

用现行标准的嵌入—相关维数算法，从脑电图推断大脑状态，这些经验已取得了成功，这些算法产生于 Smale 学校 (1967)

的双曲奇怪吸引子理论，Ornstein (1974) 的熵同构理论以及 Mandelbrot (1977) 的分形 (Parieto-Levy) 统计测量理论。我们应该试问这些技术是否增加了我们对脑电图的理解。只有当我们用已知的脑电图知识开始进一步理解脑电图神经生物机制的奇怪吸引子的含义时，另一种脑电图动力理论， T^n 上的 n 维拟周期模式，才会出现。用当今的技术，此种理论不可能从奇怪吸引子理论分离开来。

关于合适的脑电图理论模型的争论集中在那些由 Ruelle 和 Takens (1971)，Newhouse, Ruelle 和 Takens (1978) 提出的水动力学湍流理论上。这些理论是从原始的 Landau-Hopf 理论发展而来的。Landau-Hopf 途径是随着 Reynold 应力 (应为雷诺数，译者注) 增加，在湍流产生时，在 T^n 上， $n \rightarrow \infty$ ，产生可数的无穷多个不可公约的频率。改进的 Newhouse Ruelle-Takens 途径认为在 $n \geq 4$ 时，稳定性问题的一般性是这样的，对 $n \geq 3$ 在所有拟周期解附近，混沌解是稠密的，他们在结构上是稳定的 (与拟周期轨道很容易干扰模式锁定，或干扰混沌解形成对照)。

长期以来 n 维环面的一般性及结构稳定性问题一直是数学深层领域中的理论性问题，但令人感兴趣的是，应用两个偶合的，周期驱动的 Van der Pol 系统 (Battelino 等，1989)，在实验性湍流 (Gollub 和 Benson, 1980) 及数字模拟中都发现了“大量”的 3 维环面。大脑中有三个空间 - 功能对称：前后 (未来对过去，印象对视觉)，右左 (分析代数对几何性直觉) 以及上下神经轴 (复杂性多对少)。这三个对称按特有模式随时间 [同频] 振动，使得对偶然的分支行为问题与单从时间角度研究该问题有所不同。

大脑的空间对称性使大脑具有 T^n 的非一般的稳定性，更有可能 $n \geq 3$ (Golubitsky 等，1988)。在对称条件下，测量零的参数空间现象能产生一些阳性结果 (Knoblock, 1990)。但以同一方式， $S(O2)$ 能否预防 T^2 锁住模式仍有争议，通过稳定模式锁定转换性预防双曲线 (hyperbolicity)，2 维环面的循环对称性 (Rand,

1982), 大脑至少具有 $O(3)$ 对称性及两个独立旋转, 可以预防锁定模式, 允许 T^4 拟周期模式在时间上显示复杂性。J. D. Crawford (私人通信) 推测, 一般来说, $O(n)$ 对称能通过 $n-1$ 独立性对称旋转转化来预防 T^{n+1} 模式锁定。流体力学中的许多非一般性分岔现象都可以用这种方式加以解释 (Crawford 和 Knoblock, 1991)。最初 Ruelle (1973) 认为 Hopf 分岔系统中的 $SO(2)$ 对称性能产生 Taylor-Couette 流体旋转波。与此方式类似的是, Hamiltonian 系统中的分离积分的数量决定了其大小, 而在耗散动力系统中分离的对称性可以决定独立频率的数量 (n), 这一点可在拟周期系统中 T^n 观察到。

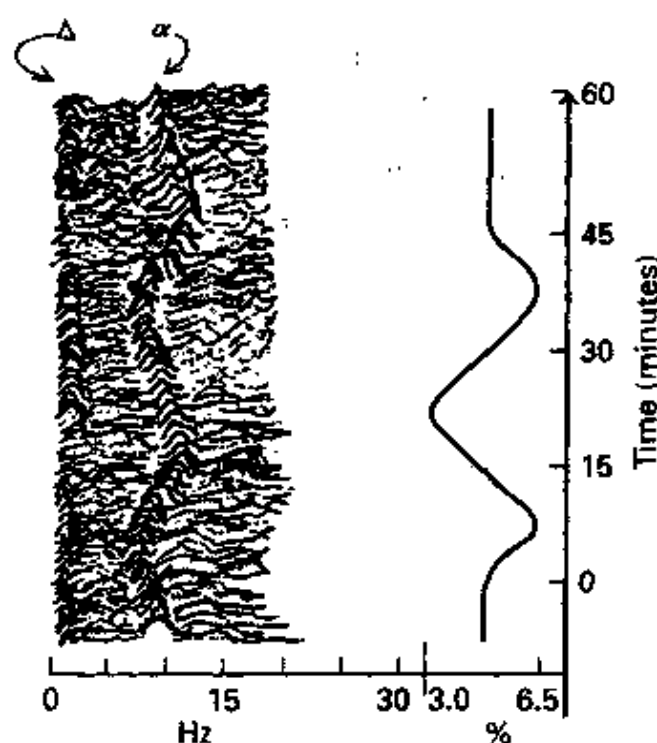


图 1 氟烷的浓度变化使脑电图优势 α 模式的功率谱频率位置发生变化

如图 1 一样 (Nunez 和 Katznelson, 1981) 的结果使我们好奇去探索另外一种有关 EEG 奇怪吸引子的理论, 这一理论能够阐明氟烷的浓度变化是如何使 EEG 中优势 α -模式的能量光谱频率位置发生平稳地移动。这与其说是旋转数 $R(f)$ 对 f (一种 T^2 对 f 的同形态 (homeomorphic) 下降: $S^1 \rightarrow S^1$) 的平稳依赖性, 倒不如

说是奇怪吸引子的参数变化 (Herman, 1979)。在 Couette 循环系统中, ω_1/ω_2 是 Reynold 数的一个平稳功能, T^2 分界条件的循环对称使得拟周期的频率内容能得到持续调整成为可能 (Gorman 和 Swinney, 1982), 但对于大脑的 $O(3)$ 对称能否使 EEG 中的 T^4 平衡成为可能仍有争议。

二、一种整体的非线性振子的脑电图: 拟周期的、 Φ -比例的、功率谱宽带模式

脑电图的奥秘之一是慢节律 (按物理标准) 的来源, 这种慢节律变化于 $1 \sim 50 + \text{Hz}$ 之间。最具特征性的频率带及与它们相关的知觉状态是: Δ 波, $< 4\text{Hz}$, 深睡眠或昏迷; θ 波, $4 \sim 7\text{Hz}$, 白天做梦和/或浅睡眠, 在有行为失常的儿童和年轻人中更显著; α 波, $10 \sim 12\text{Hz}$, 放松, 闭眼, 觉醒, α 波可以被注意力增高而打断; β 波, $18 \sim 30\text{Hz}$, 非常敏感, 易唤醒或焦虑; γ 波, $35 \sim 50\text{Hz}$, 即所谓的 40Hz 周期, 这种周期是短暂, 被认为与知觉功能空间相关性有关。这些节律在粗略的记录中不明显, 但经具有自动相关功能的快速 Fourier 转换后能产生明显的节律; 后者称之为频率 (功率) 谱, 在这里能清楚地证明具有宽带模式。在描述正常脑电图时, 应该注意到正常变量称为“平坦脑电图” (Pine 和 Pine, 1953), 当它被放大时能分析低振幅行为, 从而揭示异常的快速频率。这与非线性系统的幅频耦合信号相一致。

这些从人类脑电图 60 年来研究得到的“事实”从未被怀疑过, 然而也从未被完全理解。奇怪吸引子理论 (见在复杂系统中正常模式分析 Haken 的应用, Eckmann 和 Ruelle 的讨论, 1985) 已经对用多元宽带模式的频谱常规分析法提出了很多严肃的问题。这包括把 Fourier 序列应用于拟设的线形, 附加超强加方式的特征频率的分解。在 Haken 的分析中, 这等同于对正常模式特征函数的计算。这位奇怪吸引子理论家认为这些等级的多元宽带模式功率谱是另一种方式。

“混沌学校”认为这些宽带模式（在 Rossler, Hénon 和 Lorenz 方程的频率谱中可发现，奇怪或相似于奇怪吸引子）代表不稳定的固定点和/或扩展和折叠动力系统非周期轨道。它们是 Hopf 后的整体分支现象，是不能分解的。Ruelle (1989) 认为功率谱的复杂单一性是动力系统的“共振”，并建议它们与时间相关功能的降解属性相关，即它们的“混合”特性。

尽管与奇怪吸引子假设（这儿归纳出的吸引子是由不稳定固定点的存在，初始状态的分离以及相空间非降解性来定义的）相一致，然而，十分明显用整体不变量测量，如 Lyapunov 特征指数或 Renyi 维数熵，就丢失了这种特征性的模式结构。用 D_2 的测量加已知的具有特征宽带模式主导的系统性变化的脑电图状态。 D_2 的计算能有另一种不同方法去计算平均频率吗？例如，关于睡眠状态的频率带（把脑电图记录仅作为部分标准的分级）：

D_2	EEG 模式
6.51 ± 0.43	下降阶段 I 12 ~ 14Hz
5.67 ± 0.45	阶段 II 8 ~ 10Hz
4.69 ± 0.41	阶段 III 4 ~ 6Hz
4.25 ± 0.23	阶段 IV 1 ~ 3Hz

正如可以预期的，主导宽带模式的频率越低，相关维数（复合性）越低。“维数” D_2 的变化不同于统计学上的平滑曲线。更正式地说，与 Lipschitz 常数 k 相似的变化， k 定义在 x, y 空间（关于 x ），使得 $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k \|x - y\|$ ，如果 f 的导数具有固定的 $t \equiv D_x f(t, x)$ ，以及对所有的 $y \in \mathbb{R}^n$ ， $\|D_x f(t, x) y\| \leq k \|y\|$ ，那么 f 是 Lipschitz 常数 k 。这种属性也被认为是 Holder 连续性。脑电图二维曲线的鉴别增强与 D_2 的降低有关。非常有趣的是，这种信号的区别性增强与大脑功能的复杂性和多样性能力的降低相关。假如有人把脑电图的 Δ 、 θ 、 α 、 β 、 γ 模式认为是适当的话，并注意到 $\Delta + \theta \approx \alpha$ ， $\theta + \alpha \approx \beta$ ， $\alpha + \beta \approx \gamma$ …，我们可以按 Fibonacci 数量分析这种附加的有比例序列数。模式 $1\omega_1$ 与模式 $2\omega_2$ 的比率， $\omega_2/\omega_1 \approx \Phi = 1.618 \dots$ ($\Phi^{-1} = \phi =$

0.618...)。脑电图拓扑动力学机制有这种比例关系意味着这种系统是 n 维环面拟周期模式，是对抗诱发紊乱（频率共振）锁定模式（Arnold, 1983）的最稳定的状态。我们知道它是一种模式锁定，固定点或周期状态，与癫痫、震颤麻痹综合征（Selz 和 Mandell, 1991）等神经系统疾病相关。这种 Φ 比例，有两种紧密相关的有机生物性问题：（1）比例范围是如何导致单一 Φ 值的？（2）对被称之为拟周期性的 n 维环面的等级频率的稳定性（存在性）来说， Φ - 范围意味着什么？这两个问题有很广泛的数学背景，我们将要简单回顾一下。

用最简单的关于比例的守恒假设，如当把 x 的正常范围， $[0, 1]$ 分成更小的 s ，更大的 l ，假如 $x \in [0, 1] = s/l$ ，那么

$$s/l = l/(s + l) = 1/(1 + x) \quad (1)$$

收缩操纵子 $O(x)$ 得到一个比例关系的固定点 x^* (Dalzell theorem)，那么

$$O(x) = \| 1/(1 + x) - \phi \| \leq \| x - \phi \| \quad (2)$$

其中 $x^* = \phi = \Phi^{-1}$ 使关系式相等，且 $O(x) = 0$ 。

脑电图的主导模式可能是具有不可通约的频率比例 $\omega_2/\omega_1 \approx \Phi$ (Arnold, 1962, 1983; Moser, 1968) 的拟周期，而不是具有对最初状态有敏感性的“噪音周期”系统 (Lorenz, 1980)，包括稳定性问题，正测度上的结构不稳定性的动力学问题与那些持续存在的紊乱状态的对比（结构上的稳定）。奇怪吸引子的双曲稳定性理论是众所周知的，但另一种拟周期轨道是否存在？如果通过 $f: S^1 \rightarrow S^1$ ，借助于圆的保留方向的微分同胚 (diffeomorphism)，作为截面，研究 T^n ， $n = 2$ ，可以知道仅当 $\bar{\omega} = \omega_2/\omega_1$ 是可通约时（如一个模式锁定的圈数）， f 在结构上是稳定的（拓扑等价）。另一方面，在真实的系统中有理数 $\bar{\omega}$ s 具有零测度，使得它们在精确计算的系统中不可能发生。考虑到有理数 $\bar{\omega}$ s 的相对稳定性，这个问题往往在真实系统中可以得到解决（易感于统计学上的现实性紊乱）。

Denjoy 定理认为假如 $\bar{\omega}$ 是无理数，那么它能通过 f 的小变化

而转化成靠近的有理数 $\bar{w}$ ，每一个具有无理数 $\bar{w}$ 的微分同胚 f 在结构上是不稳定的。我们知道固定点（周期性）的解与大脑的紊乱有关，如癫痫脑电图的周期性放电，这使得这些结构稳定的方式与正常脑功能不相符。难道“奇怪吸引子”是惟一的选择吗？

验证拟周期解与可逆性，即一般形式的非耗散方程：

$$d^2x_i/dt^2 = F_i(x), F \text{ 依赖于 } (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3)$$

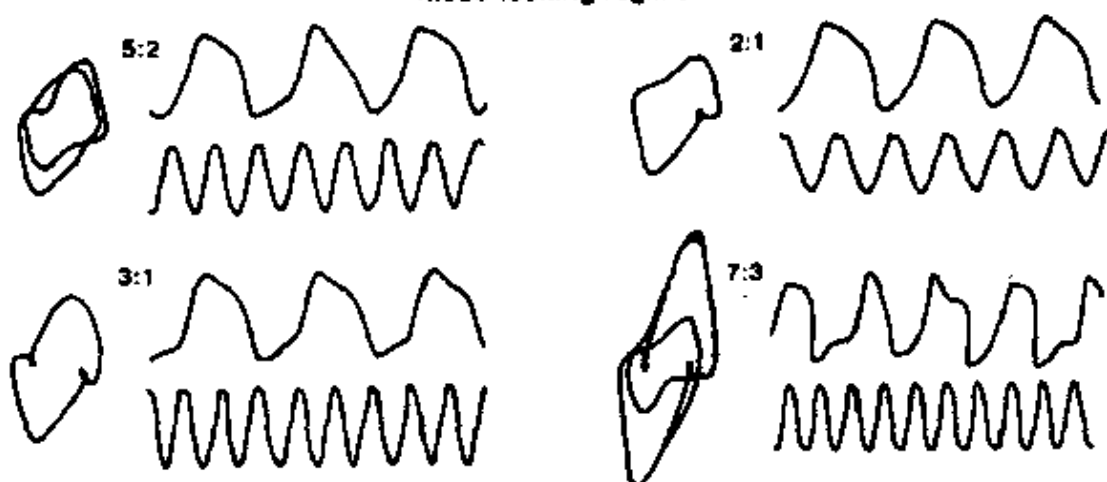
因此，假如 $x(t)$ 是一种解，那么 $x(-t)$ 也是一种解，它的存在性，由 Arnold (1962) 和 Moser (1968) 为经典动力学 Hamilton's 方程而报道的。Moser's 状态包括对一些 Fourier 系数和一个高阶可微性的限制拓扑结构、在 $r \geq 5$ 时 C^r 拓扑结构，而 Arnold 状态与脑电图的拟周期方式问题更相关，这包括远离于有理数的无理数 $\bar{w}$ s 的选择，也就是说与模式锁定最远。应用 Euclidean 算法，能显示出无理数的无穷连分数展开式的偏导数是最小的整数。用连分数 $\bar{w}$ 的展开式， $1/1 + s/1$ ($1/1 + x$) 能在最初见到，Arnold 用一个有限的论据去选择具有 $[1, 1, 1, \dots]$ 展开式的 $\bar{w} = \Phi$ ，并且证明具有有理数独立频率的拟周期解能形成一个正测度集。这些集合不是开集和稠密的，而是复杂的 Canter 数集。事实上，与 Newhouse (1974) 对微分同胚的研究相一致，存在强迫频率振幅的无穷多值，这些频率有稳定的周期（混合于引发拟周期和混沌解的参数值）。

然而，这些关于 T^n 的拟周期性的证据包括 Hamiltonian 力学的无耗散，在强迫 - 耗散系统中的正测度集合，如 Cartwright-Littlewood-Van der Pol 系统 (Mandell 等, 1987) (图 2) 显示出拟周期行为的大量参数区域 (无彩色)，伴随 (阴影区) “Arnold 舌头”，指示模式锁定行为的参数区域。这些研究是在配有振荡监视系统的 EAI-680 模拟计算机上做的。系统性参数空间探索包括用精细的个人计算机的信号数字化和在 Sun 3-160 工作站上的统计学评价。

图 3 描绘了在拟周期解的区域中，这种非自主的、周期性的强迫非线性微分方程式的吸引子。 x'/x (图 2) 的相图看起来像是具有无理旋转数的拟周期轨道，覆盖在流形上使环面上的轨道稠

C/L Van der Pol Equation $\ddot{x} - r(1 - x^2)\dot{x} + x = a\lambda r \cos \lambda t$

Mode-locking regimes



Arnol'd Tongues

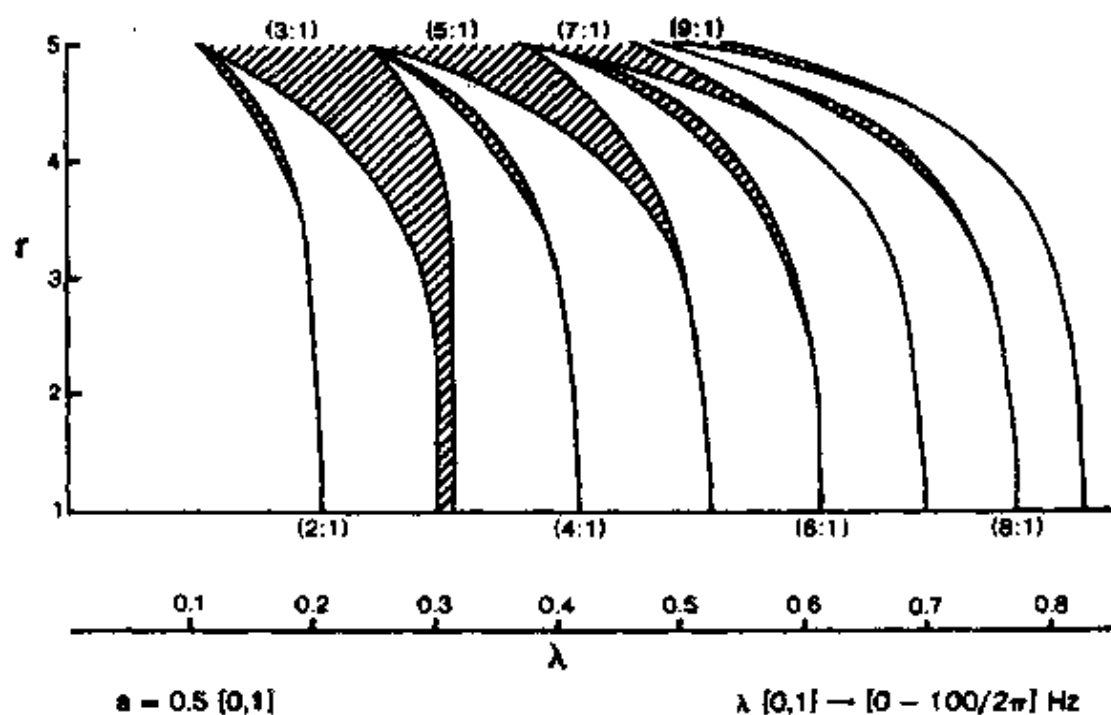


图2 在一些强迫 - 耗散系统的正测度集合显示在“Arnold 舌头”中存在大量的拟周期特性的参数区域

密。围绕两个鞍点的缓慢下降使轨道覆盖的不均匀性在 $x' = 0$ 时的两个区域增大，与增加的 Sinai - Bowen - Ruelle 方法（时间依赖）不一致。

具有 $\bar{\omega}$ 无理数与那些“非周期”不同的拟周期系统频率（功率）谱的形态学上的区别，在真实系统中具有动力学的复杂

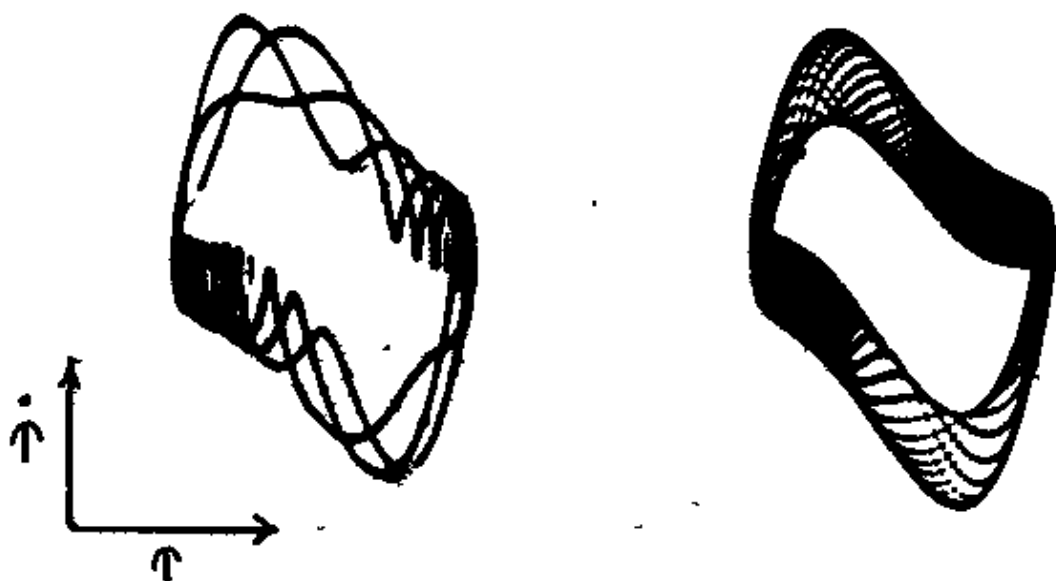


图3 在拟周期解区域中非自治的、周期性的强迫非线性微分方程的吸引子

的单一性的混沌动力学，是非常重要的。假如这个信号是独立周期项的总和， $\sum x_i(\omega_i t)$ ，那么甚至在一个噪声系统中，也能找到主要的 ω_i 和他们的谐波。更可能的是，信号 $x(t)$ ，是非线性地依赖于变量 $\omega_i t$ 的周期函数，并且假如这些与无理数相关，正如我们猜想的与脑电图的情况一样，他们会在正的实数中形成一个稠密集。这并不意味着频谱是非常平滑、连续的，尽管我们将要在下面看到，但是它是以宽带和小（有限）数量的 δ -函数为特征的，能反映占主导的频率含量。可能的话，假如这个系统包括三角函数的积与和，根据基础动力学，这种模式内容不会很容易被人理解。

可以推测在这种状态下是精确的，正熵扩张率和再生率的测度将用来区别拟周期（熵 = 0）和奇怪吸引子方式，但像振荡图谱定性显示一样，在吸引子之间前后摆动导致一系列长的瞬变值，这些值对初始状态十分敏感，尽管渐近的（asymptotic）吸引子并非如此。考虑到持续性变化的脑电图，人的注意力状态，以及缺乏建立良好的稳定性的脑电图，如果没有必要，任何区域性（或平均、重复区域性）的熵测度将可能看起来总是奇怪的。

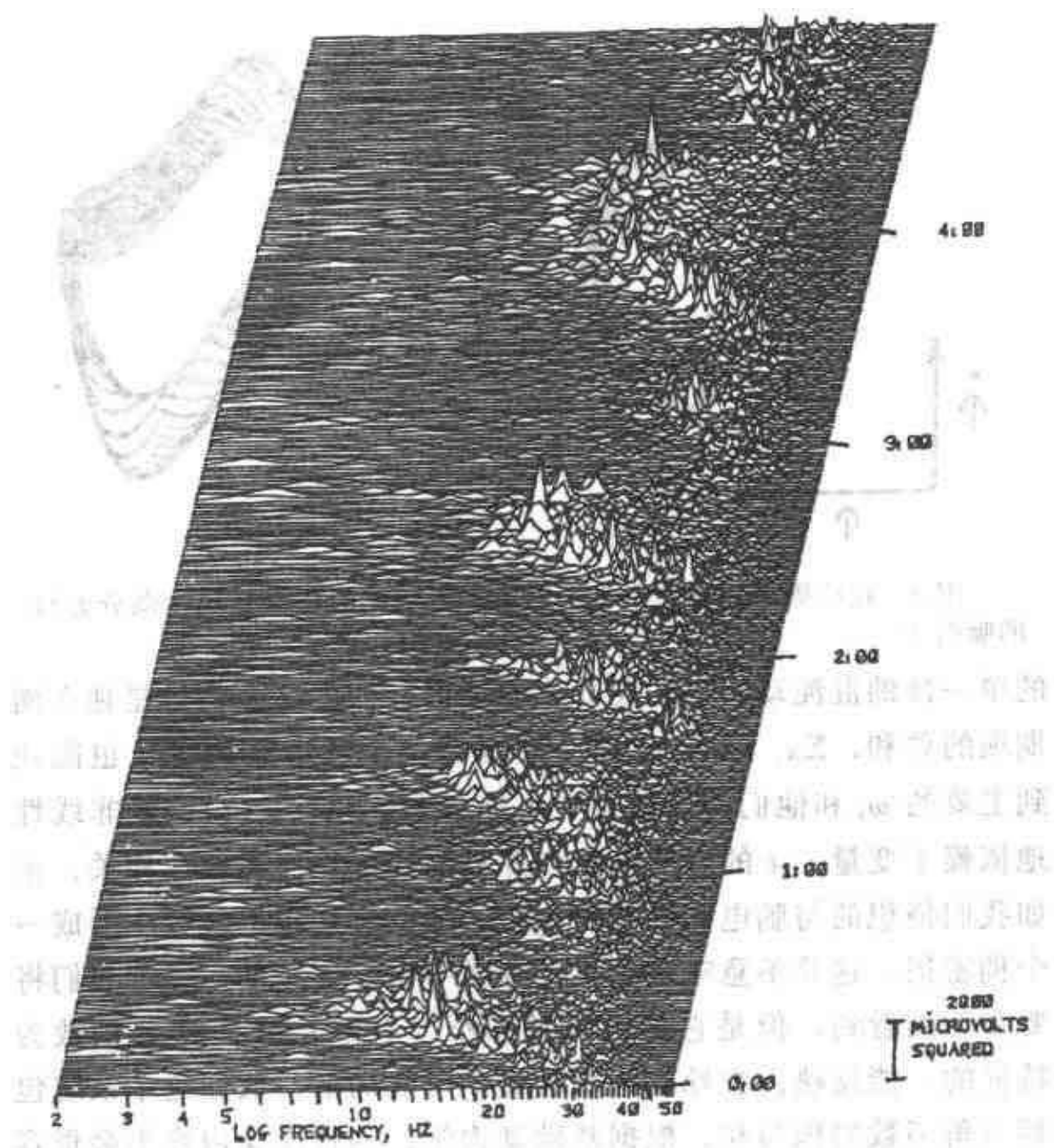


图4 在 β 和 γ 功率谱波段中缺乏固定性的例子

图4显示一个缺乏稳定性的好的例子，实际上几乎是在 β 和 γ 功率谱带里可见到系统性的45~60秒的振荡（脑电图常规 D_2 测量的时间尺度外面）。一系列脑电图的2秒频谱转换称为压缩的频谱束，在给一只猴子服用氨基重氮化物（Aminodiazopoxide）2.5 mg/kg后，记录了60分钟。可以看出它能诱导安定家族从 β 到 γ 频率，在分钟的时间范围内广泛振荡（Ehlers和Havsted的工作资料，未出版，1981）。这种在主导快速模式中时间变化、

平稳转换与对称稳定的拟周期方式相一致。可以清楚地看到，以下方程参数的非常缓慢的时间依赖性将导致显著的混沌瞬间值持续性改变，通常在脑电图 D_2 的时间范围或在 Lyapunov 指数计算法中，这些值将反映最初状态的敏感性和正熵的产生。

在拟周期和混沌动力学边界上动力学吸引子与它的功率谱转换之间的关系如图 5 所示。这来自于 Franceschini (1983) 的工作，他应用一个更大的方程组的 5 阶模式截断（与 Lorenz 应用的 Saltzman 方程三模式方程相似）来研究拟周期的范围。Poincare 截面的功率谱和流动显示出特征性宽带模式，在拟周期和混沌动力学的复合转换中出现，用这种转换作鉴别诊断必须具有这个系统的其他方面的知识。在脑电图中，靠近 Φ 比例的宽带模式提示存在 EEG 最稳定的，无理数相关的等级模式，它是 T^n 上的拟周期的吸引子。

在 T^n 环面中稳定性的问题超出了特征性的最不合理的频率比例，涉及到大脑解剖和功能上的 n 循环对称。前后对称，当眼睛睁开与眼睛闭合对照时，大脑枕部、前叶的转换占主导；两边对称，左右两侧经胼胝体的相互激活和抑制的神经活动；垂直对称，“反馈”循环通路主导整个大脑半球的动力组织。这提示这些动力（不明确）方程式在相关轴旋转下可以恒定，且易妨碍双曲线的稳定性，因此，在零 Lyapunov 指数状态中，它们亦妨碍模式锁定。

三、新皮质区脑电图信号的来源

尽管估计不到 1% 的皮质输入来自丘脑 (Dewulf, 1971; White, 1979)，对丘脑部分切除和刺激反应的脑电图的研究以及对上升感觉通路的电生理研究，共同强调丘脑是皮质下输送到皮质的主要器官，包括作为脑电图振荡解剖结构的丘脑皮质环（经典的参考著作 Adrian 等，1954）。因为丘脑细胞放电方式的特征性时间可以延伸到几百 Hz 的范围以及脑电图在 Hz 和 10 秒 Hz 以内，因此，十分困难在线性外加模式范围内，把时间依赖性脑电

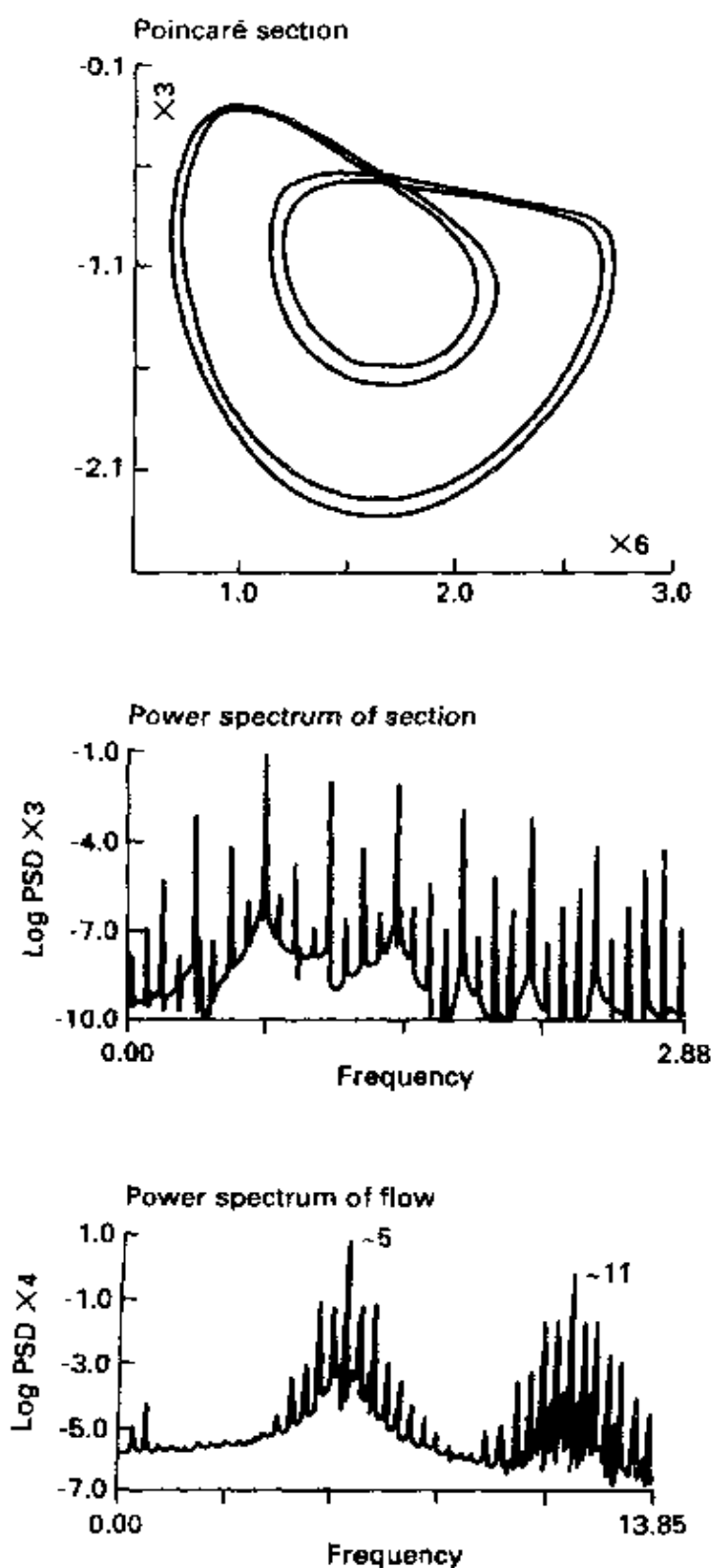


图 5 在拟周期和混沌动力学边界的吸引子动力学与它的功率谱转换的关系

图电势归因于单个丘脑细胞的功能。然而，人们可以引用 Cartwright 和 Littlewood (1945) 的经典著作，证实在拟周期状态下的非线性松弛振子（这里指高度非线性的 Van der Pol 微分方程）能够降低两个量级的驱动频率。丘脑皮质振荡代表脑电图模式边界状态的垂直循环的对称。

正是由于在单个丘脑细胞放电频率上与脑电图频率缺乏一致性，导致了很多关于脑电图时间依赖性其他理论的形成，包括神经网络的应激性质，大脑慢胞膜现象，并且由于可能存在空间和时间脑电图类型的关系——一种扩散关系，应激波属性，这里输入被看作是干扰已经发生的振动绳系统的干扰，这种干扰有自己内在的频率。皮质 - 皮质通路（几乎所有的皮质细胞输入和输出是在皮质间进行的）有自己自然的脑电图频率，可以由一些被选择的频率所解释，但不能被皮质下输入所证实。

然而，这种丘脑 - 皮质 - 丘脑连接导致调谐，产生与波的空间媒介相似的功能。这种波实际上是不可测量的，因为在这种状态下通过异质性轴突通路传导，具有各种传导速率，这与它们半径 (radii) 的平方成相反变化。通过具有次数等级层的神经纤维分支束，信号之间是不相连的。另外，神经传导调节对易化作用、抑制作用的影响，以及对由这些“返回电流”产生的短暂延缓，使得拟周期系统看起来更复杂。由于这些原因，脑电图波的形状（正如在物理系统中一样）被扭曲，称为分散。这种现象，在更多形式下这种分散关系是维持波现象中空间和时间频率之间关系的因素，十分明显脑电图的空间和时间关系随频率变化。 α -频率在人类小头个体中较快 (Nunez 等, 1978)。有限的速率以及在皮质波机制中拨绳 (Plucked strings) 向前向后的传导，引起 EEG 中停滞和行进的波现象，这种现象发生在同时研究空间和时间频率时（见脑电图波理论的发展，Nunez 和 Katznelson, 1981）。

空间的连贯性 (coherence) 对脑电图信号的产生是必要的，以便有足够的动力去监测信号的范围，因为这一信号源于一点，例如一个单一皮质椎细胞，由于距离的平方反比，在电场中下

降。众所周知，被记录的信号在通过 calvarium 孔时明显增大，更直接地导致与新皮质的联系（对人类的研究，请参考 Heath, 1954; Heath 和 Mickle, 1960），以这种方式，肌肉的假象和其他因素与所观察到的空间连贯性无关。它是新皮质区的二维图像，宛如两极中的一层，我们可以把它看做区域性脑电信号的源泉。然而，新皮质区内组织在脑电压的变化中，并不与大的二维区域谐振相关联。例如，躯体感觉的新皮质区位于辐射状层柱内（Mountcastle 和 Smith, 1986; Mountcastle, 1975），主导局部柱间的联系。

丘脑外脑干细胞输入到新皮质的分布和动力学行为有助于回答这个谐振时间范围的问题，这一范围发生在单一神经元放电方式和特征性脑电图频率以及皮质脑电活动的交叉柱，横向时间联系之间。理解单一神经元驱动和调节脑电图的放电方式的动力学，有助于理解拟周期动力学。这也增加了对脑电动力学种类微尺度和宏观尺度之间关系的理解，用任何一种机制的统计学理论可作鉴别。

除了 T^n 最大无理频率比的稳定性争论，以及通过对称性转换的双曲线破坏，有一种脑电图 n -维环面稳定性的神经生理原因。这种对新皮质的神经生理的“噪声”是由脑干神经元细胞产生和传导的，我们把其作为是通过随机谐振而得到的稳定性的来源。

四、脑干神经元脑电图层次模式的层次噪声驱动

Foote 和 Morrison (1987) 对脑干传入到新皮质的生物氨细胞的解剖和生理进行了重要的综述，指出新皮质区的柱状组织是“可以切线地被丘脑外传入神经所侵扰，在传入神经中单轴突在一个功能区内，不仅可以使不同的柱受支配，且使不同的功能区受支配”。在这些系统中，球形新皮质，时-空结合势能的一个很好的例子是去甲肾上腺素局部青色的神经束，它由少量细胞组成，“支配神经轴主要区域”。神经束细胞的数量如同皮质一样系统发育增长，如：大鼠，3 000 个细胞；猴，10 000 个细胞；人，

26 000 个细胞。局部青色的去甲肾上腺素能系统本身弥漫性地向所有的新皮质区突出，显示了与脑电图状态相关的神经元活动的立体形态的变化，而且深入地突向另外一个系统，脑干网状结构，此活动同样与脑电图状态有关 (Pickel 等, 1974; Swanson, 1976; Lindvall and Bjorklund, 1978; Morrison 等, 1984)。这个系统与脑电图状态相关活动的最明显的例子是在快速眼运动 (做梦) 睡眠时的局部细胞捕获。

第二个具有扩散投入到新皮质的生物氨系统是背中缝核的 5-羟色胺能细胞，这在成年大鼠中，比局部去甲肾上腺素能神经系统更加密集。在去甲肾上腺素系统中，有区域性新皮质异质性分布，而在 5-羟色胺系统中使整个新皮质具有神经性，在板层中具有统一的密度 (Lidov 等, 1980; Takeuchi 和 Sano, 1983; O'Hearn 和 Molliver, 1984; Kosofsky 等, 1984)。

细胞间记录到的峰间间隔的时间系列， $\Sigma \tau_i \approx \partial \tau / \partial t$ (τ_i 可以看作是分散的第一个衍生物，时间上的第一个差异)，从 Carlsson, Foote (1988, 1989) 对局部青色的去甲肾上腺素能神经元和背中缝核 5-羟色胺能神经元的工作中，可以显示在脑电图同一时间范围内有趣的等级范围性质。对每一类型特征性神经元的峰间间隔统计结果见下表。前两个时刻是毫秒，数值显示局部青色神经元放电在 2Hz 以下的平均范围，而背中缝核 5-羟色胺能神经元的平均放电是这个频率的一半。这两种生物氨细胞类型对皮质细胞总的效应是抑制性的，以至于可以说这些脑干生物氨神经元 $\Sigma \tau_i$ 调节自发性活动的新皮质神经元的放电方式 (Mountcastle, 1968, 1975)。均数 $\approx$ 方差可能提示泊松分布，但峰态反映概率密度功能的“平坦”，暗示 $\Sigma \tau_i$ 的时间序列不是以高斯或泊松方式分布的。

细胞类型	平均值	Var	SKew	Kurt	极大值
局部去甲肾上腺素	639	695	0.063	2.605	1353
背中缝核血清素	1295	1347	0.768	6.317	3611

图 6 代表一个特征性的局部青色的去甲肾上腺素能细胞的时

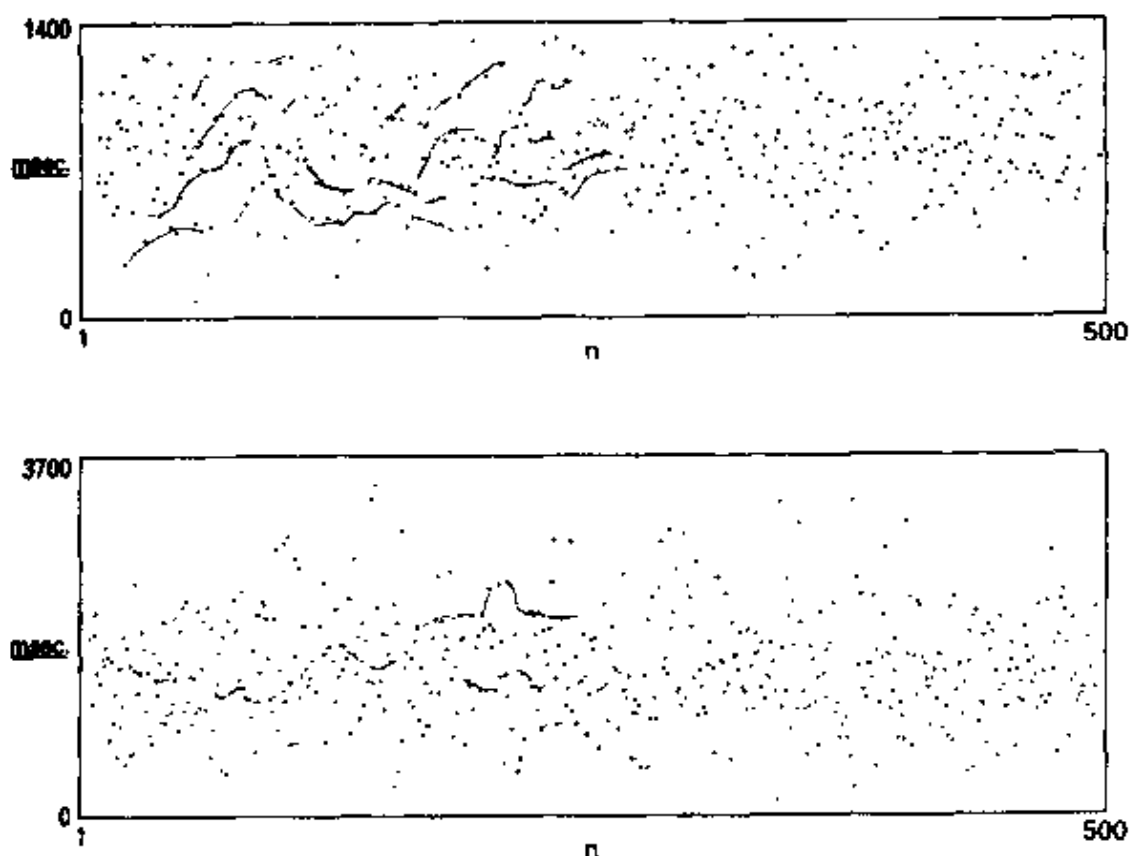


图6 来自于去甲肾上腺素细胞特征轨迹（上图）与背缝核血清素细胞特征轨迹（下图）的时间序列 $\Sigma\tau$

间序列 $\Sigma\tau$ （上图）和背侧中缝核 5-羟色胺能神经元的时间序列（下图）。定性地讲，峰间间隔的范围好像是不连续的，而是 3 或 4 个分散值。细线沿单一水平暗示峰间间隔的等级放电模式 $\Sigma\tau_i$ 。这种印象当然与脑电图 Δ 、 θ 、 α 、 β 、 γ 模式的等级范围相一致，这些大脑生物氨神经元理论上讲或许非特异性地受到支持。

我们用均数正常化变异分布的方法，系统地增加峰间间期的数量（峰间间期在绝对时间的地方有它自己的刻度）去验证等级范围的属性。这种“盒子”大小的分布（每一边距相邻间期是一半的距离）具有 1, 2, 4, 8, 16 间隔。以同种方式，脑电图的模式长度遵守 Φ -范围功能，我们假设分布和他们正常化变异通过分隔面积来计算。图 7 描述了具有 1, 2, 4, 8, 16 峰间间隔的密度分布（从上至下）以及表上方的局部去甲肾上腺素能和缝 5-羟色胺神经元（左和右）。

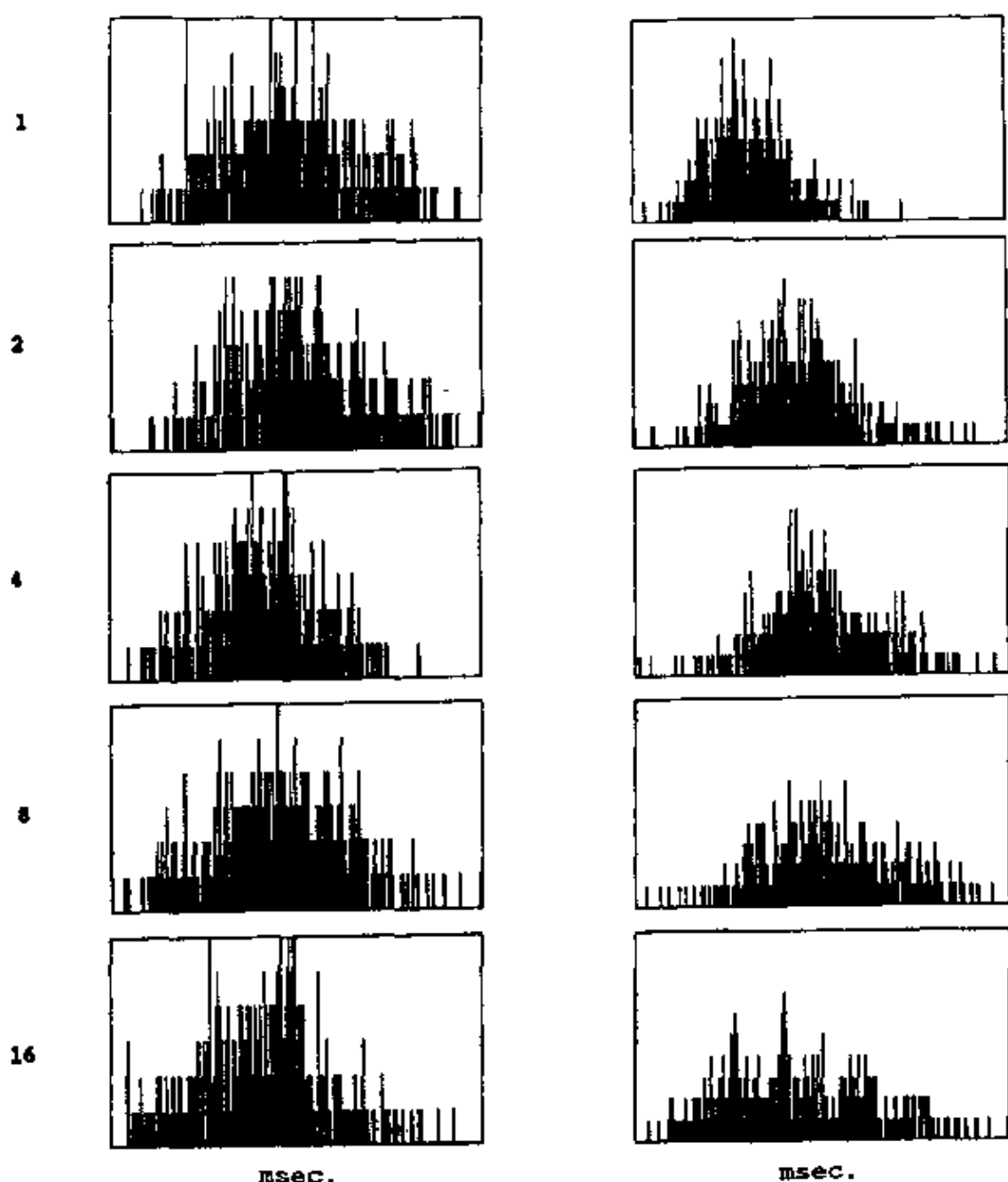


图7 分隔面积的密度分布，包括局部去甲肾上腺素神经元（左）与缝血清素神经元（右）具有1, 2, 4, 8, 16峰间间隔（从上至下）

两个系统分隔面积的正常化变异提示一个层级统计学的标记性质：

细胞类型	1	2	4	8	16
局部去甲肾上腺素	0.586	0.295	0.237	0.215	0.210
背中缝核血清素	0.162	0.136	0.118	0.098	0.082

关于两种特征细胞类型的分隔面积似乎具有一种统计学标记范围。

五、层级神经元放电方式的决定性和随机性模型

神经元具有在峰间期短暂跳跃和粘附的性质，可以用一个一维的、离散的、分段 (piece-wise) 凸映射作为神经元行为的模型，在 Manneville 应用的二维类型中作为一个相反的鞍节点分支的模型，产生一种间歇时间序列。同样的动力学在同宿 (homoclinic) 切线的附近中也可见到：

$$f'(\tau) = \tau_{i+1} = (1 + \gamma)\tau_i + (\beta - \gamma)\tau_i^2, \quad (4)$$

(4) 中代表性的参数是： γ = 非线性，兴奋力； $1/\beta$ = 复发的自主受体，抑制性相互维数，它控制着重新极化率和对 fire 的读数， z = 非线性率。方程 (4) 是平面微分同胚的一维的交叉截面，具有神经生理现实性决定的相互维数。通常是分散的变化因素，如离子、多肽及氨同时作用于功能相似的细胞膜活动。由对称性占主导的拟周期系统，Post - Hopf，具有降解特征状态的多元性，在神经生理范围内代表一种抽象的决定因素。在这个系统的同一状态下，几个变量可以达到临界值。

尽管等式 (4) 在 (0, 1) 范围内不具有单一性，而且它过于伸展 (expanding)，它不是双曲线的，因为当 $\tau_i \rightarrow 0$ 时，图的斜度集中近于 1。这种非双曲线性允许在不稳定的模式中发生平滑的改变，对这些第三或第四序列脑干噪声神经元的代表输入新的感觉信息。这与新皮质脑电图的 0(3) 对称性占主导的 n 维环面的非双曲线性相巧合。

图 8 (上方) 是参数值 $\tau_0 = 0.2$, $\gamma = 0.85$, $\beta = 3$, $z = 2.5$ 时等式 (4) 的相描图。它显示 4 个不稳定点，代表吸引 - 排斥水平，导致 $\Sigma \tau_i$ 在它们不稳定流形间振荡。时间序列 (图 8, 下方) 反映了在相图中见到的噪声离散 τ_i 的水平。

随机模型是一种生成函数：

$$F(\tau) = \Sigma \cos(\phi^n \tau); n \in Z(1, 4); \tau = RV(0, 1) \quad (5)$$

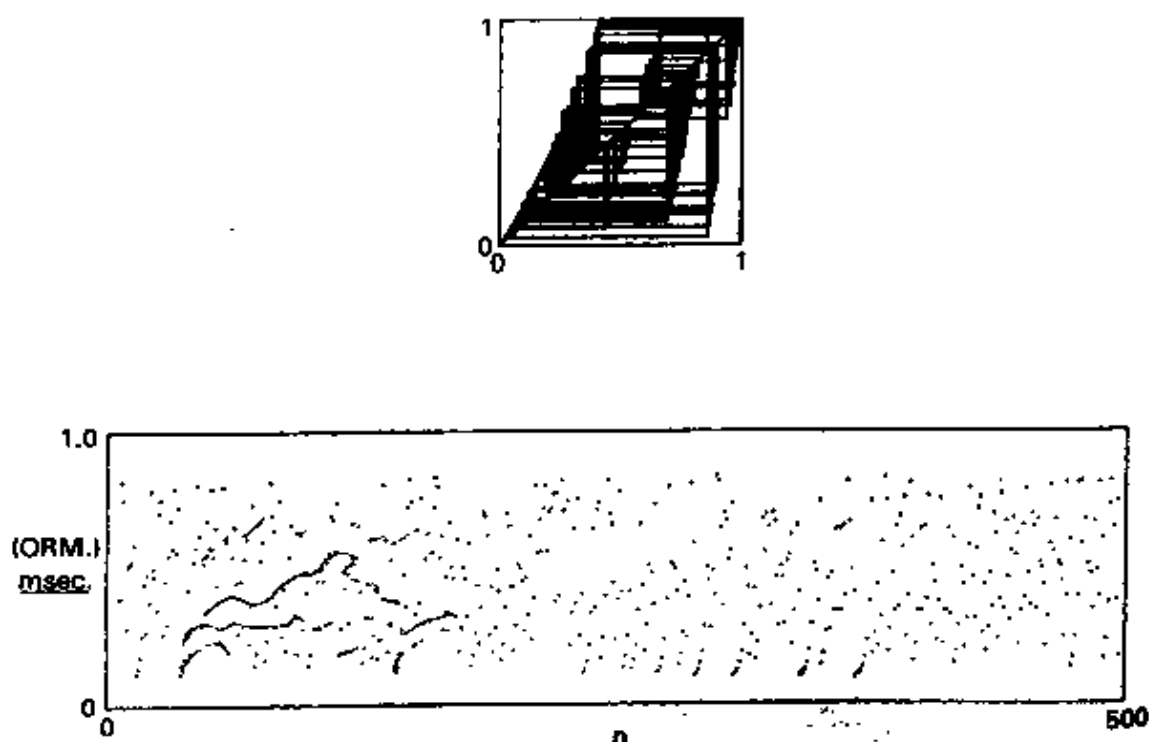


图8 方程式(4)的相图显示4个不稳定的固定点,代表吸引-排斥水平(上图);时间序列(下图)反映相图所见的噪声离散水平

其中 $\phi = 1.618\cdots$; n 是随机从1到4中选出的一个整数, τ 是0和1之间的随机变量。描述脑电图主导的拟周期模式的同一标记法则放进 $F(\tau)$, 指数化随机, 并且允许倍增地作用于 τ , 作为一个随机变量, RV。

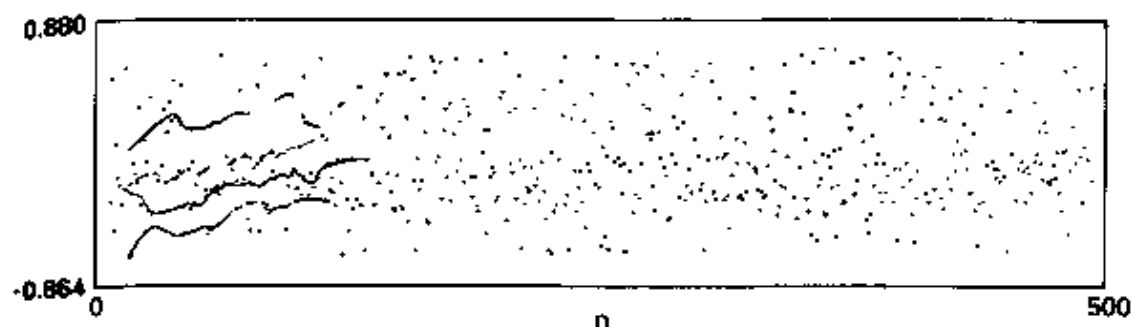


图9 ϕ 比例的随机变量发生器模型(5)的时间序列, 其中能观察到4种峰间间隔水平, 相似于图6脑干神经无序列的行为

图9描述了具有 ϕ^n 范围水平的等式(5)的时间序列, ϕ^n 用线表示。图10是一个分别具有1, 2, 4, 8, $16\tau_i$ 分隔面积的概率密度分布, 等式(4)的在左边, 等式(5)在右边。

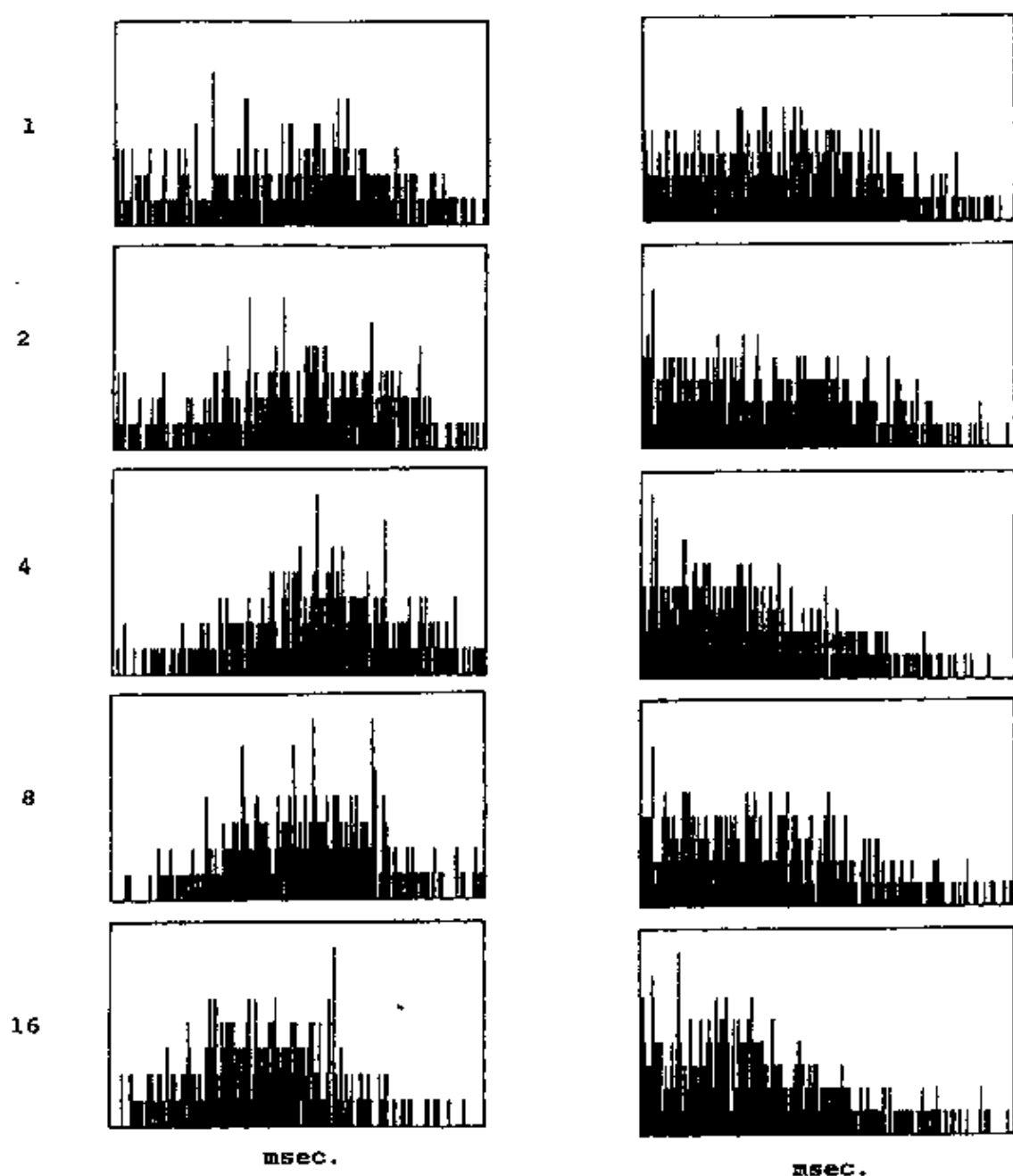


图 10 增加的分割尺寸的密度分布，包括方程式 (4) (左边) 和方程式 (5) (右边) 产生的 1, 2, 4, 8, 16 峰间间隔 (从上至下)。注意正像在神经元分隔 (图 7) 的分布中的情况，存在分布呈现出标度自相似的区域

在粗略定义下的尺度范围内用分隔面积分布的均数正常化变异方法，对于暗示的参数，任意的 ϕ 范围随机功能以及决定子间隔图显示层级的相似性。

功能	1	2	4	8	16
间断 [4]	0.385	0.322	0.285	0.243	0.185
随机 [5]	0.599	0.659	0.722	0.701	0.731

六、在单一神经元 - 新皮质动力系统中的随机共振和拟周期性

晚近,人们对在单一神经元和神经网络的电子和计算模型中“噪声”的协作,具有很大的兴趣 (Buhmann 和 Schulten, 1987; Babcock 和 Westervelt, 1987; Bulsara 等, 1989; Schieve 等, 1991)。最简单的代表是具有附加的 (非独立的) 或多元 (独立的) “噪声”的双向势能,通常是白噪声。此外,有时包括调节转换概率的周期强迫项。对于噪声,有一个最适的振幅。太小,不会发生周期性模式的一致性;太大,噪声主导动力系统。这种由随机系统产生的模式稳定性的时间 - 依赖性调节,在功率频谱中产生陡峭的峰 (Sharp peaks),被称之为“随机共振” (Zhou 和 Moss, 1989, 1990)。最近, Bulsara 等 (1991) 已经探索到它在一种周期性的感受型噪声的单个神经元模型中的应用。一个微弱的自身无效的周期性信号可以成为有效。例如通过附加白噪声,在周期输入时可发生转换事件。例如,关于峰间间隔 τ_i ,

$$F'(\tau) = -\tau + r(\tan h(\tau)) + f(t) + \cos(\omega t) \quad (6)$$

结合附加白噪声, $f(t)$, 一个引起 $f(t)$ 周期性改变的附加周期项以及一个分支参数 r , 在临界值 (critical values) 中从 1 到 2 移动这些峰间间隔的活动。

另一个对噪声振幅,模式寻找系统的形式,更直接地与胞膜和神经活动降低的 Hodgkin-Huxley 微分方程有关,对于强迫的扩散拟周期系统中 Cartwright-Littlewood-Van der Pol (见图 1 和图 2) 相当于 Kolmogorov-Arnold-Moser 样稳定性定理。释义 (Arnold 和 Avez, 1968), 对足够小的干扰,在起源的邻近部分存在不变的环面。对一个足够大振幅的干扰,在功率谱中,拟周期解被干扰成一个具有尖峰和谐波的周期解。在高度非线性时, $r \gg 1 \gg 1/r$,

对微分方程来说,

$$F(\tau) = \tau'' - r(1 - \tau^2)\tau' + \tau = b(\cos(\omega t)) \quad (7)$$

其中 b 起噪声振幅的作用, $f(t)$ 在系统(6)中, 以至于拟周期运动“锁定模式”能在同一周期驱动频率 ω 中出现或不出现, 作为振幅项 b 的函数。图 11 显示 (r, ω) 参数区域, 在此区域周期轨道随 b 值增加而出现。十分清楚地看到, b 的临界值决定, 若给定一套 (r, ω) 值, 是否出现某些给定的周期轨道。因为在振幅的高值时, 较高的周期性区域几乎消失, 所以 b 值具有重要价值。

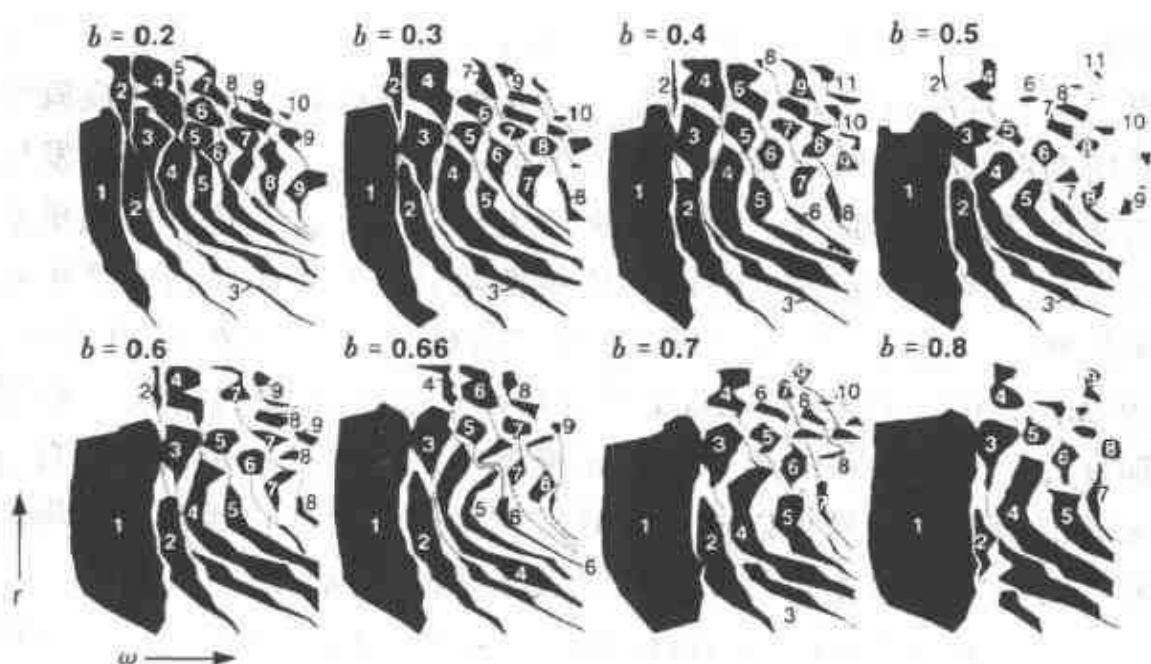


图 11 这些是在 EAI - 680 模拟计算机上, 在 Cartwright-Littlewood-Van der Pol 系统 (7) 中, 经过增加驱动振幅 β 的值, 对用黑色表示的模式锁定区 (1:1, 2:1 等) 以及用白色表示的拟周期区域的系统研究的结果。注意不同的 β 值导致一些模式邻近参数的变化, 例如当 $\beta = 0.5$ 时, 2:1 与 3:1 的并列消失。经过改变 β , 共振模式的不连续和不规则出现, 是由 Cartwright 和 Littlewood (1945) 首先报道的, 而且粗略类似于随机共振模式研究中噪声振幅的非线性作用

T^n 的稳定性是由轨道对 n 维环面上的收缩率与轨道附近分散指数率的比例来决定。当然, 对称的问题正如以上讨论的, 改变了 Arnold 语言的意义, 因为这些将变成参数区域, 其中拟周期轨道的平滑连续性能在没有双曲线稳定锁定模式时得以通过。

尝试研究脑电图信号常常周期性地（并且几乎是必需地）包括原发性视觉或听觉输入，这种输入能引起足够的联系过程以至于在初级感觉系统核和它们的新皮质投射区中能被识别。这些记录包括相对尖的功率频谱模式。随机谐振的神经元理论包括噪声对削尖这些观察值的影响。

脑电图惟一的联系不包括感觉或运动事件，但包括行为所定义的意识状态，例如白日梦，夜间梦，焦虑，放松的敏感性，深睡以及昏迷。在实验性观察的时间锁定模式中，对周围感觉系统用简单的参数操作，这种“驯服”脑电图信号的努力漏掉脑电图方面最大的输入。

调节脑电图状态的神经元系统是 Cahal 称之为第三、四序列神经元，它们从初级感觉或肌肉运动事件分支而来。这里形成的理论包括这些第三、四级脑干神经系统，涉及脑电图状态以及觉醒状态。在这种环境下，真正脑干神经元的噪声源泉所致的等级结构噪声产生，并不是所见到的尖峰的简单联系信号，而是作为支持整体新皮质脑电图的拟周期模式。这种高序列机制的实质可能被认为是既是上面描述的随机谐振模型的抽象化，又是该模型的普遍化。

在这些整体系统中，等级信号和等级“噪声”好像是由同一脑干神经源来代表的，它们支持的拟周期模式中，新皮质的 T^n ， $n \geq 4$ 。脑干、新皮质动力系统主观与行为的相关性提示它们是产生信息的系统，在没有外在刺激情况下不必输入和改变状态。例如，众所周知从轻度睡眠到警醒的意识状态的波动，发生在一个特征性时间的宽广范围内，从 5 分钟“循环”到昼夜周期循环。感觉输入与所接触的脑干神经元、新皮质动力系统相协调，而不是直接地驱动它。更通俗地讲，脑干神经元-新皮质系统甚至在有新信息时也忙于思考。我们提出在脑干神经元噪声中等级时间范围可能支持在这些内部交流中脑电图的模式等级。

七、单神经元的动力学与脑电图：两个临床例子

海马单个神经元动力学与整体脑电图关系的例子来自我们对

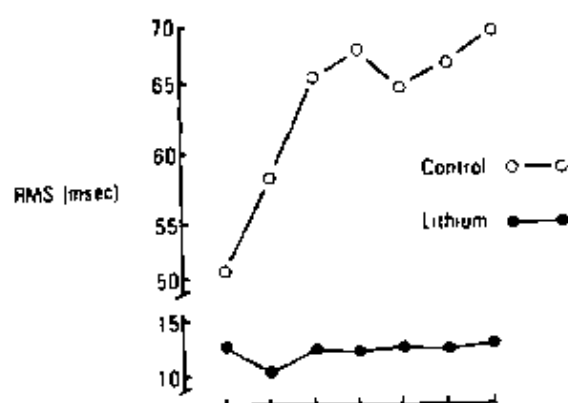
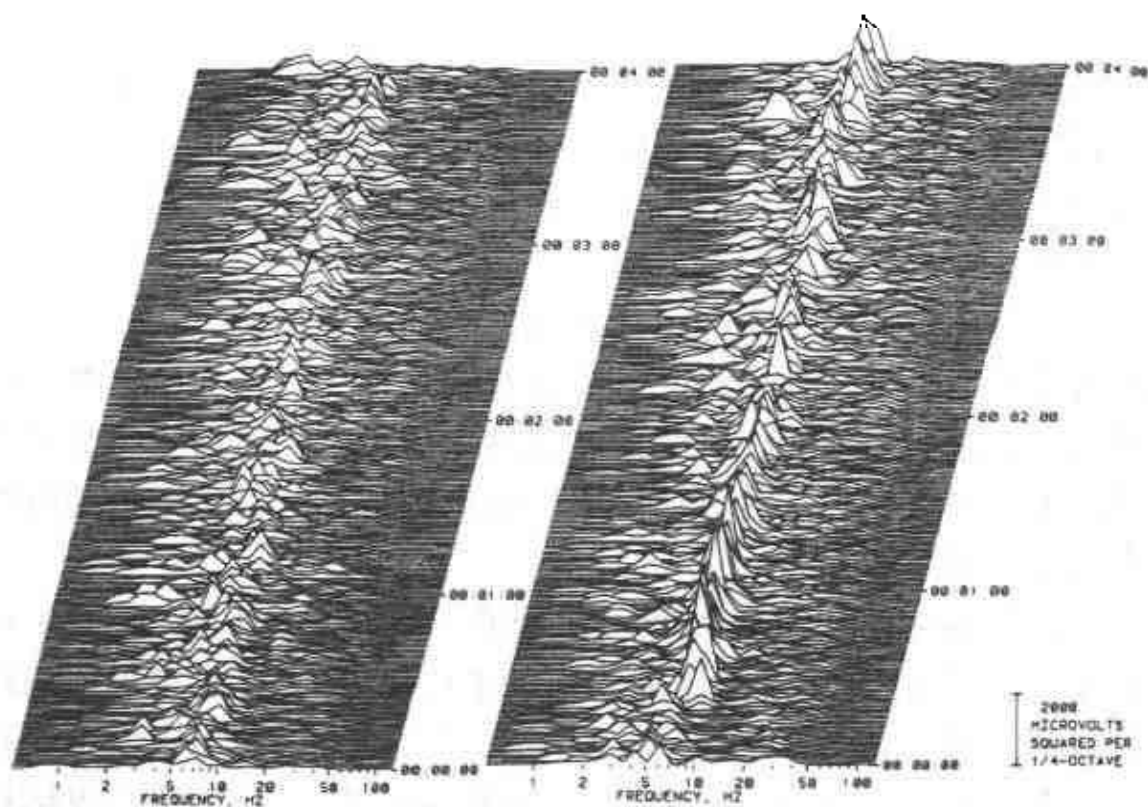


图 12 本图显示对鼠（下图）单个海马神经元峰间间隔随时间增加取样的均数平方根值的研究。没有经锂预处理的细胞显示随着 n 间隔 RMS 呈典型增加；经锂处理的细胞在 3 分钟采样时间内收敛于一稳定值。在两种相同情况下的压缩的谱数组（上图）显示对照组比锂处理组有更广泛波动的脑电图功率谱模式，后者占主导的 α 模式频率更加稳定。海马神经元以及每天给大鼠饲喂锂之后的脑电图的功率频谱束的研究（Mandell 等，1983），图 12。在控制状态下，对鼠海马记录的图 12（下图）单一神经元的峰间间隔的均数平方根波动，显示

随着间歇系统 n 的变化呈典型增长。每一部分显示峰间间隔时间序列的另一分钟样本。预先给予锂处理显示变化在 3 分钟记录范围内会聚在一起。图 12（左上方）是一个鼠皮质脑电图压缩的频谱束，显示广泛的变化模式；而图 12（右上方）显示一个近乎常数 α 峰（对大鼠来说在 7 ~ 8Hz 之间）。锂在许多生物和精神学测量方面具有降低广泛性变异的能力，以致于它可作为联系大脑动力学微观和宏观水平，表现为相同的统计学改变（Mandell 等，1983）。

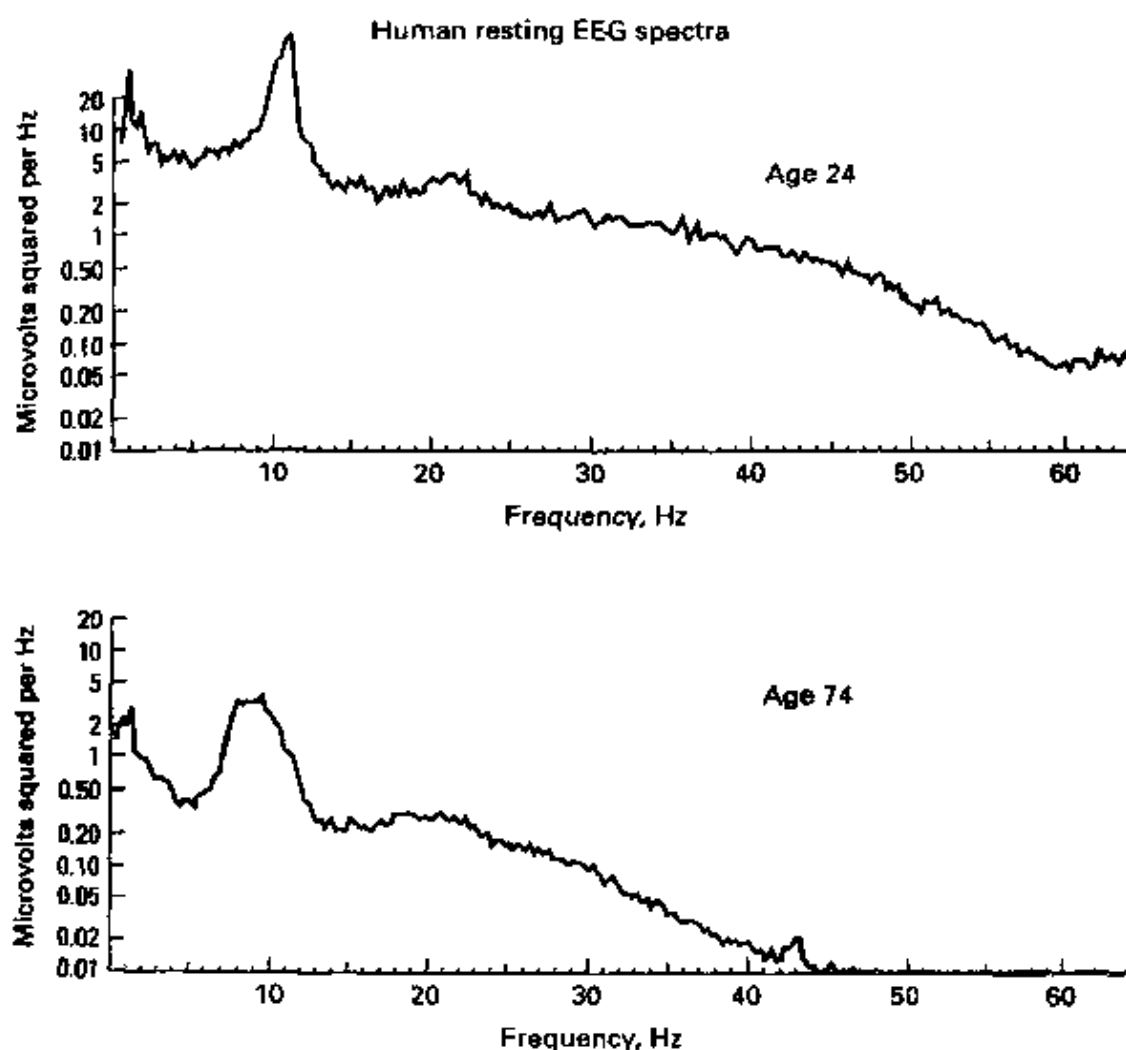


图 13 该图显示两位不同年龄男性的脑电图功率谱。 α 模式在两者均占主导，尽管老者显示尖峰减小以及两者均出现 Δ 和 β 波。最显著的区别是在 $> 40\text{Hz}$ 的区域，我们归因于随着年龄的老化，脑干网状结构细胞的丧失。脑干网状细胞在这些频率中具有驱动丘脑皮质系统的功能

图 13 显示在推理后单一神经元动力学与脑电图的关系。在老化的过程中，发生显著的细胞丢失，特别是在脑干网状结构中，并且这具有新皮质作用的含义（Mandell 和 Shlesinger, 1990）。这些细胞在 50 ~ 200Hz 范围内活动。随着脑干单个神经元产生和/或支持脑电图一定范围的拟周期模式，可以预测，我们观察到的在功率频谱中 40 ~ 50Hz 以上的快速频率可能被丢失（图 13）。

八、总结

数学的、理论上的以及神经生理的证据支持脑电图信号不能代表奇怪吸引子的观察值，而代表在 $n \geq 4$ 时 n 维环面的观察值。有利于这个系统稳定性的证据包括：（1）最大的无理频率比例的出现，由 KAM 理论显示对模式锁定是最大的阻力；（2）大脑脑电图信号的 $O(n)$ 对称性，由 $n-1$ 独立地旋转变换导致模式锁定所要求的双曲线稳定性的丧失，使 $\geq n+1$ 频率，拟周期状态得到稳定；（3）神经生理系统由脑干生物胺和网状结构神经元组成并投射到新皮质区，支持具有等级“噪声”的拟周期模式，导致被称之为随机谐振的模式支持机制。

参 考 文 献

- [1] Adrian, E. D., Bremer, F., and Jasper, H. H. (1954). *Brain Mechanisms and Consciousness*. Thomas, Springfield.
- [2] Aihara, K., and Matsumoto, G. (1987). "Formed Oscillations and Routes to Chaos in Two Hodgkin-Huxley Axons and Squid Giant Axons." In *Chaos in Biological Systems*, H. Dega, A. V. Halden, and L. Olden, eds. Plenum.
- [3] Arnold, V. I. (1962). "On the Classical Perturbation Theory and the Stability Problem of Planetary Systems." *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 1445: 481 - 490.
- [4] Arnold, V. I. (1983). *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer - Verlag, New York, pp. 87 - 141.

- [5] Arnold, V. I., and Avez, A. (1968). *Ergodic Problems of Classical Mechanics*. Addison-Wesley, Reading.
- [6] Babcock, K. L., and Westervelt, R. (1987). "Dynamics of Simple Electronic Neural Networks." *Physica* 28D: 305 - 316.
- [7] Babloyantz, A., and Destexhe, A. (1986). "Low Dimensional Chaos in an Instance of Epilepsy." *Nat. Acad. Sci.* 83: 3513 - 3517.
- [8] Babloyantz, A., and Destexhe, A. (1988). "The Creutzfeld-Jakob Disease in the Hierarchy of Chaotic Attractors." In *From Chemical to Biological Organization*, M. Markus, S. Muller, and G. Nicolis, eds. (Synergetics). Springer-Verlag, Berlin. 39: 307 - 316.
- [9] Babloyantz, A., Salazar, J. M., and Nicolis, C. (1985). "Evidence of Chaotic Dynamics of Brain Activity during the Sleep Cycle." *Phys. Lett.* 111A: 152 - 156.
- [10] Battelino, P. M., Grebogi, C., Ott, E., and Yorke, J. A. (1989). "Chaotic Attractors on a 3-Torus, and Torus Break-up." *Physica* D39: 299 - 314.
- [11] Bulsara, A. R., Boss, R. D., and Jacobs, E. W. (1989). "Noise Effects in an Electronic Model of a Single Neuron." *Biol. Cybern.* 61: 211 - 222.
- [12] Bulsara, A. R., Jacobs, E. W., Zhou, T., Moss, F., and Kiss, L. (1991). "Stochastic Resonance in a Single Neuron Model: Theory and Analog Simulation." In *Single Neuron Computation*, T. McKenna, J. Davis, and S. Zorvetzer, eds. Academic, New York.
- [13] Buhmann, J., and Shulten, K. (1986). "Influence of Noise on the Behavior of an Autoassociative Neural Network." In *Neural Networks for Computing*, vol. 151, J. Denker, ed, AIP.
- [14] Carlson, J. H. (1989). "Characterization of Discharge Patterns of Dopamine Neurons." *NARSAD Symposium*, Washington, D. C.
- [15] Carlson, J. H., and Foote, S. L. (1988). "Effects of Local Infusion of Pharmacological Agents on Tonic Activity of Substantia Nigra Dopamine Neurons." *Soc. Neuroscience* 14: 407.
- [16] Carlson, J. H., and Foote, S. L. (1989). *Dopamine, Norepinephrine, and Serotonergic Discharge Patterns*. Dept. of Psychiatry, U. C. S. D., La

jolla, CA. Time series.

- [17] Carpenter, G. A. (1981) "Normal and Abnormal Signal Patterns in Nerve Cells." *SIAM-AMS Proc.* 13: 49 - 90.
- [18] Cartwright, M. L., and Littlewood, J. E. (1945). "On Nonlinear Differential Equations of the Second Order, 1: The Equation $\ddot{y} + k(1 - y^2)\dot{y} + y = b\lambda k \cos(\lambda t + a)$, k large." *J. Lond. Math. Soc.* 20: 180 - 189.
- [19] Crawford, J. D., and Knobloch, E. (1991). "Symmetry and Symmetry-breaking Bifurcations in Fluid Dynamics." *Ann. Rev. Fluid. Mech.* 23: 341 - 387.
- [20] Dewulf, A. (1971). *Anatomy of Normal Human Thalamus*. Elsevier, Amsterdam.
- [21] Eckmann, J. -P., and Ruelle, D. (1985). "Ergodic Theory of Strange Attractors." *Rev. Mod. Phys.* 57: 617 - 656.
- [22] Foote, S. L., and Morrison, J. H. (1987). "Extrathalamic Modulation of Cortical Function." *Ann. Rev. Neurosci.* 10: 67 - 95.
- [23] Freeman, W. J. (1987). "simulation of Chaotic EEG Patterns with a Dynamic Model of the Olfactory System." *Biol. Cybern.* 56: 139 - 150.
- [24] Goldberger, A. L., Bhargava, V., West, B. J., and Mandell, A. J. (1986). "Some Observations on the Question: Is Ventricular Fibrillation Chaos?" *Physica* 12D: 282 - 289.
- [25] Gollub, J. P., and Benson, S. V. (1980). "Many Routes to Turbulent Convection." *J. Fluid Mech.* 100: 449 - 470.
- [26] Golubitsky, M., Stewart, I., and Schaeffer, D. G. (1988). *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol. II. Springer-Verlag, New York.
- [27] Gorman, M., and Swinney, H. L. (1982). "Spatial and Temporal Characteristics of Modulated waves in the Circular Couette System." *J. Fluid. Mech.* 117: 123 - 142.
- [28] Heath, R. G. (1954). "Physiological Data - Electrical Recordings." In *Studies in Schizophrenia*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, pp. 151 - 156.
- [29] Heath, R. G., and Mickle, W. A. (1960). "Evolution of Seven Years' Experience with Depth Electrode Studies in Human Patients." In *Electrical Studies on the Unanesthetized Brain*, E. R. Ramey and D. S. O'Doherty,

- eds. Hoeber, New York, pp. 214 – 242.
- [30] Herman, M. R. (1979). "Sur la conjugaison differentiable des diffeomorphismes du cercle à des rotations." *Publ. Math. I. H. E. S.* 49: 5 – 233.
 - [31] Holmes, P. (1979). "A Nonlinear Oscillator with a Strange Attractor." *Proc. Royal Soc. London* 292: 419 – 448.
 - [32] Knobloch, E. (1990). "Pattern Selection in Long Wavelength Convection." *Physica D* 41: 450 – 479.
 - [33] Kosofsky, B. E., Molliver, M. E., Morrison, J. H., and Foote, S. I. (1984). "The Serotonin and Norepinephrine Innervation of Primary Visual Cortex in the Old World Monkey." *J. Comp. Neurol.* 230: 168 – 178.
 - [34] Lidov, H. G. W., Grzanna, R., and Molliver, M. E. (1980). "The Serotonin Innervation of Cerebral Cortex in the Rat – An Immunohistochemical Analysis." *Neuroscience* 5: 207 – 228.
 - [35] Lindvall, O., and Bjorklund, A. (1978). "Organization of Catecholamine Neurons in the Rat Central Nervous System." In *handbook of Psychopharmacology*, vol. IX, L. Iversen, S. Iversen, and S. H. Snyder, eds. Plenum.
 - [36] Lorenz, E. N. (1980). "Noisy Periodicity and Reverse Bifurcation." *NYOAS* 35N: 282 – 291.
 - [37] Mandelbrot, B. B. (1977). *Fractals: Form, Chance, and Dimension*. Freeman.
 - [38] Mandell, A. J. (1981). "Statistical Stability in Random Brain Systems." *Adv. Sub. Abuse.* 2: 99 – 341.
 - [39] Mandell, A. J. (1987). "Dynamical Complexity and Pathological Order in the Cardiac Monitoring Problem." *Physica D* 27: 235 – 242.
 - [40] Mandell, A. J., Knapp, S., Ehlers, C. L., and Russo, P. V. (1983). "The Stability of Constrained Randomness: Lithium Prophylaxis at Several Neurobiological Levels." In *The Neurobiology of the Mood Disorders*, R. M. Post and J. C. Ballenger, eds. Williams and Wilkins, pp. 744 – 776.
 - [41] Mandell, A. J., Russo, P. V., and Blomgren, B. W. (1987). "Geometric Universality in Brain Allosteric Protein Dynamics." *Ann. N. Y. A.*

S. 504: 88 – 117.

- [42] Mandell, A. J., Russo, P. V., and Knapp, S. (1982). "Strange Stability in Hierarchically Coupled Neuropsychobiological Systems." In *Evolution of Chaos and Order in Physics, Chemistry, and Biology*, H. Haken, ed. Springer-Verlag, pp. 270 – 286.
- [43] Mandell, A. J., and Shlesinger, M. F. (1990). "Lost Choices: Parallelism and Topological Entropy Decrements in Neurobiological Aging." In *The Ubiquity of Chaos*, S. Krasner, ed. *Am. Ass. Adv. Science*, pp. 35 – 46.
- [44] Mandell, A. J., Stewart, K. D., and Russo, P. V. (1981). "The Sunday Syndrome: From Kinetics to Altered Consciousness." *Fed. Proc.* 40: 2693 – 2698.
- [45] Manning, A. (1981). "A Relation between Lyapounov Exponents, Hausdorff Dimension and Entropy." *Erg. Th. Dyn. Sys.* 1: 451 – 459.
- [46] Mayer-Kress, G. (1986). *Dimensions and Entropies in Chaotic Systems*. Springer-Verlag, New York, pp. 2 – 7. Introductory remarks.
- [47] Mayer-Kress, G., and Layne, S. P. (1987). "Dimensionality of the Human Electroencephalogram." *Am. N. Y. Acad. Sci.* 504: 62 – 87.
- [48] Moser, J. (1968). *Lectures on Hamiltonian Systems*. *Memoirs A. M. S.*, vol. 81.
- [49] Mountcastle, V. B. (1975). "The View from Within: Pathways to the Study of Perception." *Johns Hopkins Med. J.* 136: 109 – 131.
- [50] Mountcastle, V. B., and Smith, I. (1968). "Neural Mechanisms in Somesthesia." In *Medical Physiology*, vol. II. V. B. Mountcastle, ed. Mosby St. Louis, pp. 1372 – 1423.
- [51] Morrison, J. H., Foote, S. L., and Bloom, F. E. (1984). "Laminar, Regional, Developmental, and Functional Specificity of Monoaminergic Innervation Patterns in Monkey Cortex." *Neural. Neurobiol.* 10: 61 – 75.
- [52] Newhouse, S. E. (1974). "Diffeomorphisms with Infinitely Many Sinks." *Topology* 13: 9 – 18.
- [53] Newhouse, S. E., Ruelle, D., and Takens, F. (1978). "Occurrence of Strange Axiom A Attractors near Quasiperiodic Flows on T^m ($m \geq 3$ or more)." *Commun. Math. Phys.* 64: 35 – 50.

- [54] Nunez, P. L., and Katznelson, R. D. (1981). *Electric Fields of the Brain*. Oxford, New York.
- [55] Nunez, P. L., Reid, L., and Bickford, R. (1978). "The Relationship of Head Size to Alpha Frequency with Implications for a Brain Wave Model. EEG." *Clin. Neurophysiol.* 44: 344 - 352.
- [56] O'Hearn, E., and Molliver, M. E. (1984). "Organization of Raphé Cortical Projections in Rat." *Brain Res. Bull.* 13: 709 - 726.
- [57] Ornstein, D. S. (1974). *Ergodic Theory, Randomness, and Dynamical Systems*. Yale Univ. Press, New Haven.
- [58] Pickel, V. M., Segal, M., and Bloom, F. E. (1974). "A Radioautographic Study of the Efferent Pathways of the Nucleus Locus Coeruleus." *J. Comp. Neurol.* 133: 15 - 42.
- [59] Pine, I., and Pine, H. M. (1953). "Clinical Analysis of Patients with Low-Voltage EEG." *J. Nerv. Ment. Dis.* 117: 191 - 204.
- [60] Prichard, W. S., Duke, D. W., and Coburn, K. L. (1991). "Altered EEG Dynamical Responsivity Associated with Normal Aging and Probable Alzheimer's Disease." SCRI FSU Preprint.
- [61] Rand, D. (1982). "Dynamics and Symmetry: Predictions for Modulated Waves in Rotating Fluids." *Arch. Ration. Mech. Anal.* 79: 1 - 38.
- [62] Rapp, P. E., Bashore, T. R., Martinerie, J. M., Albano, A. M., Zimmerman, J. D., and Mees, A. I. (1989). "Dynamics of Brain Activity." *Brain Topography* 2: 99 - 118.
- [63] Renyi, A. (1959). "On the Dimension and Entropy of Probability Distributions." In *Selected Papers of A. Renyi*. Akademiai, Budapest, Vol. 2, pp. 320 - 324.
- [64] Rinzel, J. (1987). "A Formal Classification of Bursting Mechanisms in Excitable Systems." *Lect. Notes Biomath.* 71: 267 - 281.
- [65] Roschke, J., and Aldenhoff, J. (1991). "The Dimensionality of Human's Electroencephalogram during Sleep." *Biol. Cyber.*
- [66] Roschke, J., and Basar, E. (1989). "Correlation Dimensions in Various Parts of Cat and Human Brain Different States." In *Brain Dynamics: Progress and Perspectives*, E. Basar and T. H. Bullock, eds. Springer-Verlag, New York, pp. 131 - 148.

- [67] Ruelle, D. (1973). "Bifurcations in the Presence of a Symmetry Group." *Arch. Ration. Mech. Anal.* 51: 136 – 152.
- [68] Ruelle, D. (1989). *Chaotic Evolution and Strange Attractors*. Cambridge Univ. Press, New York, pp. 85 – 87.
- [69] Ruelle, D., and Takens, F. (1971). "On the Nature of Turbulence." *Commun. Math. Physics*, 20: 167 – 180.
- [70] Schieve, W. C., Bulsara, A. R., and Davis, G. M. (1991). "The Single Effective Neuron." *Phys. Rev. A*.
- [71] Selz, K. A., and Mandell, A. J. (1991). "Critical Coherence and Characteristic Times in Brain Stem Neuronal Discharge Patterns." In *Single Neuron Computation*, T. McKenna, J. Davis, and S. Zornetzer, ed. Academic Press, New York.
- [72] Smale, S. (1967). "Differential Dynamical Systems." *Bull. Am. Math. Soc.* 73: 747 – 817.
- [73] Swanson, L. W. (1976). "The Locus Coeruleus: A Cytoarchitectonic, Bolgi, and Immunohistochemical Study in the Albino Rat." *Brain Res.* 110: 39 – 56.
- [74] Takeuchi, Y., and Sano, Y. (1983). "Immunohistochemical Demonstration of Serotonin Nerve Fibers in the Neocortex of the Monkey." *Anat. Embryol.* 166: 155 – 168.
- [75] Veda, Y. (1979). "Randomly Transitional Phenomena in the System Governed by Duffing's Equations." *J. Stat. Phys.* 20: 181 – 196.
- [76] White, E. L. (1979). "Thalamocortical Synaptic Relations: A Review with Emphasis on the Projections of Specific Thalamic Nuclei to the Primary Sensory Areas of the Neocortex." *Brain Res. Rev.* 1: 273 – 311.
- [77] Zhou, T., and Moss, F. (1989). "Remarks on Stochastic Resonance." *Phys. Rev. A* 39: 4323 – 4326.
- [78] Zhou, T., and Moss, F. (1990). "Analog Simulations of Stochastic Resonance." *Phys. Rev. A* 41: 4255 – 4264.

David Ruelle

摘 要

混沌和数学的联系是复杂而微妙的。事实上混沌是在 19 世纪末被数学家 J. Hadamard 和 H. Poincaré 发现的，他们主要欣赏这一发现的哲学含义。但在当时以定量的方式处理这一课题是不可能的。最近几十年混沌的再发现产生了这类以“硬科学”为特点的定量分析，并对纯数学产生了重要反响。我们讨论考察一些能显示混沌与数学多种关系的专题：洛伦兹吸引子、费肯鲍姆分叉、流体动力学湍流、可微分动力系统的各态历经理论（公理 A 或其他更广义系统）、平方映射和 Hénon 吸引子及动力 Zeta 函数。以上所列不是全面的，但说明了来自物理学（统计力学和流体动力学等）和数学的不同领域思想的相互作用所产生的全新理解，以及在物理学中和数学中所产生的技术进步。

一、引言：历史回顾

很难讨论混沌对数学的冲击而忽略数学对混沌的影响。更仔

细地看这一问题，你就会了解在动力系统的数学理论和它在混沌领域的应用之间的相互作用确实有着丰富的历史。对于数学与其应用之间的关系来说，这一情况十分普遍，但在这里这种相互作用尤其引人注目是因为混沌基本上是一种数学现象。因而对动力系统理论的数学与物理学和其他科学中混沌分析的复杂关系的历史，作简要的讨论是值得的。

我们从一些定义开始。一个动力系统即是在连续时间情况下由微分方程

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad (1)$$

或在离散时间情况下由下面形式的方程

$$x_{t+1} = f(x_t) \quad (2)$$

定义的时间演变。变量 x 属于某个有限或无限维的空间 M 。注意到时间 t 并没有显式地出现在方程 (1) 和 (2) 的右端：我们称为自治系统。因而存在（非线性的）时间演变算子 f^t 使得 $x(t) = f^t x(0)$ 。在离散的情况下， f^t 即是 f 的第 t 次迭代。我们有

$$f^0 = 1, f^t \cdot f^s = f^{t+s}$$

我们应该假定 (1) 中的 F 或 (2) 中的 f 是可微分的。这看起来是一个起码的技术假定，但事实上它是一些有趣发展的关键。

考虑对应于初始条件变化 $\delta x(0)$ 的变化 $\delta x(t)$ 。我们有

$$\delta x(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \delta x(0)$$

典型地，我们这里不很严格，认为 $\delta x(t)$ 和 $\partial f / \partial x$ 都随时间按指数变化，即

$$\delta x(t) \sim e^{\lambda t}$$

当 $\lambda < 0$ 时，我们有稳定性，当 $\lambda > 0$ 时，我们有对初始条件的敏感依赖。例如，在不稳定的固定点，这种情况如何能发生是清楚的，但更惊奇的是对初始条件敏感依赖几乎能对所有初始条件出现。这种普遍的敏感性就是我们目前所称的混沌。

混沌，正如我们刚才所定义的，是在 19 世纪末由 J. Hadamard 在一个称为负曲率流形上的测地学流的特殊的（哈密

尔顿) 动力系统中发现的。Hadamard 立刻认识到了其结果的哲学重要性: 初始条件的一个任意小的不确定性, 经充分长的时间后在系统的预测状态会产生一个大的不确定性。其他科学家 (P. Duhem, H. Poincaré) 也认识到了由 Hadamard 所发现的这一现象的重要性。Poincaré^[2] 讨论了对初始条件敏感依赖与一硬球动力系统和天气预报的关系。

早期的混沌发现并没有对物理学产生持久的影响。这一新的思想被遗忘, 并不得不在很久以后再被独立地发现。在数学方面, Hadamard 和 Poincaré 的工作, 由于 Kolmogorov、Smale 和许多其他人的贡献, 导致直到今天未曾间断的进步。顺便说一句, 在动力系统理论的数学发展中重要的一步是各态历经理论的创立。对各态历经理论来说, 源于物理学的思想是重要的。

混沌系统的时间演化是尤其复杂的和看起来不规则的。确实, 规则的时间演化是可以预测的因而不是混沌的。在 70 年代对复杂和不规则时间演化的兴趣在物理学家中进一步增加, 产生了目前所称的混沌理论, 这时已有的各类新的科学工具对 Poincaré 来说是不可企及的。其中之一就是电子计算机, 它使得 Lorenz 在 1963 年计算了一个混沌的时间演化, 并以我们现在所称的奇怪吸引子的形式来显示这一时间演化。其他的工具是数学方面的, 如各态历经理论。最后, 还有一些新的实验工具, 例如, 它们使得流体动力湍流产生的仔细研究成为可能。正是这种实验研究证明了流体动力学湍流是混沌的, 正如我们现在所说的, 与 Ruelle 和 Takens^[4] 在 1971 年所做的断言对应, 它可以用奇怪吸引子来描述。

在这里必须指出, 无论它多么高明和有洞察力, 庞加莱关于混沌的物理思想是在科学哲学的水平上。由于新的工具可以利用, 目前我们在物理学中对混沌的理解是处在定量科学的水平上。目前混沌在生物学、经济学等方面的应用是处在科学哲学的水平上, 不久将达到定量科学的水平。

到目前为止我已经强调了这一思想即混沌的研究包括将已有

的数学工具用于对自然现象的认识上。但在相反的方向即从混沌的物理学到数学也有重要的影响。新的数学工具被创造，因为它们是理解混沌所必需的。或者来自于混沌的新思想被发现有很重要的数学内涵，并且自身得到发展。事实上，物理学和数学思想间的界限经常是不清楚的，同一个人有时以物理学家的身份出现，有时是作为数学家出现的。

在下面的部分，我将给出一些混沌在其中发挥了重要作用的某些数学方面的进展的一个清单。这个清单并不企图包罗万象，其中各项的范围和本质也十分不同。

二、洛伦兹吸引子

Smale^[5]的数学研究表明，一个动力系统的轨道在某些情况下渐近于称为公理 A 吸引子的复杂轨道。这一系统的表现是混沌的，由于公理 A 系统可被仔细分析，因而它们提供了十分重要的混沌例子。

混沌的另一个例子是由洛伦兹^[3]在早期的计算机研究中得到。他当时分析了一个由下列方程描述的十分粗糙的对流模型：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\sigma x_1 + \sigma x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_3 + r x_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - b x_3\end{aligned}$$

其中 $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$ 。洛伦兹吸引子是混沌的，但不同于 Smale 的公理 A 混沌吸引子，因为在时间演化中，它包括一个（不稳定的）固定点。有趣的是，当时我们还没有从数学上证明洛伦兹系统的解像我们所想的（混沌）行为。但受这一方程组启发，我们有一个称为“几何洛伦兹吸引子”的模型，Guckenheimer^[6]和 Williams^[7]对此模型进行了详细的数学研究。特别是已经发现当方程组稍加改变时，几何洛伦兹吸引子具有某些守恒性质（从技术的角度讲，即它被证明为共二维结构稳定）。

三、费肯鲍姆分叉

若一动力系统依赖于参数 μ (就像洛伦兹方程组中的参数 σ, r, b)，当 μ 通过某一特定值时，系统的定性行为会发生变化。这种定性行为的变化称为分叉。除了在数学上的用途之外，分叉在应用中起了重要作用。一个例子是 Hopf 分叉，它由吸引周期轨道取代吸引不动点，这就导致动力系统的稳定状态由周期状态所取代。Eberhard Hopf 在 Poincaré 和 Andronov 早期工作的基础上仔细研究了这一分叉，并认识了它与流体动力学的联系。还有一种分叉，它由另一具有两倍周期的吸引周期轨道来取代目前的吸引周期轨道。

许多人已经注意到，有时可以观察到从周期 T 到 $2T, 4T, 8T, \dots$ 等的周期倍增的级串。还有，当 μ 改变后倍周期积累到一极限，就像几何级数一样。费肯鲍姆的巨大功绩在于认识了倍周期级串按几何级数方式进行的原理^[8,9]。事实上，不同的周期倍增是同一现象按不同比例的缩小形式。重正化群理论的思想提供了倍周期级串的解答。因而，这就是一个新的数学家们能够列入表中的，未曾料到的一类分叉。实际上，要获得一个数学上值得信赖的理论，除了费肯鲍姆的工作外还需要另外一些工作。Lanford^[10,11]，Collet Eckmann 和 Koch^[12] 提供了这样的工作。

四、流体动力学湍流

称为湍流的现象既复杂又难以分析。我们所知道的关于湍流的知识来源于实验的、数值的和数学的研究。湍流有一个重要特征，正如 Ruelle 和 Takens^[4] 所断言，它是混沌的：这已在湍流开始出现时由实验观察到的奇怪吸引子、费肯鲍姆分叉等所证明。当时尚没有纳维 - 斯托克斯方程中混沌的数学证明（一旦得到这样的证明，它将不会产生大的惊奇）。从认识论的观点来看，我们现在处在一个十分有趣的境地：我们坚定地相信某一数学事实（纳维 - 斯托克斯方程解中混沌的存在），而我们的信赖却是基于

实验现象。

在与混沌相关的湍流理论中出现了另一个在概念上重要的问题：自然尺度或 SRB 尺度问题。考虑一个在与时间无关的某些外力作用下保持为湍流运动的流体动力学系统。我们可以期望对湍流运动定义一个时间平均。时间平均对应于“整体平均值”，即对应于时间演化（事实上为各态历经）过程的一个几率尺度不变量。相关的各态历经尺度在描述运动的吸引子上有一个支集。在 Hopf-Landau 湍流理论的框架中，吸引子是准周期的而且只携带一个不变尺度。但一个奇怪吸引子携带无数多个不同的各态历经尺度！我们应该用哪一个来表示时间平均呢？碰巧对某些特定动力系统，按照所谓自然或 SRB 尺度，对这一问题我们有合理的答案（见下一节）。但与这一答案无关，重要的是在概念上认识到有这样一个问题存在。很多年来，人们试图“通过求解 Hopf 方程”（在纳维-斯托克斯时间演化中这一方程只表示几率尺度的不变性）来决定时间平均。现在已经清楚还需要 Hopf 方程以外的基本要素来决定时间平均。（对这一问题来说，方程的截断和高斯分布假定不可能是问题的答案，见 Ruelle^[3]）

五、可微分动力系统的各态历经理论：公理 A 系统

正如我们刚才所见，对混沌的物理学来说理解可微分时间演化的不变几率尺度的结构是十分重要的。这一课题也有重大的数学的影响；它是一个称为可微分动力系统各态历经理论的丰富而又困难的研究领域。

从这一观点出发最早被研究的系统是 Smale 的公理 A 系统^[5]。我们这里不必对这些系统下定义。不管怎么说它们是可以研究的，因为存在“Markov 分割”。由 Sinai 和 Bowen 提出的 Markov 分割，通过一个（从有限的起点）开始的符号序列提供了流形上点的编码：

$$x \rightarrow (\cdots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \cdots)$$

时间演化 $x \rightarrow fx$ （在离散时间时）对应于平移算子：

$$(\cdots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \cdots) \rightarrow (\cdots, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots)$$

(在连续时间事件时情况要稍微复杂些)。如果我们把 ξ_i 解释成是旋转值, 那么序列

$$(\cdots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \cdots)$$

就可看成是一维经典自旋系统的一个排列。从统计力学的意义上看, 对于一公理 A 动力系统, 时间不变的几率尺度对应于一维自旋系统的平移不变状态 (时间不变量由空间不变量取代)。碰巧, 我们已有的平衡统计力学中有关吉布斯状态方程的知识正是理解公理 A 动力系统时间不变几率尺度所必需的。你可以把这看成是一个小的科学奇迹。你也可以把平衡统计力学看成是对不变尺度进行了深入分析的惟一科学领域。因而很自然这一分析在这时也会产生有用的结果。

例如, Sinai^[14], Ruelle^[15], Bowen 和 Ruelle^[16] 他们得到了下面的结果。如果 (f^t) 是一在 (紧缩) 流形 M 上的公理 A 时间演化, 那么按照 M 上的光滑测度 (“Lebesgue 测度”) 对几乎每一 $x \in M$ 可观测量 A 的时间平均 (连续函数 $A: M \rightarrow \mathbb{R}$), 即:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} A(f^t x)$$

存在, 且由

$$\int \rho(dy) A(y)$$

给出。这里 ρ 是当 $t \rightarrow \infty$ 时 f^t 所趋向的在吸引子上的几率尺度 (存在有限多个选择)。在吸引子上的尺度 ρ (SRB 尺度) 是一种按时间演化 (f^t) 给定的特定的吉布斯尺度。

因而引出 SRB 尺度的思想部分来自于数学部分来自于物理学。有趣的是物理方面的思想来自于两个完全不同的地方: 一方面对混沌的兴趣提供了动机, 另一方面平衡统计力学的工具提供了问题的解。应该注意到统计力学在这里只在数学的水平上涉及: 在一维格栅自旋系统的物理学与公理 A 动力系统的混沌物理学之间没有相互的关系。

六、可微分动力系统的各态历经理论：广义系统

从 Oseledec^[17]和 Pesin^[18,19]的工作开始,公理 A 系统的各态历经理论已经推广到了更为广义的情况。这导出许多进展,因过于专业化这里就不给出。但值得提及的是,这些进展发生在混沌的思想得到流行的时代,它们对数学的研究产生了重要的影响。例如,由 Frederickson 等人^[20]提出的关于维数与 Lyapunov 指数之间关系的假定引出了由 Ledrappier 提出的严格的不等式^[21]。Ledrappier 和 Yong 扩展了 SRB 测度的概念,他们在一篇优秀的数学论文中证明了它与其他定义的等价性^[22]。详细内容请读者参考 Eckmann 和 Ruelle 所写的评论文章^[23]。在这个广大领域内的研究主要有两个方面。一方面,它表明来自于物理学的思想是如何给数学提供了重要启发;另一方面,它更清楚地表明适当的数学定理的证明(事实上是很难的技术工作)还是必须的,而且它不能被数值的计算机试验或物理方面的试验所替代。

七、区间的平方映射和 Hénon 吸引子

对现在称为混沌系统的最初数学研究是对双曲型系统的:Smale 的公理 A 系统是双曲型的,洛伦兹吸引子本质上也是双曲型的。在 Pesin 的工作之后发展起来的动力系统的各态历经理论证明一个非常广义的结论:与 Pesin 理论中的双曲性对应的事实是,各态历经尺度没有特征指数(或李雅普诺夫指数)为 0。而 Pesin 的理论本质上是非自治的。

那么对于给定的系统我们能做什么呢?考虑区间 $[0, 1]$ 到自身的映射 $x \mapsto ax(1-x)$ ($0 < a \leq 4$)。这一映射(当 a 接近 4 时)不是双曲型的。将会证明对它的研究会引出很多困难的问题。什么时候这一系统是混沌的?在这一领域最初的突破是 Jakobson 的工作^[24],他证明了下面的结论:存在一个参数 a 值的正的 Lebesgue 测度集,使得在 $[0, 1]$ 上关于 Lebesgue 测度的系统 $x \mapsto ax(1-x)$ ($0 < a \leq 4$) 有绝对连续的各态历经尺度。

Benedicks 和 Carleson^[25] 改进了 Jakobson 的证明。现在我们知道有争议的各态历经尺度可以被看成有正的特征指数，因而系统确实是混沌的。

研究 α 接近 4 时的映射 $x \mapsto \alpha x(1-x)$ 时基本的困难是：这一映射大部分是拉伸的，而在 x 接近 $1/2$ 时它事实上是收缩的：此时我们没有双曲性。 α 值的某些的“坏”的区间使得轨道重复地通过接近 $1/2$ 的点，因而它毁坏拉伸性。但证明在所有这些“坏”区间之外还有一些 α 的值，这些值的集合有 Lebesgue 测度 > 0 。这需要有仔细的“瑞士钟表工”式的工作，才能导出上述结果。

Benedicks 和 Carleson^[26] 随后继续研究了一个更难的问题，即平面 R^2 到自身的某些平方映射，称为 Hénon 映射。本质上讲，存在雅可比矩阵为常数的 R^2 的平方映射，而 Hénon 数值证明了它们中的某些有奇怪吸引子。这正是 Benedicks 和 Carleson 成功地用数学证明了的。他们的工作随后由 Mora 和 Viana^[27] 作了改进和扩展。

为了正确地看问题，我要强调的是本节中提到的数学工作是十分艰难的，我们只是接触了从方程中得到的、一些最简单的混沌的例子，这些方程是人们容易写下来的。这表明了我们对混沌的理性支配能力仍然是多么的小：问题真的是非常困难，它提醒我们应该谦虚。

八、Zeta 函数

现在是对我所列的混沌与数学相互作用例子的清单进行总结的时候了。我并没有试图使这一清单包罗万象，但我尽量让它们各不相同且丰富多彩，用以说明数学与其他科学之间的联系可能具有各种不同的形式。我的最后一个例子是动力 zeta 函数。

如果 $f: M \mapsto M$ 是一个映射， $\varphi: M \mapsto C$ 是 M 上的连续函数，定义如下形式幂级数：

$$\zeta(z) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \sum_{x \in \text{Fix } f^m} \prod_{k=0}^{m-1} \varphi(f^k x)$$

其中, $\text{Fix} f^n = \{x \in M : f^n x = x\}$ 。经常出现 $\zeta(z)$ 收敛并能在一个或多或少扩展的区域推广为亚纯函数。 ζ 的分析特性和其极点位置反映映像 f 的细微特性。动力 zeta 函数是由 Artin 和 Mazur^[28]、Smale^[5] 仿照 Riemann zeta 函数引入并由我加以综合的。我的兴趣在于是否可能利用统计力学的方法来研究这些函数^[29,30]。Parry 和 Pollicott^[31] 证明了某个特定的 zeta 函数（与负曲率流形上的测地流有关）具有类似于 Riemann zeta 函数的那些分析特性，因此大数定理的证明可以模仿。他们用这种方式获得了一个“质数定理”，用来描述具有负曲率（不必为常数）的紧缩流形上封闭测地学长度的分布。这是一个漂亮的数学结果，但并不与混沌直接有关。不过通常动力学研究中的数学进步总是与有趣的物理上的发展相联系的。在这一方面我们还要提到 Cvitanović 及其合作者^[32] 所做的与 Feigenbaum 算子有关的 zeta 函数方面的重要工作。

与 zeta 函数有关的另一个进步是共振的研究。如果你对时间自相关函数取傅利叶变换就得到所谓的功率谱。在某些情况下至少（对公理 A 系统）你能证明功率谱可分析地推广到复数，其极点对应于 zeta 函数的极点。这些极点可解释为动力共振，对它们的研究有助于我们理解混沌的本质（见 Pollicott^[33]，Ruelle^[34] 和 Baladi 等^[35]）。

目前我们对 zeta 函数（和功率谱）分析结构的理解只限于特别类型的动力系统。对这一课题的数学兴趣引起了许多研究（见 Baladi 和 Keller^[36]，Ruelle^[37] 的近期工作）。我们可以期望所获得的这些结果将增进我们对混沌物理学的进一步了解。

九、结论

我的谈话的标题（混沌对数学的冲击）说的是一种单向的关系，而数学是接受端。资深的数学家可能会从相反的方向来充分辩论，并引用数学是其他科学的“皇后和仆人”的口号。我想要表明的是，在目前的情况下，数学与物理学（或者更广泛地说自

然科学)的关系比我们事先想像的更微妙、更有趣。物理学家们会去做数学家们的事,相反数学家也可以去做物理学家们的工作。物理学给数学提出了一些问题,也给数学提供了一些答案。数学也为其自身提供了这些问题的思考方法,它比现成的答案和定理更重要。

参 考 文 献

- [1] J. Hadamard. "Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques." *J. Math. Pures et Appl.* 4: 27—73 (1898).
- [2] H. Poincaré. *Science et méthode*. Ernest Flammarion, Paris (1908).
- [3] E. N. Lorenz. "Deterministic Nonperiodic Flow." *J. Atmos. Sci.* 20: 130—141 (1963).
- [4] D. Ruelle and F. Takens. "On the Nature of Turbulence." *Commun. Math. phys.* 20: 167—192 (1971).
- [5] S. Smale. "Differentiable Dynamical Systems." *Bull. Amer. Math. Soc.* 73: 747—817 (1967).
- [6] J. Guckenheimer. "a Strange, Strange Attractor." *The Hopf Bifurcation Theorem and its Applications*, pp. 368—381, J. E. Marsden and M. McCracken, eds. Springer, New York. (1976).
- [7] J. Guckenheimer and R. F. Williams. "Structural Stability of Lorenz Attractors." *Publ. Math. IHES* 50: 59—72 (1979).
- [8] M. J. Feigenbaum. "Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations." *J. Statist. Phys.* 19: 25—52 (1978)
- [9] M. J. Feigenbaum. "The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations." *J. Statist. Phys.* 21: 669—706 (1979).
- [10] O. E. Lanford. "A Computer-assisted Proof of the Feigenbaum Conjectures." *Bull. Amer. Math. Soc.* 6: 427—434 (1982).
- [11] O. E. Lanford. "A Shorter Proof of the Existence of the Feigenbaum Fixed Point." *Commun. Math. Phys.* 96: 521—538 (1984)
- [12] P. Collet, J. -P. Eckmann, and H. Koch. "Period-doubling Bifurcations for Families of Maps on R^n ." *J. Statist. phys.* 25: 1—14 (1981).

- [13] D. Ruelle. "What are the Measures Describing Turbulence?" *Progr. Theoret. Phys. Suppl.* 64: 339 – 345 (1978).
- [14] Ia. G. Sinai. "Gibbs Measures in Ergodic Theory." *Uspekhi Mat. Nauk* 27/4: 21 – 64 (1972). Eng. trans. *Russian Math. Surveys* 27/1: 21 – 69 (1972).
- [15] D. Ruelle. "A Measure Associated with Axiom A Attractors." *Amer. J. Math* 98: 619 – 654 (1976).
- [16] R. Brown and D. Ruelle. "The Ergodic Theory of Axiom A Flows." *Inventiones Math.* 29: 181 – 202 (1975).
- [17] V. I. Oseledec. "A Multiplicative Ergodic Theorem. Lyapunov Characteristic Numbers for Dynamical Systems." *Trudy Moskov. Math. Obšč.* 19: 179 – 210 (1968). Eng. trans. *Trans. Moscow Math. Soc.* 19: 197 – 221 (1968).
- [18] Ya. B. Pesin. "Invariant Manifold Families which Correspond to Nonvanishing Characteristic Exponents." *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 40/6: 1332 – 1379 (1976). Eng. trans. *Math. USSR Izv.* 10/6: 1261 – 1305 (1976).
- [19] Ya. B. Pesin. "Lyapunov Characteristic Exponents and Smooth Ergodic Theory." *Uspeki Mat. Nauk* 32/4 (196), 55 – 112 (1977). Eng. Trans. *Russian Math. Surveys* 32/4: 55 – 114 (1977).
- [20] P. Frederickson, J. L. Kaplan, E. D. Yorke, and J. A. Yorke. "The Lyapunov Dimension of Strange Attractors." *J. Diff. Equ.* 49: 185 – 207 (1983).
- [21] F. Ledrappier. "Some Relations between Dimension and Lyapunov Exponents." *Commun. Math. Phys.* 81: 229 – 238 (1981).
- [22] F. Ledrappier and L. S. Young. "The Metric Entropy of Diffeomorphisms. Part I. Characterization of Measures Satisfying Pesin's Formula; Part II. Relations between Entropy, Exponents and Dimension." *Ann. of Math.* 122: 509 – 539. 540 – 574 (1985).
- [23] J. -P. Eckmann and D. Ruelle. "Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors." *Rev. Mod. Phys.* 57: 617 – 656 (1985).
- [24] M. V. Jakobson. "Absolutely Continuous Invariant Measures for One-Parameter Families of One-Dimensional Maps." *Commun. Math. Phys.* 81: 39 –

- 88 (1981).
- [25] M. Benedicks and L. Carleson. "On Iterations of $1 - ax^2$ on $(-1, 1)$." *Ann. of Math.* 122: 1 - 25 (1985).
 - [26] M. Benedicks and L. Carleson. "The Dynamics of the Hénon Map." *Ann. of Math.* 133: 73 - 169 (1991).
 - [27] L. Mora and M. Viana. "Abundance of Strange Attractors." Preprint.
 - [28] M. Artin and B. Mazur. "On Periodic Points." *Ann. of Math.* 81: 82 - 99 (1965).
 - [29] D. Ruelle. "Zeta-functions for Expanding Maps and Anosov Flows." *Inventiones math.* 34: 231 - 242 (1976).
 - [30] D. Ruelle. "Generalized Zeta-Functions for Axiom A Basis Sets." *Bull. Amer. Math. Soc.* 82: 153 - 156 (1976).
 - [31] W. Parry and M. Pollicott. "An Analogue of the Prime Number Theorem for Closed Orbits of Axiom A flows." *Ann. Math.* 118: 573 - 591 (1983).
 - [32] R. Artuso, E. Aurell, and P. Cvitanović. "Recycling of Strange Sets. I Cycle Expansions; II Applications." *Nonlinearity* 3: 325 - 359, 361 - 386 (1990).
 - [33] M. Pollicott. "On the Rate of Mixing of axiom A Flows." *Invent. Math.* 81: 413 - 426 (1985).
 - [34] D. Ruelle. "Resonances for Axiom A flows." *J. Differential Geometry* 25: 99 - 116 (1987).
 - [35] V. Baladi, J. -P. Eckmann, and D. ruelle. "Resonances for Intermittent Systems." *Nonlinearity* 2: 119 - 135 (1989).
 - [36] V. Baladi and G. Keller. "Zeta Functions and Transfer Operators for Piecewise Monotone Transformations." *Commun. Math. Phys.* 127: 459 - 477 (1990).
 - [37] D. Ruelle. "An Extension of the Theory of Fredholm Determinants." *Publ. Math. IHES* 72: 175 - 193 (1990).

Kazuyuki Aihara

摘 要

从神经网络的观点对确定性混沌进行评述。首先，神经膜中的混沌动力学在枪乌贼巨轴突中得到实验证实，在 Hodgkin-Huxley 方程中得到数值证实。基于神经膜的性质提出了一个具有这种混沌动力学的简单的神经细胞模型。其次，对生物学和人工神经网络中的混沌现象进行评述。最后，对混沌和信息处理间可能的联系进行讨论。

一、引言

人的大脑不仅具有高的符号和逻辑处理能力，而且具有高的图像和直观处理能力。人工神经计算的研究是为人的后一种能力的技术实现寻找线索，在计算机发展的现阶段这是不容易的。

人工神经计算是用由许多神经细胞类的元素组成的人工神经网络作并行分布式信息处理^[1,2]。在人工神经计算中，一个重要的特征是用人工神经网络的非线性模拟动力学进行动态计算。即非线性神经动力学本身是人工神经网络中的计算过程。人工神经网络的典型例子有 Hopfield 神经网络^[3]和反传播神经网络^[4]，它们是人工神经计算的最新动向中最为流行的。但有批评认为这两

种网络过于简单,因为它们仅仅是收敛于动力学一平衡点的梯度下降系统,而大脑似乎是更动态的。

既然神经网络可被归入耗散动力系统,正如 Hodgkin-Huxley 方程的等价电路模型所清楚阐述的,长期行为不仅以平衡点的吸引子的概念为特征,还以极限圈、环和奇怪吸引子为特征。在本文中,重点放在神经网络中的混沌现象上。

二、神经膜中的混沌动力学

从枪乌贼巨轴突实验和 Hodgkin-Huxley 方程数值解两方面已经阐明,确定性混沌不仅在受正弦力激励的振荡神经膜中^[6~9],而且在受脉冲序列力激励的静止神经膜中^[9~11]容易重复观察到。在图 1 和图 2 中分别给出了在枪乌贼巨轴突和 Hodgkin-Huxley 方程中出现的受迫混沌。图 3 和图 4 分别显示了通过周期倍分叉和二维环破裂通向混沌的路径^[9,12,13]。

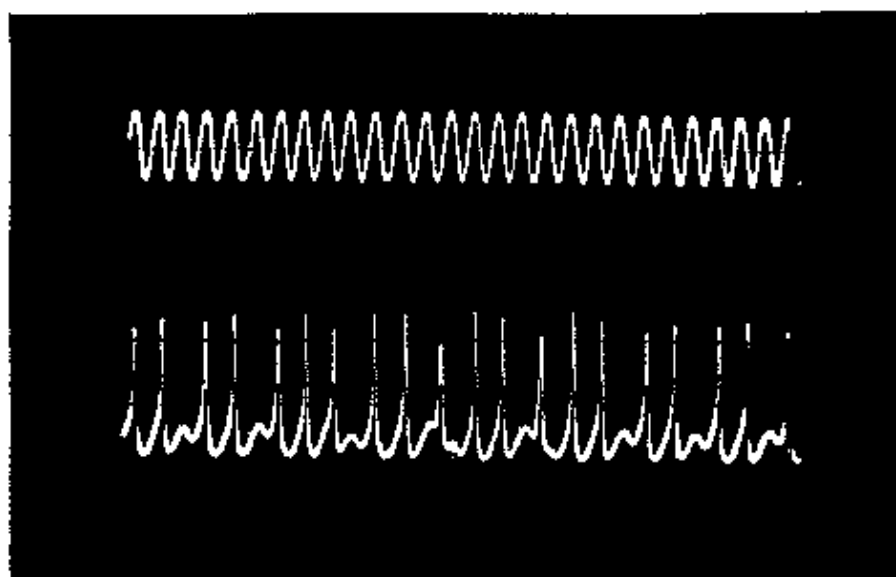
虽然混沌响应显然是复杂的,但已证明用膜位函数在适当的庞加勒截面可得到近似一维回归映射^[9,14,15]。图 5 显示了用 Hodgkin-Huxley 方程得到的一个回归映射^[14]。而且还已证明这种一维映射可用一种同步坐标的概念来解释^[16,17]。

神经膜的混沌响应可定性地用下面的神经细胞模型^[15,18]描述:

$$x(t+1) = f[s(t) - \alpha \sum_{r=0}^t k^r g\{x(t-r)\} - \theta] \quad (1)$$

这里 $x(t+1)$ 是离散神经细胞在时刻 $t+1$ 的模拟输出; f 是对应于连续型阈值界限^[19]的连续输出函数,假定为具有陡度参数 ϵ 的逻辑函数 $f(y) = 1/[1 + \exp(-y/\epsilon)]$; $s(t)$ 是 t 时刻激励的强度; α 为一正参数; k 为在 0 与 1 之间的不应期 (refractoriness) 衰减因子; g 是描述模拟输出与后续激励不应期的大小之间关系的函数; θ 是阈值。虽然为了精确地描述实验观察到的响应须用复杂形式的函数 g [18, 20], 但为了简单,在本报告中 g 假定为单位函数。

a



b

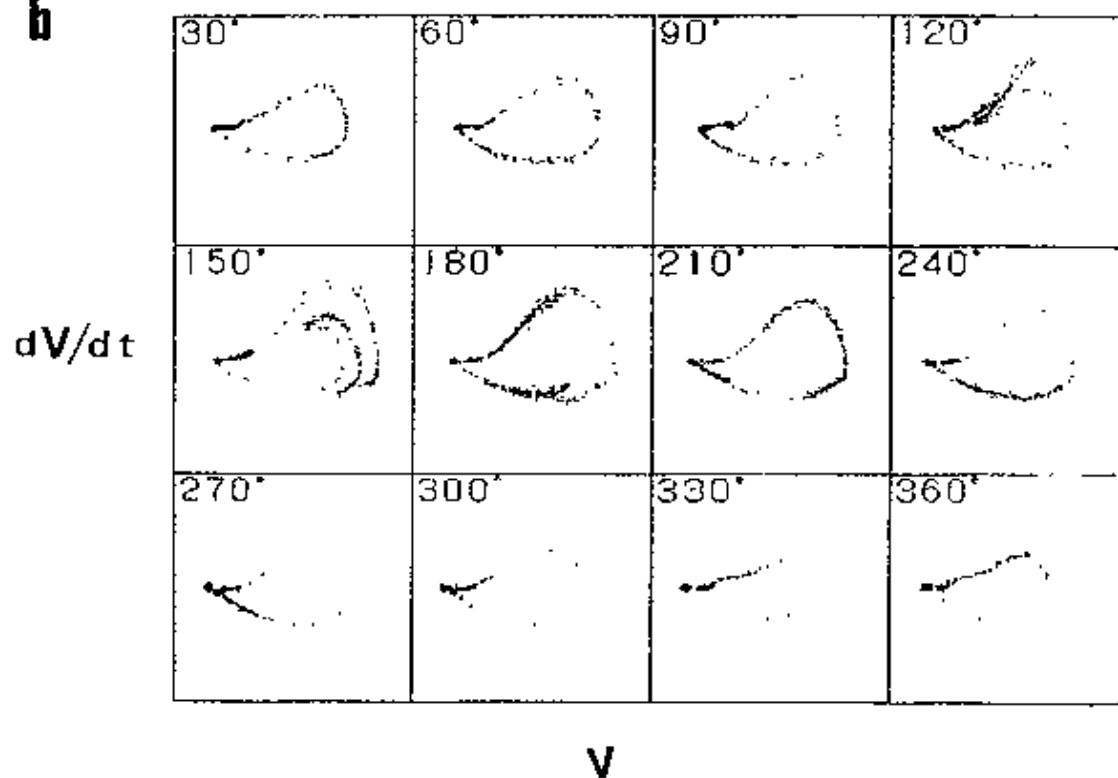


图1 自维持振荡状态下枪乌贼巨轴突受正弦力激励时实验观察到的混沌振荡^[7~9]。(a)波形(上:激励,下:膜位函数的响应);(b)庞加莱截面,每个截面中的数值表示正弦力的相位

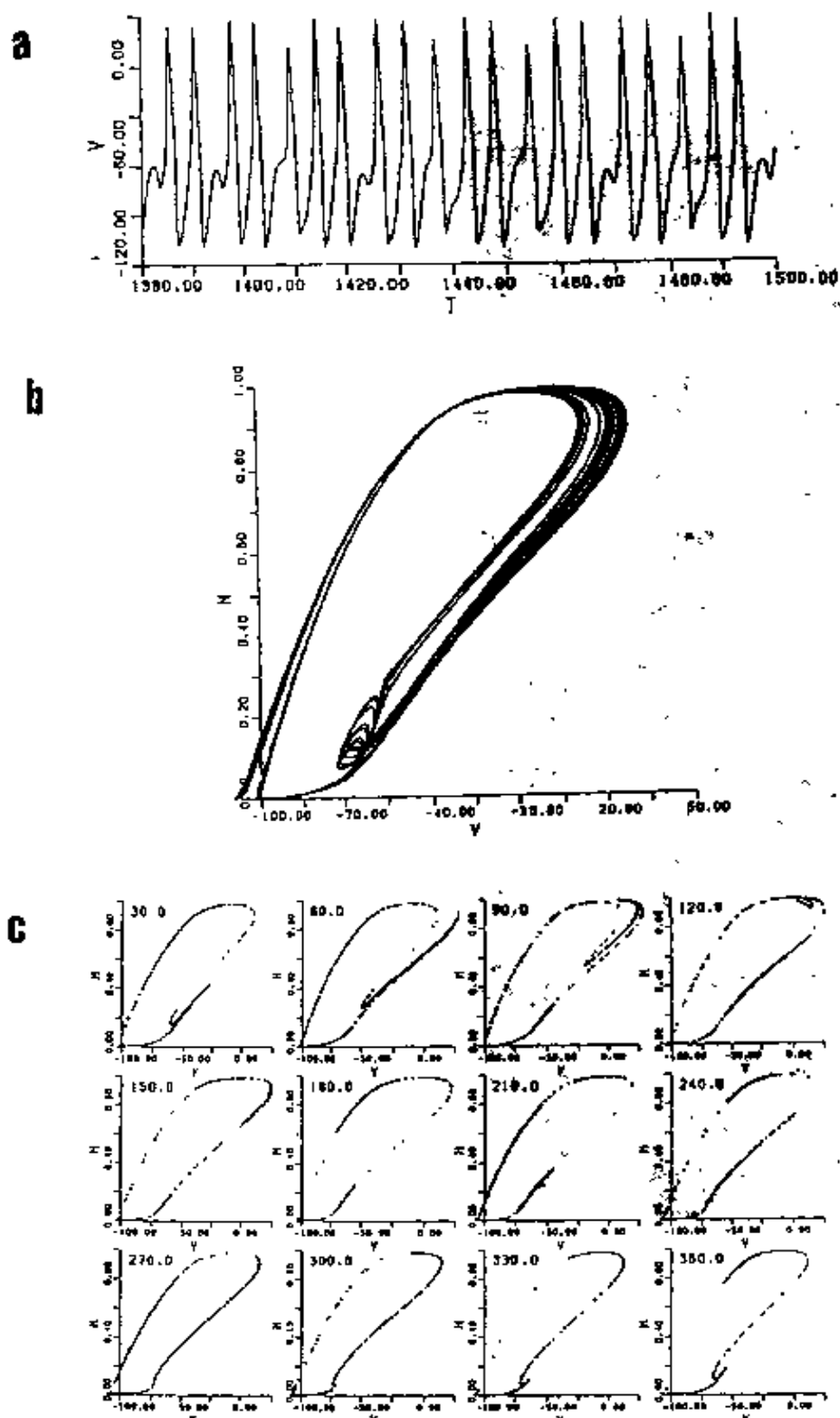


图2 在与图1相似的条件下用 Hodgkin-Huxley 方程数值求得的混沌振荡。(a)膜位函数的波形;(b)投影到 V - m 平面上的轨迹;(c)庞加莱截面

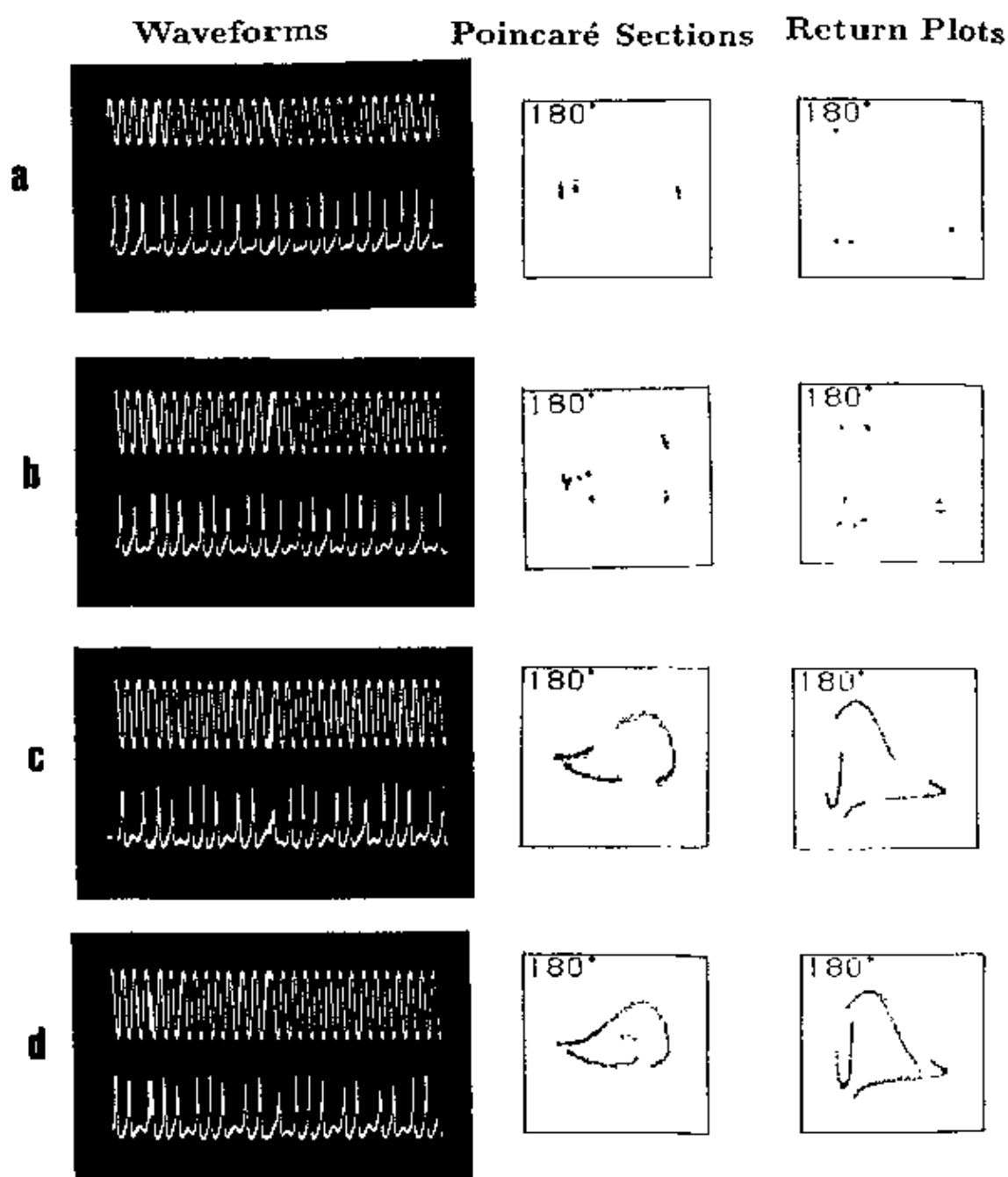


图3 用枪乌贼巨轴突实验观察到的通过倍周期分叉通向混沌振荡的路径。其中(a)a 是 3/4 同步振荡,(b)6/8 同步振荡,(c)有四岛吸引子的振荡,(d)混沌振荡^[9,13]。

对混沌的产生至关重要是，输出函数 f 不是全都或全不像 McCulloch-Pitts 模型^[21]那样不连续，而是连续的，因为正是神经膜中这种连续类型的阈值引起倾向于混沌动力学的轨道不稳定性。方程 (1) 中 $\alpha \sum_{r=0}^t k_r g[x(t-r)]$ 项表示神经膜的不应期。

Waveforms

Poincaré Sections

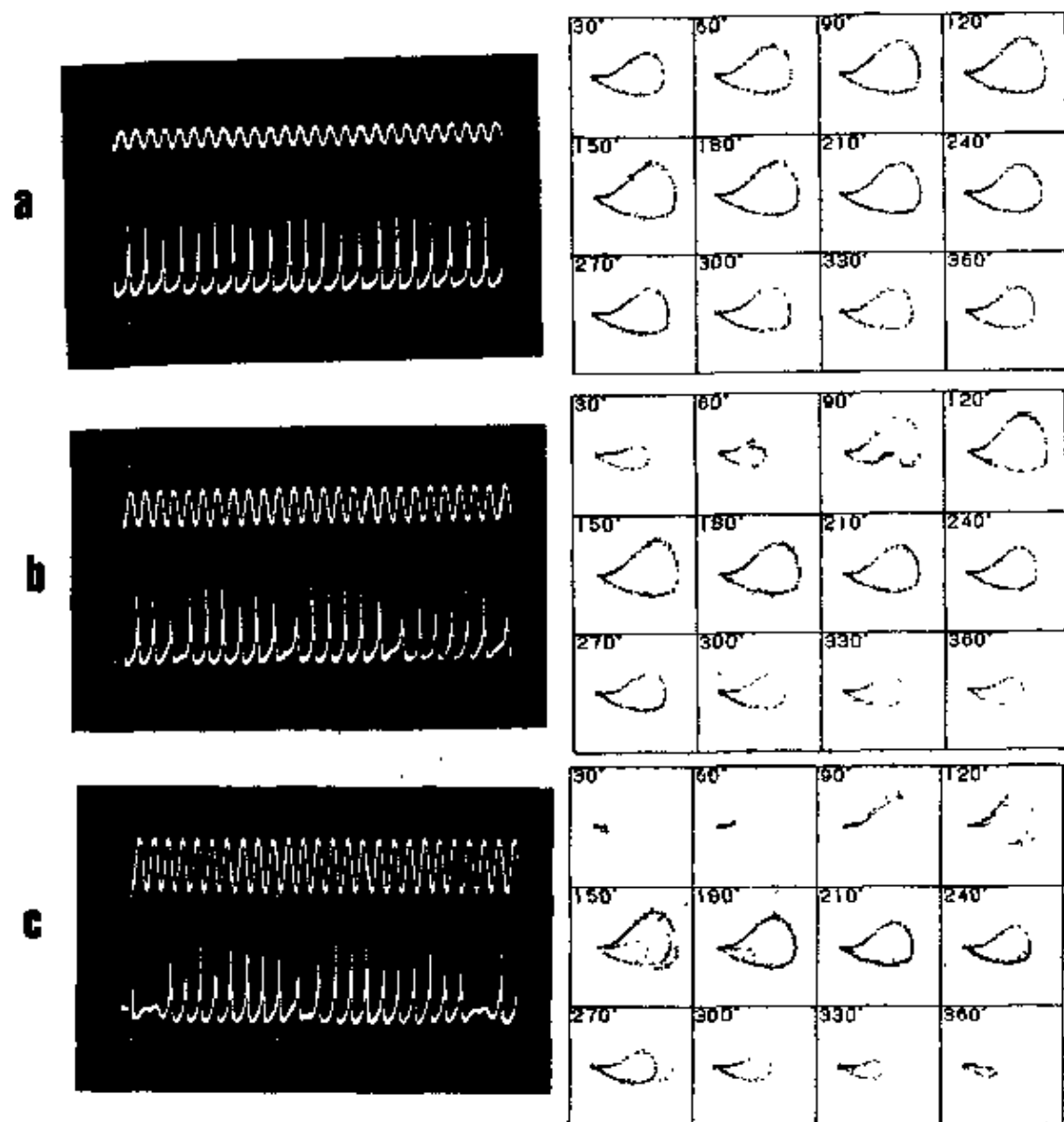


图4 用枪乌贼巨轴突实验观察到的通过二维环破裂通向混沌振荡的路径。其中(a)准周期振荡,(b)正在变形的二维环,(c)混沌振荡^[12,13]

这里还假定由已产生的输出系列引起的麻木效应以指数衰减叠加^[22]。

方程 (1) 变为如下较简单的一维映射^[18]：

$$y(t+1) = ky(t) - ag\{f[y(t)]\} + a \quad (2)$$

这里 $y(t+1)$ 是由 $y(t+1) = s(t) - \alpha \sum_{r=0}^t k^r g[x(t-r)] - \theta$;

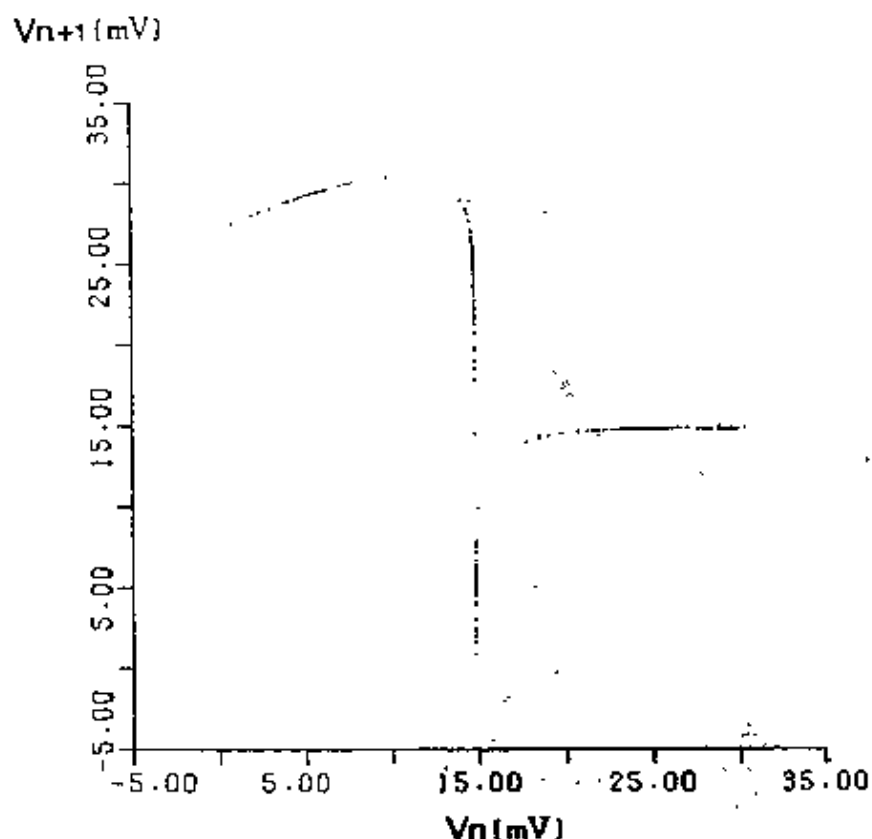


图5 在静止膜受周期脉冲激励的条件下用 Hodgkin-Huxley 方程得到的回归映射。周期脉冲振幅 $61.15 \mu\text{A}/\text{cm}^2$, 脉冲宽度 0.5ms , 脉冲间隙 5.52ms 。温度假定为 10.0°C [14]

$a = (A - \theta)(1 - k)$, A 是假定随时间分布为常数的激励强度。神经细胞的输出 $x(t+1)$ 用 $y(t+1)$ 表示如下:

$$x(t+1) = f[y(t+1)] \quad (3)$$

在图6和图7中分别给出了方程(2)的解的例子和分叉结构。因为方程(2)的混沌神经细胞模型简单, 所以这种神经细胞模型和由这种神经细胞模型组成的神经网络容易用电子电路实施^[23,24]。在图8中显示电子电路模型的奇怪吸引子。

三、生物学神经网络中的混沌

正如前一节中总结的, 在神经膜的微观水平上证实了混沌动力学的存在。因而可以理解大脑是由混沌次系统或神经细胞组成的非线性网络, 而神经细胞又由具有混沌动力学的神经膜非线性

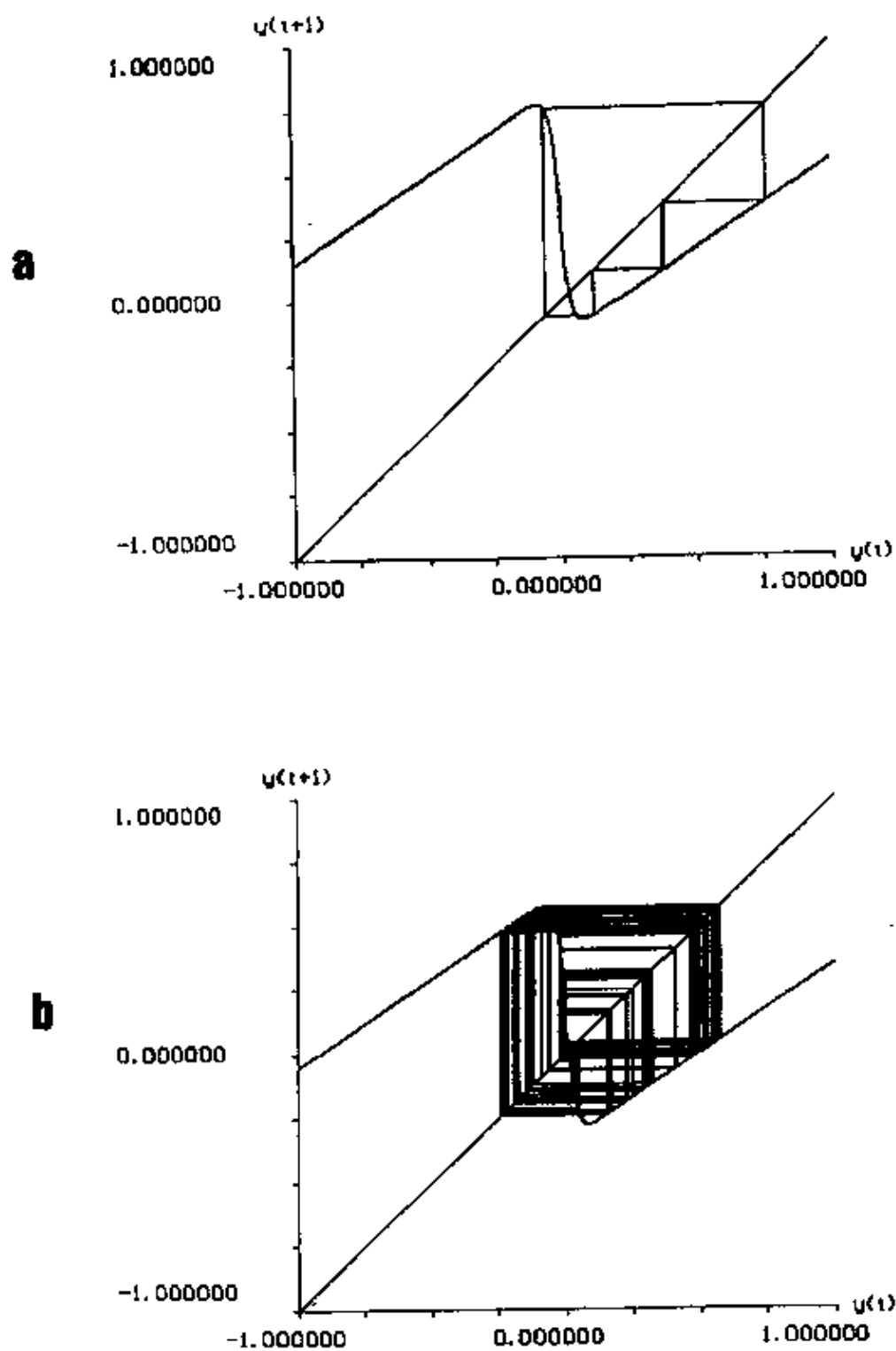


图6 方程(2)的几个算例。(a) $k=0.7$, $\epsilon=0.02$, $\alpha=0.85$ 时 3/4 同步响应。(b) $k=0.7$, $\epsilon=0.02$, $\alpha=0.65$ 时的混沌响应

部件组成。而且,在其他生物膜中也观察到了类似的混沌现

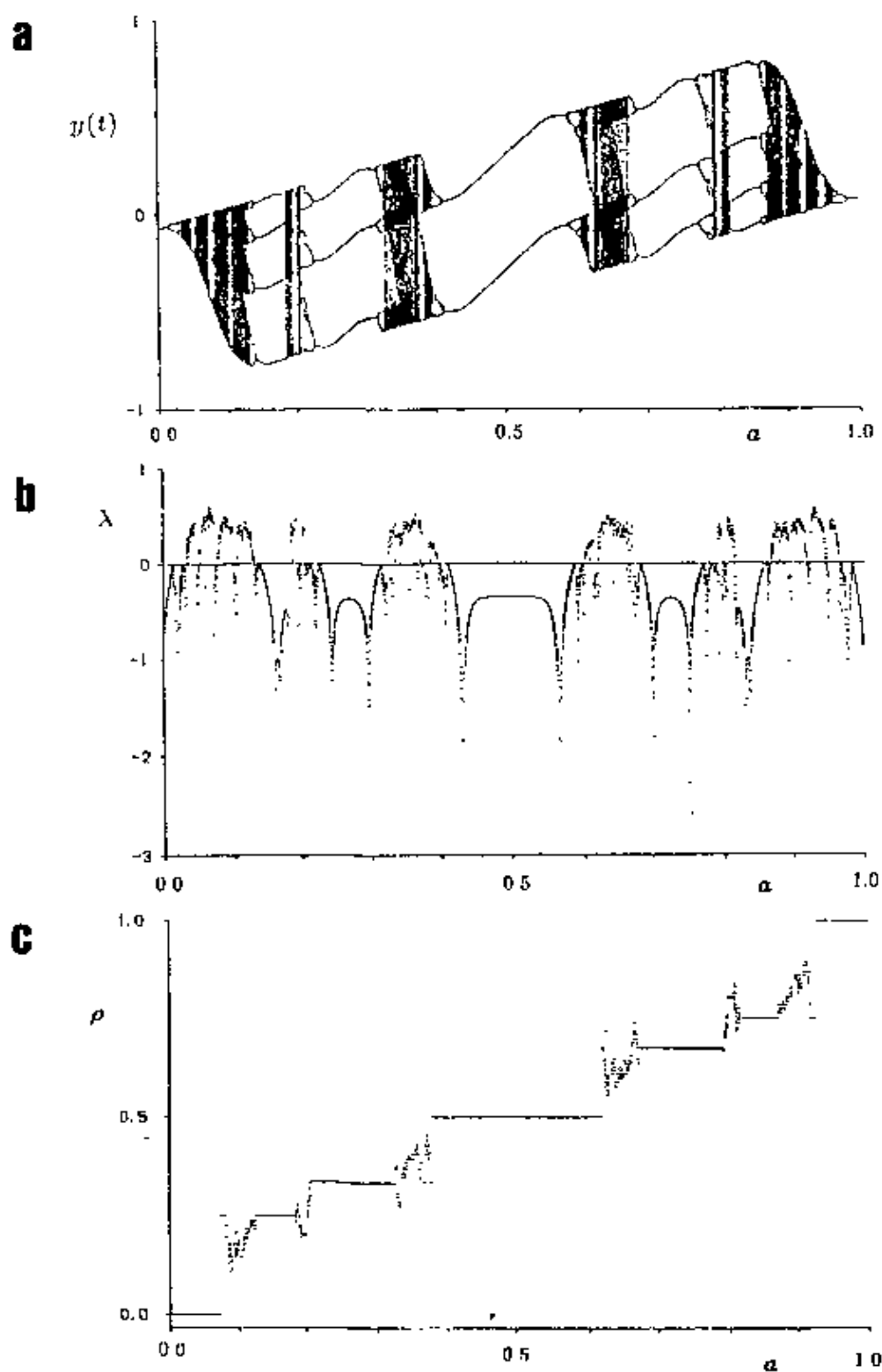


图7 当 $k=0.7$, $\epsilon=0.02$ 时, 从 0 到 1 改变参数 α 所得方程 (2) 的分叉结构。(a) 分叉图; (b) 李雅普若夫指数; (c) 平均点燃率

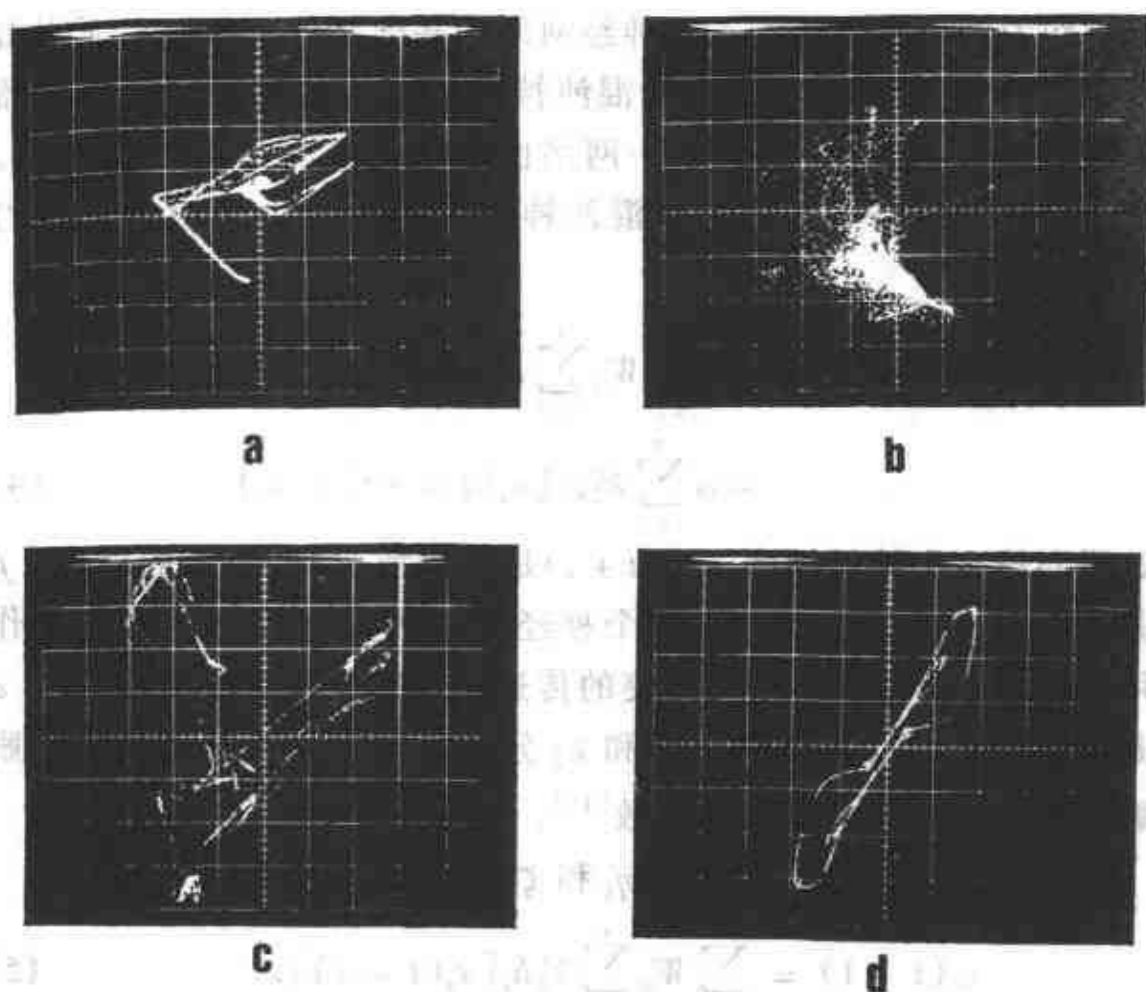


图 8 用混沌神经网络的电子电路模型观察到的奇怪吸引子象^[25~28]。

利用实验数据通过计算确定性混沌的系数如关联维度和李雅普罗夫指数，对电脑成像（*EEG*）和磁脑成像（*MEG*）宏观水平上的混沌现象也进行了研究^[29~39]。结果显示在宏观水平上也存在确定性混沌。

最近在猫的视觉皮层中发现了有趣的振荡现象^[40~42]。这类振荡对澄清大脑中微观混沌与宏观混沌的行踪不明的联系显得重要。

四、人工神经网络中的混沌

为理解网络中的混沌特性已提出了一些具有混沌动力学的神经和类似网络的有趣模型^[43~63]。

作为例子, 也作为人工神经网络的基础部分, 我们来证明由方程 (2) 模型推广后得到的混沌神经模型所组成的相联存储器网络的特性^[15,18,64,65]。这一网络由 100 个混沌神经细胞组成。在这个神经网络中, 第 i 个混沌神经细胞的动力学由方程 (4) 描写^[15,18];

$$x_i(t+1) = f_i \left(\sum_{j=1}^{100} W_{ij} \sum_{r=0}^t k_1' h_j[x_j(t-r)] - \alpha \sum_{r=0}^t k_2' g_i[x_i(t-r)] - \theta_i \right) \quad (4)$$

这里对第 i 个神经细胞, $x_i(t+1)$ 是在离散时刻 $t+1$ 的输出, f_i 是连续输出函数, W_{ij} 与第 j 个神经细胞的关联权, h_j 是传播作用势中第 j 个混沌神经元轴突的传递函数, g_i 是不应期函数, α 是尺度参数, θ_i 是阈值, k_1 和 k_2 分别是来自其他神经细胞激励影响和不应期影响的衰减参数^[15]。

我们定义两个内部状态 η_i 和 ζ_i 如下:

$$\eta_i(t+1) = \sum_{j=1}^{100} W_{ij} \sum_{r=0}^t k_1' h_j[x_j(t-r)], \quad (5)$$

$$\zeta_i(t+1) = -\alpha \sum_{r=0}^t k_2' g_i[x_i(t-r)] - \theta_i. \quad (6)$$

在按因子 k_1 和 k_2 呈指数时间衰减的假设下^[15], 方程 (5) 和 (6) 可简化成下列方程:

$$\eta_i(t+1) = k_1 \eta_i(t) + \sum_{j=1}^{100} W_{ij} h_j[x_j(t)], \quad (7)$$

$$\zeta_i(t+1) = k_2 \zeta_i(t) - \alpha g_i[x_i(t)] - \theta_i(1 - k_2). \quad (8)$$

神经细胞的输出用下面的方程计算:

$$x_i(t+1) = f_i[\eta_i(t+1) + \zeta_i(t+1)]. \quad (9)$$

方程 (7)~(9) 的模型是前面产生混沌动力学的神经网络模型的自然延伸, 且容易调整到那些模型^[15,18]。

为了简单起见, 我们假定 $h_j(x) = x$, $g_i(x) = x$ 和 $f_i(y) = 1/[1 + \exp(-y/0.015)]$ 。神经细胞间突触权矩阵定义为自关联

矩阵的和或图 9 (a) 中所示的 4 种模式 $\mathbf{x}^j$ ($j = 1, 2, 3, 4$) 克罗内克尔 (Kronecker) 积^[2,66,67]。图 9 (b) 给出了混沌神经网络中相关动力学的例子。虽然网络的时空行为明显是非周期的, 用突触权存储的 4 种模式被间歇依次唤出。图 10 表明了 (a) 离散时刻 t 网络的输出模式 $\mathbf{x}(t)$ 与已存储的模式 $\mathbf{x}^j$ ($j = 1, 2, 3, 4$) 之间距离 $d[\mathbf{x}(t), \mathbf{x}^j]$ 随时间的变化, (b) 空间平均点燃率 $\rho(t)$ 随时间的变化。其中距离与平均点燃率定义如下:

$$d[\mathbf{x}(t), \mathbf{x}^j] = \sum_{i=1}^{100} |x_i(t) - x_i^j| / 100 \quad (10)$$

$$\rho(t) = \sum_{i=1}^{100} x_i(t) / 100 \quad (11)$$

这里

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_{100}(t)] \quad (12)$$

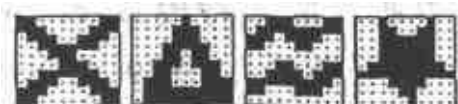
$$\mathbf{x}^j = [x_1^j, x_2^j, \dots, x_{100}^j] \quad (13)$$

距离 0 和 1 分别表示已存储的模式和它的反模式被精确唤出。其动力学产生了这样的激发模式时间序列, 它包含有用叠加自关联矩阵得到的突触权预先存储的模式。这说明混沌神经网络能够作为基本语言, 因为已存储的模式和该序列可分别解释为“字母和词”或者“词和句子”。类似的动力学特性在各种网络中已有报道^[52,55,57,58,61,62]。

五、讨论

从神经算法的观点对信息处理与大脑中确定性混沌间的可能联系进行了讨论。论题包括, 如嗅觉识别^[68]和上面所述的动态关联存储^[15,52,58,61]。通常采用线性阈值元素作为人工神经算法的神经细胞模型。虽然简单的神经元模型在导出人工神经算法的有用原理时是有效的^[1,2], 但另一方面, 从神经生物学的观点来看, 严厉的批评认为这些模型用于模拟那些被比作为变化多样、在神经细胞中具有复杂微观过程的“生物微计算机”的真实神经细胞则过于简单^[69]。实际上可确定的是, 真实的神经膜具有大多数神经细胞模型所缺少的起码混沌动力学。

a



b

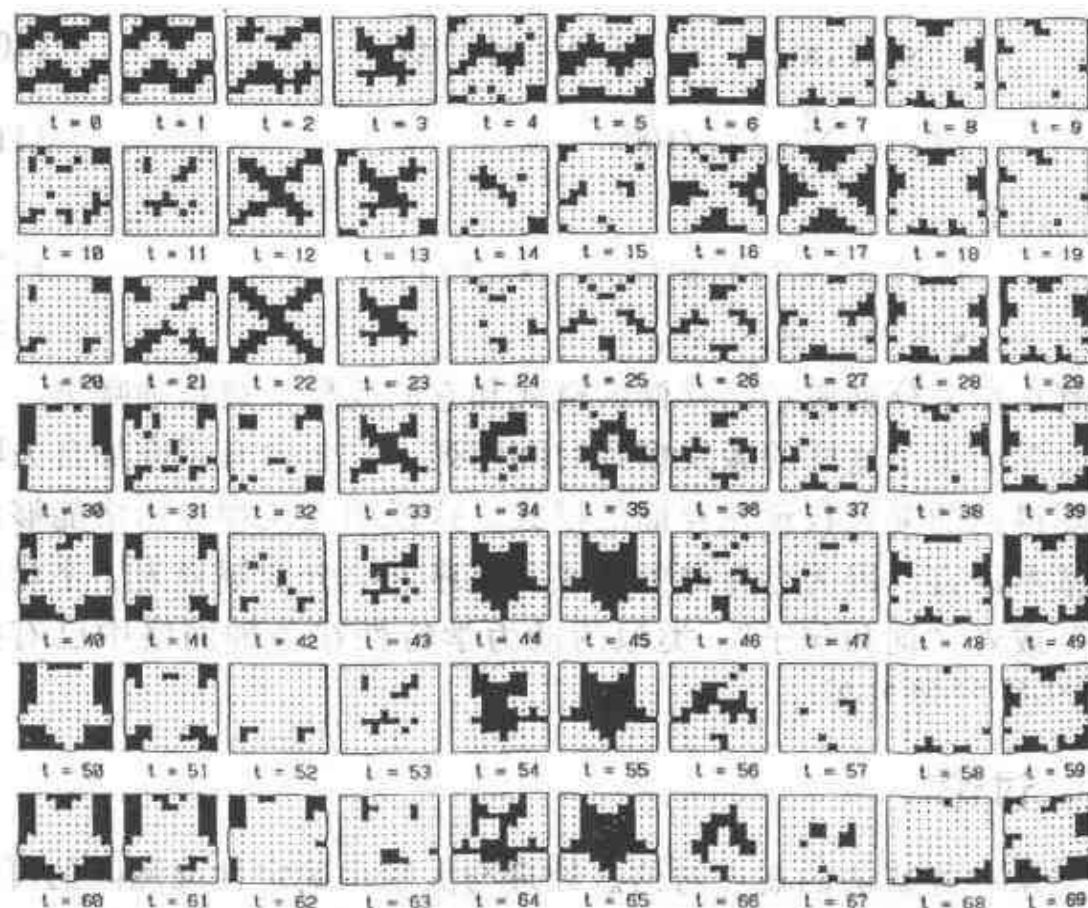


图9 一混沌神经网络在 $\theta_1 = -20.0$, $\alpha = 10.0$, $k_1 = 0.8$, $k_2 = 0.9$ 时的相关动力学^[13]。这 100 个神经细胞的输出值显示成 10×10 矩阵。每一方块的大小正比于输出的强度。(a) 预先用突触权存储的模式；(b) 网络中激励模式的时间序列

最近已经证明复杂混沌的运动能与 Turing 机等价^[70]。广义地说，非线性网络能够产生性质上不同于其组元次系统的集体特性。从这种意义上讲，不仅对于作为大脑模型而且对于作为混沌并行分布式处理模型，由具有通用计算能力的混沌次系统组成的

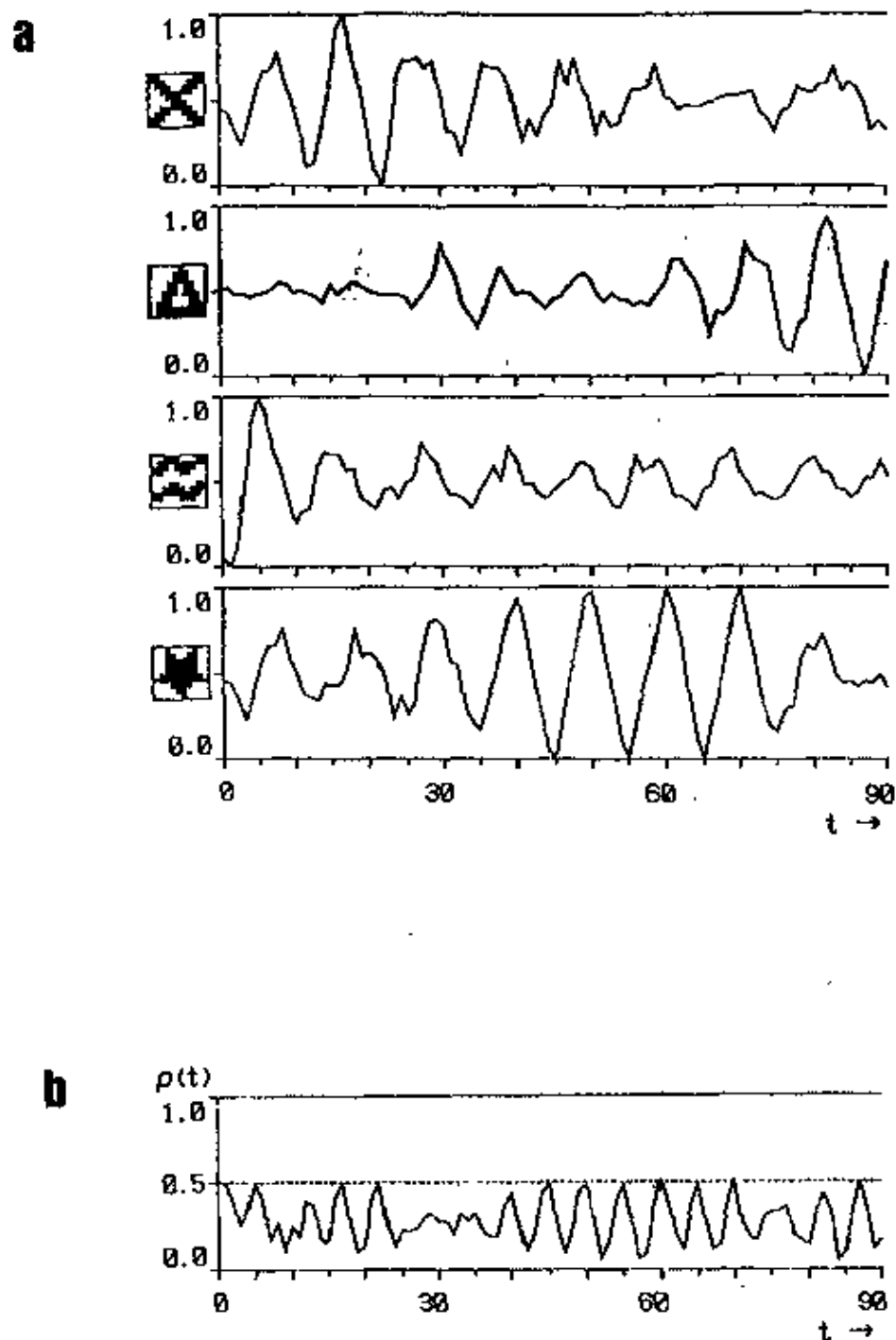


图 10 (a) 混沌神经网络的输出模式与用突触权预先存储的模式间距离随时间的变化; (b) 空间平均点燃率

非线性网络的动力学是有意义的^[71]。这类具有混沌动力学的计算在“混沌工程”^[71]和“新一代模拟计算”^[73]中都是重要课题。而且确定性混沌在工程中具有许多可能的应用, 包括确定性非线性预报、识别和非线性系统建模、非线性滤波、动态存储与搜

索、信息压缩和编码、模式识别、自波动的产生、避免混沌振荡的系统设计、相类动态控制、混沌动力学的电子和光学实现等等^[72~73]。

参 考 文 献

- [1] D. E. Rumelhart, J. L. McClelland, and the PDP Research Group: *Parallel Distributed Processing*, MIT Press, Cambridge (1986).
- [2] S. Amari: *Neural Network Models and Connectionism*, Tokyo University Press, Tokyo (1989).
- [3] J. J. Hopfield: *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 81, 3088 (1984).
- [4] D. E. Rumelhart, G. E. Hinton, and R. J. Williams: *Nature* 323, 533 (1986).
- [5] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley: *J. Physiol. (London)* 117, 500 (1952).
- [6] K. Aihara, G. Matsumoto, and Y. Ikegaya: *J. Theor. Biol.* 109, 249 (1984).
- [7] K. Aihara and G. Matsumoto: In *Chaos*, A. V. Holden, ed., 257, Manchester University Press, Manchester and Princeton University Press, Princeton (1986).
- [8] K. Aihara, T. Numajiri, G. Matsumoto, and M. Kotani: *Phys. Lett. A* 116, 313 (1986).
- [9] K. Aihara and G. Matsumoto: In *Chaos in Biological Systems*. Degn, Holden, and Olsen, eds., 121, Plenum Press, NY (1987).
- [10] G. Matsumoto, K. Aihara, Y. Hanyu, N. Takahashi, S. Yoshizawa, and J. Nagumo: *Phys. Lett. A* 123, 162 (1987).
- [11] N. Takahashi, Y. Hanyu, T. Musha, R. Kubo, and G. Matsumoto: *Physica D* 43, 318 (1990).
- [12] K. Aihara, M. Kotani, and G. Matsumoto: In *Structure, Coherence and Chaos in Dynamical Systems*, P. L. Christiansen and R. D. Parmentier, eds., 613, Manchester University Press, Manchester (1989).
- [13] K. Aihara, ed.: *Chaos-Bases and Applications of Chaos Theory*. Sainsu-

- sha, Tokyo (1990).
- [14] T. Takabe, K. Aihara and G. Matsumoto: *Trans. of IEICE*, J71-A, 744 (1988).
 - [15] K. Aihara: In *Bifurcation Phenomena in Nonlinear Systems and Theory of Dynamical Systems*, H. Kawakami, ed., 143, World Scientific, Singapore (1990).
 - [16] K. Judd: Preprint.
 - [17] N. Ichinose, K. Aihara, and K. Judd: Preprint.
 - [18] K. Aihara, T. Takabe, and M. Toyoda: *Phys. Lett.* A114, 333 (1990).
 - [19] R. FitzHugh: in *Biological Engineering*, 1, H. P. Schwan, ed., McGraw-Hill, NY (1969).
 - [20] I. Obana, K. Aihara, Y. Fukui, and H. Hoshino: *IEICE* technical report, MBE88-7 (1988).
 - [21] W. S. McCulloch and W. H. Pitts: *Bull. Math. Biophys.* 5, 115 (1943).
 - [22] J. Nagumo and S. Sato: *Kybernetik* 10, 155 (1972).
 - [23] K. Shimizu, K. Aihara, and M. Kotani: *IEICE* trans., J73-A, 495 (1990).
 - [24] K. Shimizu, K. Aihara, and M. Kotani: "Electronics and Communications in Japan," 3: 74; 1: 51. *Scripta Technica* (1991).
 - [25] M. R. Guevara, L. Glass, and A. Shrier: *Science* 214, 1350 (1981).
 - [26] H. Hayashi, M. Nakao, and K. Hirakawa: *Phys. Lett.* A88, 265 (1982).
 - [27] H. Hayashi, S. Ishizuka, and K. Hirakawa: *J. Phys. Soc. Jpn.* 54, 2337 (1985).
 - [28] D. R. Chialvo, R. F. Gilmour Jr., and J. Jalife: *Nature* 343, 653 (1990).
 - [29] A. Babloyantz, J. M. Salazar, and C. Nicolis: *Phys. Lett.* A111, 152 (1985).
 - [30] P. E. Rapp, I. D. Zimmermann, A. M. Albano, G. C. deGuzman, and T. R. Bashore: In *Nonlinear Oscillations in Chemistry and Biology*, H. G. Othmer et al., eds., 175, Springer-Verlag, NY (1985).

- [31] I. Dvorak and J. Siska: *Phys. Lett.* A118, 63 (1986).
- [32] A. Babloyantz and A. Destexhe: *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 83, 3513 (1986).
- [33] G. Mayer-Kress and S. P. Layne: *Annal. N. Y. Acad. Sci.* 504, 62 (1987).
- [34] K. Aihara, A. Ishibashi, and M. Kotani: In *Biomagnetism '87*, K. Atsumi et al., eds., 222, Tokyo Denki University Press, Tokyo (1988).
- [35] W. J. Freeman: *IEEE trans. CAS*, 35, 781 (1988)
- [36] G. Mayer-Kress, F. E. Yates, L. Benton, M. Keidel, W. Tirsch, S. J. Poppl, and K. Geist: *Math. Biosci.* 90, 155 (1988).
- [37] X. Nan and X. Jinghua: *Bull. Math. Biol.* 50, 559 (1988).
- [38] P. E. Rapp, T. R. Bashore, J. M. Martinerie, A. M. Albano, I. D. Zimmerman, and A. I. Mees: *Brain Topography* 2, 99 (1989).
- [39] T. Ikeguchi, K. Aihara, S. Itoh, and T. Utsunomiya: *IEICE trans.*, E73, 842 (1990).
- [40] C. M. Gray and W. Singer: *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 86, 1698 (1989).
- [41] C. M. Gray, P. Koenig, A. K. Engel, and W. Singer: *Nature* 338, 334 (1989).
- [42] R. Eckhorn, R. Bauer, W. Jordan, M. Brosch, W. Kruse, M. Munk, and H. J. Reitboeck: *Biol. Cybern.* 60, 121 (1988).
- [43] M. Y. Choi and B. A. Huberman: *Phys. Rev.* A28, 1204 (1983).
- [44] M. Y. Choi and B. A. Huberman: *Phys. Rev.* B28, 2547 (1983).
- [45] G. A. Carpenter and S. Grossberg: *Biol. Cybern.* 48, 35 (1983).
- [46] E. Harth: *IEEE trans. SMC* 13, 782 (1983).
- [47] M. A. Cohen and S. Grossberg: *IEEE trans.* 13, 815 (1983).
- [48] G. B. Ermentrout: *SIAM J. Appl. Math.* 44, 80 (1984).
- [49] K. Aoki, O. Ikezawa, and K. Yamamoto: *Phys. Lett.* A106, 343 (1984).
- [50] K. E. Kuerten and J. W. Clark: *phys. Lett.* A144, 413 (1986).
- [51] W. J. Freeman: *Biol. Cybern.* 56, 139 (1987).
- [52] I. Tsuda, E. Koerner, and H. Shimizu: *Prog. Theor. Phys.* 78, 51 (1987).

- [53] U. Riedel, R. Kuehn, and J. L. van Hemmen: *Phys. Rev. A* 38, 1105 (1988).
- [54] H. Sompolinsky, A. Crisanti, and H. J. Sommers: *Phys. Rev. Lett.* 61, 259 (1988).
- [55] K. Ikeda, K. Otsuka, and K. Matsumoto: *Prog. Theor. Phys. Suppl.* 99, 295 (1989).
- [56] T. Saito: *IEICE trans.*, E73, 836 (1990).
- [57] K. Kaneko: *Physica D* 41, 137 (1990).
- [58] S. Nara and P. Davis: in *Chaos-Bases, and Applications of Chaos Theory*, K. Aihara, ed., 205, Saiensu-sha, Tokyo (1990).
- [59] Y. Yao and W. J. Freeman: *Neural Networks* 3, 153 (1990).
- [60] M. shiino and T. Fukai: *J. Phys. Soc. Jpn* 59, 1529 (1990).
- [61] I. Tsuda: In *Neurocomputers and Attention*, A. V. Holden, and V. I. Kryukov, eds., Manchester University Press, Manchester (1990).
- [62] P. Davis: *Proc. the First NOLTA Workshop*, 42 (1991).
- [63] A. Destexhe and a. Babloyantz: In *Self-Organization, Emerging Properties and Learning*, A. Babloyantz, ed., Plenum Press, NY (1991).
- [64] T. Ikeguchi, M. Adachi, and K. Aihara: In *Artificial Neural Networks*, A. Prieto, ed., 17, Springer-Verlag, Berlin (1991).
- [65] M. Adachi and K. Aihara: *METR* 95-01, The University of Tokyo (1995).
- [66] J. J. Hopfield: *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 79, 2554 (1982).
- [67] S. Amari and K. Maginu: *Neural Networks* 1, 63 (1988).
- [68] C. A. Scarda and W. J. Freeman: *Behavioral and Brain Science* 10, 161 (1987).
- [69] G. Matsumoto: *Future Generations Computer Systems* 4, 39 (1988).
- [70] C. Moore: *Phys. Rev. Lett.* 64, 2354 (1990).
- [71] K. Aihara and R. Katayama: *Communications of the ACM*, 38, 11, 103 (1995).
- [72] K. Aihara, ed.: *Neuro, Fuzzy and Chaotic Computing-Towards a News Generation of Analog Computing*, Ohm-sha, Tokyo (1993).
- [73] K. Aihara, ed.: *Applied and Applicable Chaos*, Science-Sha, Tokyo (1994).

M. J. Feigenbaum

我发现指定给我的题目多少有点窄，所以立即放宽其范围：在某些情况下，区分物理学与数学是困难的，因此我将在很大程度上忽略它们的区别。毕竟，这并不会令人太惊讶：那是不可避免的；举例来说，力学与微积分的创建者是同一个人，所以力学几乎等同于其运动学骨架——微积分。下面这种说法即使不是极重大的，也应该说是丝毫不错的，这就是有关混沌的各种深远的研究的可能性，恰恰是因为它们有共同的支柱，这支柱正是某些数学想法的直观内容的知识来源，虽然这些想法的描述通常源于科学的思想。确实，如果混沌概念真的能与比如医学现象有关，那么只有轻率和无知的分析才会将原因归于支配物理科学的深奥的规律支配着其他领域。正好相反，对某些数学的意义及其应用的理解应该是，它碰巧成为两门学科的基础。无论如何，下面这种看法也是对的，即混沌概念已经加强了物理学的领主地位，使物理学的范围以先前不可能的方式扩展到各种宏观现象。

在一个很不精确，尽管完全是实用主义的水平上、界限的模糊确实会引起许多困难。尤其是从上文及这次会议讨论的范围，可清楚地看到混沌研究已经危险地渗入到所谓“交叉学科”之中。这种区别的一部分，例如，数学与物理学之间所存在的差别，它源于社会固守的刻板及久已形成的习俗。当你发现一个年轻的研究新手被一个部门以他的工作“太数学化”而拒之门外，同时另一个部门，又以其工作未能通过“足够严格”的苛刻的检验而加以否定时，你不会感到特别惊奇。这个研究者只有获得更

精细的结果，才会赢得两方面的欣赏。但是说得粗俗点，通常的情况是做不到“近水楼台先得月”，也许同样粗俗的是因为金钱与基金变得太重要了，人们发现共同的集资被深沟壁垒的阵营所瓜分。就谈这些作为序言吧。

“混沌”这个课题是非线性系统研究的一部分。无论“系统”一词所指为何，它是含糊不清的，我且先不说是“非线性数学”或“非线性物理”，稍后在下文中我将对这些定义再作说明。但是现在重要的是要想到，我们最有力的数学遗产，一般说来都是属于“线性”的，从而使我们毫无准备地去研究一个问题，即与我们关系最密切的物理学。物理学常常包括近似计算方法的发展，因为任意精确的数值计算是不可能的，所以人们无法对我们所相信的理论作出任意精度的检验。我个人涉足于什么是混沌的问题，正是由于这种无奈而遭到的巨大挫折，以及对当时在高能物理学正时兴的各种各样的近似方法的烦恼和厌恶。我感到精确地深入研究一个这样的问题——即使这不是一个“恰当”的问题——远比继续用另一个模型更加可信。所以，就我个人而言混沌的出现就像是一个（非常有趣的）非线性现象。然而，就理论研究过程中出现的数学问题，建立正确的理解的企图是我坚定的目标。当人们看到理论工作者的作用远远超出实验验证的领域时，人们可能会再次感到惊奇并重新思考数学与物理学之间的区别必须是什么，而不是抱怨。

现在让我来提及几个特殊的方法，这些物理学日常研究的方法已经因混沌的来临而有所改变（这里我将暂时允许原封不动地保留传统的壁垒，但乐意模糊物理学与化学的界限）。首先，有关流体中湍流发生的课题的研究已经发生了根本性的变化，更确切地讲，已经产生了一门新的学科。尤其现在出现了“通向湍流的道路”或“统治方式”这样的概念，据此可详尽地预报各种小心完成的实验的结果。以前（比如说10年以前）的解释几乎在所有情况下都被裁定是不正确的。而且，实验工作者收集数据、处理并储存其内容的方法已经从根本得到了扩充：现在人们经常

提问以前没有考虑过的数据的问题（当然，你也可以提问老问题！）。

化学反应动力学（振荡的）的研究在过去的十年之中发生了彻底的变化。这些化学反应可能出现混沌现象，在理论的指导下，现在已经很好地观察到这一现象。而就在十年以前，一些本学科中最杰出的研究者则否定化学反应出现混沌的可能性，理由是，比如说，这不符合热力学定律。

凝聚态物理的各种问题，例如，有关无公度相，已经强烈地为混沌的准周期转变所渲染，由混沌的这项研究中提出的概念为准晶研究勾画、提供了一些方法。

即使不说是无所不在的，混沌行为也是非常普遍地被人们在各种各样的物理系统中观察到，比如激光、约瑟夫逊结、各种流体运动现象、电子装置及其控制系统、生物系统中都可以观察到混沌行为。有时，这些观察表明它只是被动的：人们对这个系统的观察，发现混沌行为也能够出现，而在另一个时候，其行为可能会存在本质的差异，并蕴涵丰富的信息，使得研究者不再提出新问题，而去寻找这些数据的不同方面之间的新型的关系。在这后一种情况中，即使是关系的不同方式的纯粹的干扰也能从想像上激起各种各样的研究，这些研究比引起它们的各种联系更加有意义。

我想从上文可以清楚地看到，如果列出一个清单，会发现混沌的出现已经使它自己被广泛地认识了。现在我不再进一步继续这张清单，而要致力于更为理论性的讨论，即混沌对我们的知识及处理一般问题的方法的影响。

首先看到的影响是现在人们关于随机性的认识发生了微妙的变化。在统计力学教学中，我们逐渐形成了这样的设想：宏观物理系统的行为是最杂乱无章的，且认为系统是迅速各态历经的。现在清楚，一个远远不是像上面描述的那样复杂的、适当地包含少量组分的系统，完全可以走遍其时间历程，其行为很不规则，而这种不规则又不能完全不同于统计学的描述。基于质点力学的

统计力学的基础从来也没有被牢固地建立起来，现在你可以轻易地将矛头指向这个嫌犯。对这些较小的系统，迫切地需要更为可靠的方法，以提供正确的统计结果。对于那些不是这样适当的系统，比如湍流，尽管进行了长达一个世纪的研究，那些容易得到的观念仍然存在着错误，我们必须做得更好些。再说一次，对一个适度的系统，人们遇到的不是一个均匀的、杂乱无章的随机系统，相反，它属于这样一类，当你仔细地追究时，获取的详细信息将揭示等效的各个小块是如何相互作用和相干，并协力产生那些曾被看作是随机的东西。而且，这些方法是建设性的，以便见多识广的实验工作者能够提出有效的分析模型，深入研究下去或许能导致新的科学技术的产生。很遗憾我们现在的方法还很原始，我们期待着得到明显的改善。以上这些代表了近十年来出现的所有不同于从前的观念和方法。

还存在或许更为哲学意味的一面，如果简单的随机研究方法失败了，人们能否仍然如此坚信那些理解物理实在的最微观的组成部分，详尽地从原则上揭示所有依赖这些组成部分建立起来的東西？这涉及“简化论”问题，也许还涉及“物理学界”尚不清楚的关于在什么基础上构筑“最前沿”的问题。稍后我将再回到这个问题上来。

让我们回到前文提到的问题上来。线性意味着一个物体对任何一个作用力产生的微分响应与物体的状态无关，所以数学上用一个线性方程描述。这种情况的最大优点是所有的线性对象都是一个具有确定特性的简单几何框架中的成员。在形象地描述、并深刻理解这类几何学问题方面，前人给了我们解决这类问题的本领。值得指出的是量子力学是建立在一个无限维的这样的几何框架之上的，并且量子力学是在完全相同的几何框架里处理无限维问题的。诚然，当这些量子力学的创始人在使用数学时，有哪一位会简单地称他们是应用数学家呢？他们不会我也不会这样想的。

对非线性问题情形就完全不同了。就物理学的需要而言，可

用的数学知识是相当可怜的，对那些在理论公式上已被证明是非线性的大多数问题以及其表现行为肯定不属于线性问题的大多数问题，现在还得不到令人满意的解答。到目前为止，这种情况几乎存在于所有当前感兴趣的物理课题的研究之中。一个物理学家如果想要获得一些研究结果（哪怕是定性的！）而不涉猎于新的数学概念或方法，几乎是不可能的。混沌研究是一个这样的舞台，一个凭某些物理上的直觉赋予活力的成功的计算导致物理学家提出可能在数学上有趣的问题。

最后这一点值得深入推敲。最近半个世纪以来数学常常形成了避免计算的传统，也许是领悟到了对于所考虑的问题的特殊细节与枝节问题不必就一组非常简单或非常明显的关系大做文章。一旦抛开了枝节问题，漂亮而坚实的、反应问题内在本质的工作就脱颖而出。然而，这样做是存在局限性的。非常明显，如果计算结果有些漂移不定、就像一个在其中探索尚未了解而又感觉得出的关系的竞技场，在一些也许能被证明具有普遍意义的特殊的实例中，蕴藏着直觉种子的这些枝节可能是极富启发性的。依靠计算机进行数值计算的帮助，在深入讨论细节的晦暗之处再前进一大步成为可能。就是说，计算能揭示出未知世界中蕴涵的更严密的结构及更限定观念。

其次，有时过多的“枝节”被去掉了，所以所谓的非常普遍其实只能容许有关的特定情况，而这种特定情况，依靠更普遍的思维的关系及语言的本质特性，对那些从来未考虑过的特殊事物给出详尽研究。我个人的工作就是一个例子。解析科学的方程源于对一定光滑程度的问题的描述。事实上，物理学、化学等学科中的所有方程都是如此被赋予的。但这一点已证明对于许多拓扑学思想是一种多余的东西。因此，所有解析科学可能有相同的表现方式。而拓扑学考虑的是某些任意详细的特殊情况，对于它的特定的描述，拓扑学方法是无能为力的，而且它的存在既不能甚至也不允许提供可被企盼的线索，也不能提供可被企盼的诱因。举例来说，由于这个原因，在数学家的群体中不会存在也不可能

出现周期加倍的普遍定量特性的任何概念。已经反复说过，学科的状况当然地是对人类社会在它现今的追求中因袭的负担的一个极好的量度，而其方式是如此地含蓄。

让我稍详细地结束有关普适性对物理学的影响的具体的讨论。从一个不严谨的哲学观点看，值得在这里再次回到简化论这一概念。当你想定量地推导物理系统的行为时，普适性的结论是它全然与物理系统的特殊的细节无关。亦即那些可预报的结果不依赖于方程。然而，一个特殊的微观理论怎样才能被当作现象的解释与基础呢？再则，如果因为其他原因理论被保留，但其方程非常难解，而从一个比它简单得多的理论可导出完全相同的结果，那么，这个比较深奥的理论能够给人们什么启发呢？问题是实实在在地提出来的，所以需要诚实的思考去解决它。我把它作为一个难题留在这里，让读者稍事停顿，仔细思考一下“科学方法”这一平常的概念的含义——如果有意义的话。

湍流发生的理论毫无疑问是正确的，在某些条件下，现在对这一理论有很好的理解并可给出某种程度验证，尽管事实上尚无人能求解这个假定正确的流体运动方程。这个理论的思想已被证明是“重正化群”观念的严格例证，因此周期倍分叉理论提供了这些理论思想的第一个严格准确的例子，也为一些精确理解提供了一个背景。此外，在这个背景中重正化观念显示出其数学上旺盛的创造力，这导致对其他问题，例如动力学和概率论中的经典结论的更深入的理解。

在以上的几页中我已经反复地论述了数学与解析科学的相互作用，在探究混沌怎样帮助我们扩大知识领域，并导致观念上的困惑时，列出了一张关于探究它们各自的意义的议事清单。我可能在困惑方面说得太多了，这样做是因为混沌科学在这一点上已经成为最强大的工具，并且常常在专家们无能为力之时，混沌科学却富有成果。

郝柏林

虽然混沌作为物理名词早在 100 多年前就首次出现在玻耳兹曼 (L. Boltzmann) 关于分子混沌性的假设中, 现代意义下的混沌概念在物理学中重新出现看来却姗姗来迟。事实上, 在 19 世纪和 20 世纪之交无论在保守系统还是耗散系统里, 物理学都和混沌的发现擦身而过。在保守系统中, 这就是三体和其他不可积分的动力学问题, 特别是太阳系稳定性和为当时新建立的统计物理奠基所提出的问题。在耗散系统里, 这就是湍流现象的挑战; 自从雷诺 (O. Reynolds) 1883 年的定量测量以来, 湍流就一直呼唤着根本性的解释。

然而, 这一延迟并非偶然。自从牛顿以来机械决定论占据着统治地位, 许多现象因归咎于超乎实验家控制的外噪声而被忽略。动力系统的数学理论还有待发展, 而现代科学武库中的强大工具——快速电子计算机几十年后才问世。20 世纪前半叶的两大物理理论, 量子力学和相对论的建立, 随之而来的高技术的迅猛发展, 以及两次世界大战的需求, 吸引了绝大多数物理学家的注意力, 这一切回顾起来就很自然了。动力学中的艰难问题只有留给数学家们去静心研究。它们被称为微分方程定性理论、动力系统理论、遍历理论等等。实际上数学家们事业有成, 为本次会议所概括的空前的学科发展准备了基础。

一、决定论与概率论

物理科学中有两套体系描述同一个自然界: 决定论和概率

论。基于牛顿力学和万有引力定律的天体力学，曾是决定论的试金石。1846年9月23夜，当德国天文学家伽勒根据法国学者勒维叶（U. Le Verrier）的理论计算一举发现海王星时，决定论观点如日中天。这确是拉普拉斯决定论的胜利：只要对当前状态的知识足够精确，物理学看来有本领预见宇宙的未来。

然而，大致在同一时期，热机的发展导致了对气体和液体性质的研究。人们使用压力、温度、体积这类宏观概念，以经验方法寻求它们之间的关系。基于海量经验事实的热力学定律，至少同力学定律一样精确。从考虑宏观物体中的元过程出发，论证热力学定律，这种企图导致了建立统计物理学。理论的关键之点，是总要在某处引入概率因素。按照传统，物理学者更推崇决定论方法，而把概率论处理作为问题复杂、数据不足时不得已而为之的补充。

20世纪继承了这一传统。虽然量子力学已对经典的决定论提出挑战，但概率论只以实用主义的方式引入，来解释理论计算与实验观察的关系。无论如何，量子力学的基本方程仍是线性和完全决定论的。结果，决定论以爱因斯坦为旗手，在物理学里继续兴旺。虽然庞伽莱（H. Poincaré）早在上个世纪末就认识到牛顿力学具有内在的随机行为，而且不少数学家用证明和实例补充了庞伽莱的论点，多数物理学家对这一发展不甚了解。直到1918年，怀特曼（A. S. Wightman）还抱怨说，“这真是物理教育的耻辱，庞伽莱的简单而透彻的思想过了四分之三个世纪还没有写进初等力学教科书里。看来我们要等到第三个千年，才能有一册本科生的解析力学书描述当两个线性振子发生非线性耦合时会发生什么事。”^[1]怀特曼进一步说，“按照时代精神，我们可以设想这里有一个反对庞伽莱的阴谋”。所幸的是，我们不必等待21世纪。现在已经有许多教科书，即使不是写给学生的，至少也是给教授的（文献[2]列举了200多本书名）。

毫不奇怪，注定要由约克（J. Yorke）这样的数学家和梅（R. May）这样的生态学家和其他一些人来唤醒物理学家们的

300 年决定论之梦。即使如此，一开始许多物理学家仍把混沌当作随机，不予理睬。只有一小批不那么正统的物理学者热情地抓住了这一新发展。

二、一类无所不在的现象

由于缺少理论上的了解，混沌现象肯定曾多次在非线性电路、在超声空化噪声中，在机械系统和其他许多实验中被漏过。

一旦确信存在混沌，物理学家处处看到它。他们在实验室里，在计算机模拟中，在对自然现象的观察里发现混沌。混沌文献量的爆炸，很大程度上来自物理学家的努力（文献 [2] 列举了 7000 多篇文章，其中 2800 篇的标题里有混沌或奇怪吸引子字样）。由于最好把自然现象留给地球物理学家讨论，而我们目前也不缺乏计算机图形，我将主要考虑实验观测的情况。

作为理论工作者，我按照理论预言和实验观察的符合程度，把有关混沌的物理实验粗略地分成三组。第一组是那些与理论预言符合甚好的测量。这首先是周期驱动的 RLC 电路。实验装置可由一组常微分方程精确描述，而后者可用计算机详细研究。这里不仅有各种通向混沌道路的定性符合，而且从数值上证实了那些普适常数。

第三组实验复杂多变，只是某些侧面与理论模型略有相似。这主要是流体力学不稳定性和湍流转变的实验。主要由于新实验技术如多普勒测速、低温压制测量噪声，以及新思想如重正化群和分形考虑，使得湍流研究又回到物理实验室。然而，正面结果还是限于有限的几何，如瑞利 - 贝那特 (Rayleigh-Benard) 或库耶 - 泰勒 (Couette-Taylor) 实验，以及弱湍流系统，例如走向湍流的最初几次转变。完全发展的湍流，特别是开放流的情形，仍然是对科学的挑战；奇怪吸引子与湍流的关系也仍是问题。虽如此，湍流一词目前广泛用于物理学中，表示那些内秉的不规则和非周期的时间、空间以及时空行为。湍流概念的普遍性，不亚于固体概念。

第二组中间情形最为有趣。许多控制得很好的声学、光学、化学和固体“湍流”现象属于这一组。我不能在此讨论细节，只列举数端：声学空化和液氮中的超声吸收、纯光学或混合器件中的光学双稳现象、约瑟夫逊结和超导量子干涉器件中的反常动力学噪声、氢原子的微波离化和分子的离解、半导体中的电子空穴等离子体和电子输运、钇铁石榴石小球中的自旋波不稳定性以及化学不稳定性的实验，等等。

我只就这些实验的“物理”作一条评述。许多物理实验装置可以看做频率转换器，而混沌乃是一种被长期忽略的普通非线性振动系统。如果输入和输出信号的频率成分相同，系统基本上是线性的。有非线性存在时，可能出现新的频率成分。输入频率的和频、差频以及高次谐波都是平庸的；不论非线性多弱，它们总会出现。然而，具有确定阈值的次谐波就不那么容易解释了。它们通常是混沌转变的序曲。任何过去知道有分频出现的实验，都值得进一步研究以寻求混沌。

一句话，混沌大开了物理学家们的眼界。从1980年代初期以来，奇怪吸引子不再是奇怪的对象。

三、物理学对混沌的冲击

当物理学家开始钻研混沌时，他们也用过去基本上属于数学家的一些术语来扩展自己的词汇：诸如双曲性、稳定和不稳定流型、同宿和异宿相交、斯梅耳(S. Smale)马蹄以及符号动力学。一些怀疑论者批评那些深深卷入这场新游戏的同行说，“啊哈，你们在玩数学！”然而，这里并没有什么值得奇怪之处。在1920年代初，很少有物理学家知道矩阵和本征值（可参看文献[3]的描述），更不用说希尔伯特空间中的线性算子，而这些今天已是每个物理系本科生的必修课。

然而，物理学家们并不是被动的学习者，他们以自己的思维和行事风格大为丰富了混沌研究的内容。他们为已有的数学骨架增添了血肉，还向数学家们提出了不少挑战性的新问题。

混沌研究恰好兴起在相变和临界现象理论的巨大成功之后，那里已经锤炼了标度不变性和普适性等起决定作用的概念。物理学者们正好掌握了重正化群的技术，可以从线性化的重正化群方程计算各种普适的临界指数。他们用这种方式为那些数学家们熟悉多年的结构，例如倍周期分岔序列，补充了新的不变指数：对这些指数理论上已充分认识，可以计算出多位有效值。不同的非线性模型和系统分成各种普适类。费根堡姆（M. Feigenbaum）在这方面起了先驱作用。

过渡过程与有限的测量精度密切相关，本质上是一个物理概念。这里也曾受益于临界现象特别是临界动力学。在每个分岔点附近都发生临界慢化，慢化本身由另一个普适指数描述。实际上，笔者本人对混沌研究的第一个小小贡献，就是计算出每个有限分岔点附近的临界慢化指数都取“平均场”值 $\Delta = 1$ ；此文是不到两页的简短注记^[4]。这一近乎平庸的结果又引起另一项简单的发展。原来数值计算在靠近每个有限阶分岔点时，都会因临界慢化而得到一片不断收敛的点集，可用箱计数论据证明其“操作维数”为 $2/3 = 0.666\cdots$ 。为了与倍周期分岔序列极限点的维数 $0.538\cdots$ 一致，自然地导致了一个标度函数 $D(k, \epsilon)$ ^[5]；此处 k 是分岔点的阶， ϵ 是计数箱的尺寸。这里有两个极限 $k \rightarrow \infty$ 和 $\epsilon \rightarrow 0$ ，改变取这两个极限的顺序，就得到上面给出的两个不同数字。这种普适类之间的“跨越”在临界现象理论中是熟知的。

作为第三个实例，我们考虑噪声的作用。任何实验和计算机模拟都不能避免外噪声。混沌总是穿着噪声的外衣出现。因此，人们必须会区分混沌行为和随机噪声。我不准备叙述近年来这方面的巨大进步，只在此指出要为混沌转变建立更完备的重正化群描述，噪声还起着正面作用。它类似于通常相变理论中的外磁场，即序参量的共轭场。

我要提到的最后但并非次要的一点，是物理学家们在理论和实验结合以及向其他科学领域的学者宣传新思想方面也起了积极作用。从实验数据重建相图，乃至从时间序列提取维数、熵、李雅

彭诺夫指数这类不变量,已经成为一种小小的产业。现在,科学家们原则上能够区分混沌和噪声,比较奇怪吸引子的奇怪程度等等。不像有人对洛伦兹(E. N. Lorenz)讲述的“蝴蝶效应”的误解,混沌并没有削弱科学的预见力。它只是破灭了实际上并不现实的对长期预报的幻想。实际上,由于计入了相应过程的动力学特性,混沌研究改善了人类短期预报的能力。同时,借助各种不变量,它还改进了对平均量的长期预报效果。

谈到普及数学思想,我想讲一点个人经验。在几个常微分方程系统的参数空间里发现相当复杂的分岔和混沌“谱”之后,我们作了很大努力来理解参数空间的整体结构和那些数值实验中可以有把握地确定的周期解的排列规律。我们这样做的过程中,结识了1920年以来在动力系统和遍历理论中早就使用的一套数学对象,即符号动力学。我们很快意识到符号动力学就是物理学中的粗粒化,是在有限精度下描述动力学的严格方法。因此,它和物理学的基本精神十分一致。事实上,符号动力学可以锻铸成科学工作者和工程实践家手中的强大工具。

为了演示符号动力学的威力与美妙,让我们考虑著名的洛伦兹模型^[6]。这是三个常微分方程所组成的自治系统。因此,不存在自然的时间单位来测量周期运动并确定它们的周期,而这在周期驱动的系统里很容易做到。只要浏览一下那成百篇关于洛伦兹系统的文献,就可以看到没有人叫出所见周期的绝对数值。现在我们用三个字母的符号动力学做到了这一点。不仅如此,洛伦兹模型中的绝大多数周期解是按照一维反对称立方映射的周期轨道顺序排列。

$$x_{n+1} = Ax_n^3 + (1-A)x_n.$$

此外,1981年以来在许多具有离散对称的系统中观察到周期制度下的对称破缺,以及混沌系统下的对称恢复。文献中有过各种提法,如对称破缺压制倍周期分岔。这些都可以用符号动力学轻而易举地加以解释。例如,只有偶数周期才能发生对称破缺,但并非任何偶数周期均如此。简单的符号动力学考虑就可给

出选择定则。为了强调至少符号动力学的一部分已不再是抽象的数学篇章，我通常在符号动力学前面冠以“初等”^[7]或“实用”^[8]字样。

四、量子混沌问题

在不到 20 年时间里，混沌“传染病”几乎波及到经典物理学的全部分支，但量子力学看来对此具有或多或少的免疫性。混沌本质上是一种经典现象。这当然是一件深刻的事实，其全部意义仍有待阐明。

说到量子力学，我们必须区分两种情况：含时间与不含时间的问题。在不含时间的情形，这就是经典不可积哈密顿系统的量子化问题。看来，爱因斯坦是第一个提出此问题的人。在 1917 年发表的一篇文章里^[9]，爱因斯坦指出索墨菲量子化法则只适用于可积系统，这时足够多的运动不变量导致足够的量子数。不可积哈密顿函数量子化的研究把我们带回了 1960 年代复杂原子核能级分布的随机矩阵理论。可以说，惟一的进步在于明白了不可积性比自由度数目更为本质。

含时问题更接近经典混沌的精神，因为混沌出现在动力系统的 $t \rightarrow \infty$ 极限。这里必须承认，除了周期扰动下的跃迁理论，我们对显含时间的量子力学其实所知甚少。在 $t \rightarrow \infty$ 极限下的量子经典对应原理并未曾建立。当普朗克常数 h 趋向零时，经典力学乃是量子力学的奇异极限；奇异性必须具体分析，而非普适。量子系统的典型运动不是混沌，但在有限的时间或频率范围经典混沌可能有所表现。有些人把这称为经典混沌的量子印迹。贝瑞 (M. V. Berry) 宁可用量子混沌学 (chaology) 这个古字，而不说量子混沌。他把量子混沌学理解为，“刻画那些经典对应为混沌的半经典、非经典的现象”^[10]。

提到量子混沌，我们想到玻恩 (M. Born) 在 1950 年代中期的一个论点。玻恩指出，如果每个系统都用其自然的时间尺度测量，像原子这样的微观体系远比太阳系这样的宏观体系更为长

寿^[11]。记住这个论点，我们就看到如下对比：在短暂的宏观系统里我们谈论时间趋向无穷的极限和混沌，而在永恒的微观世界里没有混沌。这一对比的深刻含义尚有待探求。

五、混沌中有新物理吗？

这个问题须要从两种不同角度考虑。我们物理知识的总和可以用图 1 所示的纺锤状体积表示。纺锤的两个尖点代表人们普遍承认的两个物理学前沿，即微观世界的研究和宇宙尺度的探索。两个都要求越来越复杂和昂贵的设备。结果只有特选的科学群体才有幸从事研究。同时，绝大多数物理学家工作在更加广阔和实际的前沿，即我们所生活的宏观世界的研究；这里基础研究的成果一般说来可以更快地对社会产生正反馈。研究宏观世界时，我们必须面对复杂性。确实，混沌的研究也开拓了探索复杂性的新视野。我们从混沌研究得到的教益之一，在于认识到看起来很复杂的时间行为、空间图案或两者的组合，可能源于反复使用简单的初等法则或动作。

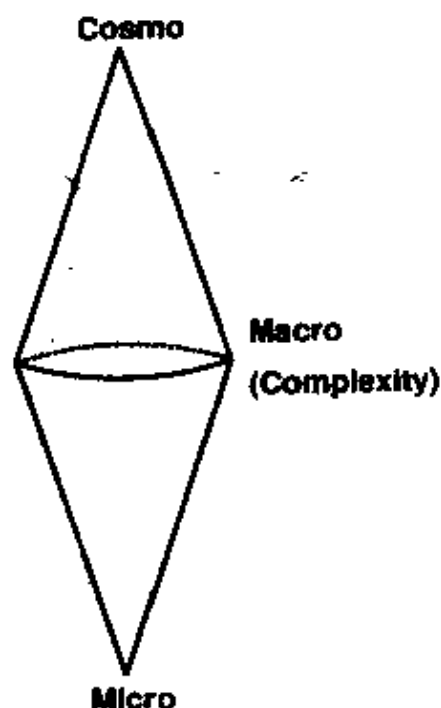


图 1 物理学的前沿(示意)

我们已经见过一维立方映射的应用。一个简单和熟知的例子可能更具启发性。如下的一维平方映射

$$x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2$$

的适用范围，远远超过描述没有世代交叠的昆虫数目。更有甚者，从这个简单模型得到的许多结论，并不限于一维系统。我们从这个简朴的抛物线迭代已经受益良多，而它的丰富内容尚未被穷尽。还应特别指出，许多周期驱动系统参数空间里周期和混沌制度的交替出现，至少可部分地借助上述模型理解。

我还想同物理学里另外两种典范对比，来强调一维映射的重要性，这就是二体问题和布朗运动。从二体问题可以学习物理学中确定论方法的要点，从天体力学里的开普勒问题、相对论中的水星近日点移动、量子力学中的氢原子到量子场论的兰姆位移。而借助布朗运动可以构造物理学中整套随机方法，从朗之万和富科-普朗克方程到路径积分表示。一维映射提供了研究复杂性物理学的典范。谁敢说混沌里面没有新物理？我们更倾向于相反的论点，即混沌不仅带来新的物理学，而且要求重新考察物理学的基本原理。这样我们就回到本节开头提到的另一角度。我们在下一节里讨论。

六、混沌是否为物理学带来新的基本原理？

完全确定论的观点和纯粹概率论的考虑，两者都隐含地把某种无限过程作为前提。一方面，接受精确的牛顿轨道概念原则上就意味着可能无限精确地测量轨道。一旦我们假定存在有限的测量精度 ϵ ，那就不可能区分一条纯“确定论”轨道和加上量级为 $\epsilon/2$ 的随机噪声的同一条轨道。

另一方面，长度为 N 的有限个随机数的序列，只能在量级为 $1/\sqrt{N}$ 的偏差范围内通过随机性检验。只有在 $N \rightarrow \infty$ 时偏差为零，才能说这一序列是纯随机的。只要 N 是有限的，原则上就可以用某种确定论过程产生同一个数列。事实上，蒙特卡罗计算使用的伪随机数发生器都是这样做的。

真理存在于纯确定和完全随机之间。然而，在物理学中并没有一个基本原理反映这一至关重要的事实。物理学的基本原理有一些特点。首先，它不能从其他原理推导或证明。它的推论应当经受精益求精的实验检验，但它本身不可能一劳永逸地被证实。第二，它通常可用否定形式表述，而否定往往比肯定更强更广。第三，每个基本原理通常与一个基本常数相联系。比较这些特点，我们看到量子力学和相对论两者都具有大家熟知的基本原理，而统计物理却是具有基本重要性但没有基本原理的学科。大数定律是可以证明的数学定理，因而不能成为基本原理。遍历性假设随着理论的发展离开统计物理的基础越来越远。然而，愈益深入复杂性的世界，我们就愈加依赖统计物理学。无论如何，这是不能令人满意的情形。

为了使复杂性的物理学成为科学家庭的合法成员，我们需要另一个基本原理吗？果如此，这个原理又是什么？现在我来到了本文最具玄想的段落。我只能描述一些十分不成熟的想法。我们在有限的时间内用有限的精度去测量宏观世界，获取有限的数据，而我们却意图达到严格描述。我们用字长和存储均有限的计算机，以有限的步骤来模拟物理过程。我们处处遇到有限性。我们已经看到，引入有限性之后，确定论与概率论之间的鸿沟消失。所有这一切都启示我们，要把有限性提升到基本原理的高度。

我们甚至可以建议这一原理的若干表述。一种用确定论语言的表述可能是：自然界里不存在比柯罗莫果洛夫 (A. N. Kolmogorov) 流更随机的过程 (K 流是遍历性阶梯上的一级)。事实上，这是阿诺德 (V. I. Arnold) 的一个猜想。另一种用概率论语言的表述可能是：自然界不存在白噪声。两者都是只能由实验检验的物理表述。我们不知道它们是否等价，也不清楚怎样做实验。我们还可以进一步玄想，与这一原理相关的基本物理常数实际上已经存在百年以上：这就是玻尔兹曼常数 k 。我用图 2 来演示这些想法。

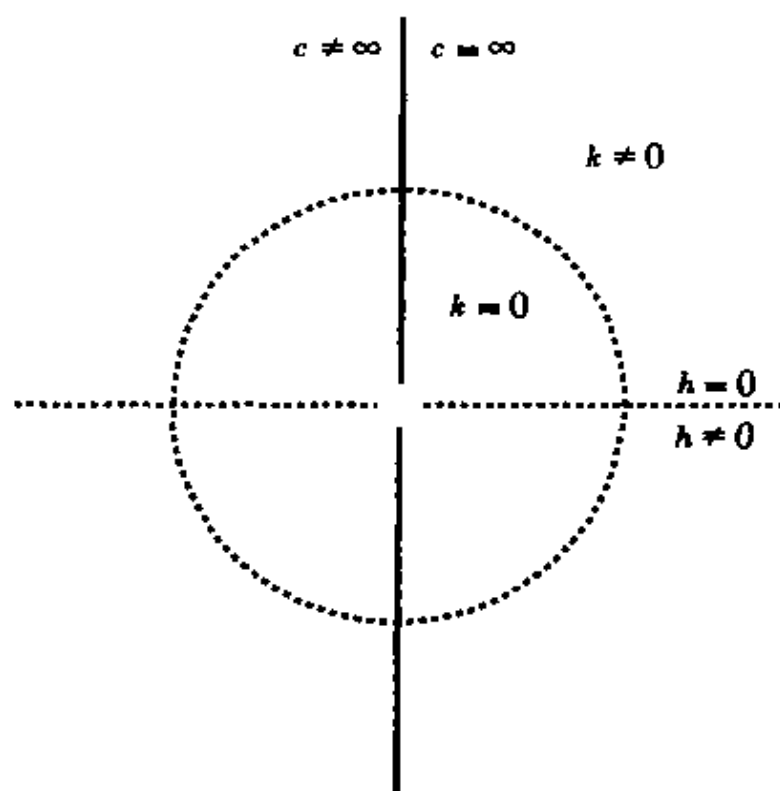


图2 基本物理理论可能关系的示意图。水平虚线划分普郎克常数 h 为零和不为零的区域；垂直实线划分光速的倒数 $1/c$ 为零和不为零的区域；在圆圈之内玻尔兹曼常数 k 为零，在圆外它不为零

相对论几乎是由爱因斯坦一手创立的。量子力学则由几位物理大师联手促成。复杂性科学，与它的本质相应，正在由不同学科领域成千上万的学者塑造。混沌的研究一定会帮助我们理解把有限性提升为基本原理的复杂性科学。目前，这一纲领的完成尚任重而道远。

致 谢

我借此机会感谢彭桓武教授。他关于统计物理基本原理的经常提问和对有限性的强调，一直启发着我的思考。本文提及的研究，受到中国自然科学基金的资助。

参 考 文 献

- [1] A. S. Wightman, 在 H. J. Raveche 主编的 Perspectives in Statistical Physics 一书, 347 页, North Holland 出版社 (1981)。
- [2] 张淑普编, Bibliography on Chaos, 世界科学出版社 Directions in Chaos 丛书第五卷, World Scientific (1991)。
- [3] J. Mehra 和 H. Reichenberg, The Historical Development of Quantum Theory, 第三卷, Springer 出版社 (1982)。
- [4] 郝柏林, Physics Letters 第 A86 卷, 287—288 页 (1981)。
- [5] 胡岗和郝柏林, Communications in Theoretical Physics, 第 2 卷, 1473 页 (1983)。
- [6] E. N. Lorenz, J. Atmosph. Sci 第 20 卷, 130 页 (1963)。
- [7] 郝柏林, Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems (英文专著《初等符号动力学与混沌》), World Scientific (1989)。
- [8] 郑伟谋和郝柏林, “实用符号动力学”, 《物理学进展》第 10 卷, 316—373 (1990)。请参看近著《实用符号动力学》, 上海科技教育出版社 (1994); Bai - lin Hao and Wei - mou Zheng, Applied Symbolic Dynamics and Chaos (英文专著《实用符号动力学与混沌》), World Scientific (1998)。
- [9] A. Einstein, Verh. Dtsch. Phys. Ges. 19, 82 (1917)。
- [10] M. V. Berry, Physics Scripta, 40, 355 (1989)。
- [11] M. Born, Is Classical Mechanics in Fact Deterministic? Phys. Blatter 第 11 卷第 9 期, 49 (1955); 后收入 Physics of My Generation 一书, Springer 出版社 (1964)。

Kensyke Ikeda

~~~~~  
摘 要  
~~~~~

本文对在具有几个自由度的量子系统中，量子混沌有可能作为不可逆性和耗散的起因的理论研究作了评述。

一、引言

混沌动力学的本质特征是轨迹对初始条件的敏感依赖性，或者说是沿轨迹的不稳定性^[1~3]。让我们考虑位于相空间中的一个初始点集合。而且这个集合在与轨迹正交的不稳定方向上，几乎沿着以指数规律延伸的轨迹运动。如果混沌运动限定在相空间中的有界区域内，那么这个以指数规律延伸的集合应该折叠许多次，形成覆盖了相空间中可达到区域内的一个复合物。这样的一个混合机理使得系统失去了对初始条件的记忆，并能使系统松弛地趋向于一个与初始位置无关的“平衡”分布。平衡分布的特性参数不是相同的，并且取决于系统所特有的不稳定本质。在 K 系统或混合系统这样的均匀非稳定系统中，平衡状态是唯一的，并且与在等能量表面上分布的微正则系综一致，但是在相空间被 KAM 表面分开的弱不稳定系统中，平衡分布不是唯一的，每一种平衡分布会或多或少地位于等能量表面上^[3]。然而，即使在后者的情况下，对初始条件记忆丧失的弛豫过程也同样会发生。

在任何情况下，我们都能想像出这样一幅清晰的图像，即只要系统服从经典动力学定律，混沌行为是如何引起不可逆弛豫过程并趋向于平衡状态的图像。

与经典动力学相反，理解量子系统中混沌对弛豫过程的贡献是非常困难的。在量子力学中不再允许我们追踪相空间中的每条轨迹。正如普利高津所强调的那样，即使在经典动力学中，混沌的不可预测性也会使人们自然而然地放弃了基于每条轨迹的描述，并引入一个基于集合的描述，这使我们得到在前面段落中直观描述的不可逆思想^[4]。从这个角度看，似乎在量子力学中较容易正式作出有关不可逆的描述，因为它不只明显地通过量子波函数的概率解释假设了一个相同系统的系综^[5]。这里要注意的一个相当重要的事实是必须引入一个测量过程以使波函数转换成表征系综的经典概率。没有测量过程，波函数与经典系统会完全不相同。根据经典动力学，由相空间中不同起始点出发的两条经典轨迹不相交。与此相反，相空间中的“轨迹”（如果它们可以这样定义的话）在量子力学中通过波函数强烈地相互关联。这样的一个强量子相互关联（或量子相干）会严重抑制沿“轨迹”的经典不稳定性。因此将混沌弛豫过程的经典图像应用于量子动力学中会产生误导。

让我们简单考虑一下由于量子力学的本质原因，混沌不稳定性是如何防止自身表现出来的。如前所述那样，经典混沌动力学在相空间中产生了一个复合物体，该物体变成由随时间增加而变得越来越精细的结构所组成。为使这样一个复合物体能够形成，我们必须设想相空间可以被分解成任意细小的尺度。确实，在经典动力学中我们能以所希望的精度确定相空间中的任何位置。然而量子力学中的情况却完全不是这样。事实上，量子不确定性原则阻止相空间分解成任意细小的尺度。因此混沌不稳定在某一时间尺度上就不再形成更加精细的结构，超出此时间尺度之外所代表的量级与量子不确定性原则就不相符合了。正如后面将要讨论的那样，该时间尺度小得让人吃惊！这是因为相空间中形成的结

构的最小尺度随时间以指数规律减小。混沌是典型的宏观概念，与量子力学中不允许在相空间中规定一个确定点的微观逻辑恰好相违背。因此“量子混沌”的研究必然会给长期存在的主要是在量子测量理论内容中进行探讨^[6]的微观逻辑和宏观逻辑的交界面处的思维带来新的启示。

混沌动力学的量子 - 经典对应中的困难首先由爱因斯坦于 1917 年指出。如果系统是经典可积的，并且相空间由圆环充满，我们可以根据某个定律（爱因斯坦 - 布里劳林 - 凯勒的量子化条件）挑出每一个量子化的环面。因此如果系统在经典极限是可积的，我们就可以仅仅从关于经典相空间的局部结构信息就知道寻找量子化状态的方法。然而爱因斯坦暗示，如果经典相空间中充满着混沌轨迹的话就不能够根据某个简单定律去寻找任何量子化的经典物体。我们真的没有任何办法将量子动力学与经典动力学联系起来吗？根据 Gutzwiller 的半经典理论^[8]的非常重要结论，一些纯粹的量子力学参数，诸如状态密度可以从整个经典相空间中的信息正式得到。确实，半经典的状态密度是由所有因子的总和来表示的，其中的每个因子都与嵌入在混沌海中的一个周期性轨道有关。然而周期性轨道数目的指数分散，使其总和事实上不能达到收敛^[9]。结果是量子频谱不可能由只有经典信息而没有不可避免的误差情况而构成，该误差源自混沌轨道的指数不稳定性。这是混沌动力学的量子 - 经典对应中的困难的另一方面。

最近关于量子混沌的研究，从另一方面揭示了经典混沌量子系统呈现出有别于经典可积系统的明显不同特性^[11~12]。事实上，能级的最邻近间隔分布呈现出来的一个明显的转变，并且频谱中吸收线的分布在系统变成经典混沌时变得明显不规则起来。这个事实说明量子系统是经典混沌与否可以在它的量子本质中明显反映出来，尽管在宏观的“混沌”概念和微观的“量子不确定性”逻辑之间似乎存在有严重的分歧。

使用量子混沌这个术语，我们指出动力学的经典对应呈现出混沌行为。在这篇文章中，我想从下而观点讨论量子混沌的问

题：量子混沌可能是量子系统中不可逆性和耗散的起因吗？如果问题的答案是“是”的话，那么源自量子混沌的不可逆性的本质是什么？正如普利高津和他的合作者所阐述的那样^[4]，经典混沌可以是不可逆的起源。考虑到在经典和混沌动力学之间存在着的严重的差异，几乎不能指望量子动力学能完全模拟呈现出指数不稳定性的经典混沌。然而量子混沌以一种不同于经典混沌的方式作为不可逆性和耗散的起源也许是可能的。

在第二部分，我们考查了 Gedanken 实验来表明经典混沌动力学是如何与量子不确定原则相矛盾的，以及如何估计一个经典混沌量子系统能够完全模拟经典不稳定性的时间尺度的上限。有一个长得多的时间尺度，超出它就会在相空间中出现一个相对子经典分布的明显偏差。在后一个时间尺度上观察到的一个剧烈现象，就是相空间中经典可达到区域内渐近分布的强烈局域。这种局域现象有力地证明了经典混沌量子动力学对初始条件的记忆并没有失去，因此制止了趋向于平衡分布的驰豫过程。局域效应的物理起源是与一维无序晶格中一个电子的安德森局域相联系地进行了讨论的。

然而量子抑制效应在自由度数目增加时被极大地削弱了。这是因为在不同邻近层面间量子干扰的几率造成了复杂物体的出现，它是混沌量子抑制的本质起源，并随相空间维数的增加而减少。结果，经典混沌运动中内在的几个特点在多维量子系统中得到极大的恢复，该系统的经典对应部分是混沌的。这些问题将在第三部分中进行讨论。我们首先考查从外部环境引入系统的经典激励的影响。其次，我们要表明耦合系统中经典混沌的几个特征不用引入外部激励就可以自我恢复。最后，我们讨论在“自我恢复”的混沌状态下对初始条件的动力学敏感性。

混沌特征的恢复使我们希望量子混沌可能是具有多个自由度系统中耗散的起源。确实，我们在第四部分中提供了明确的依据。光吸收是一个最常见的例子，通过该例子我们能够证实在孤立的量子系统中耗散的存在。如果与一个光子源耦合的量子系统

能够稳定地吸收光子，我们就能够判定系统具有耗散能力。我们提供一个简单的模型，通过这个模型我们能够模拟一种光吸收实验的真实情形，并且进一步表明仅当系统是经典混沌的才会随有效普兰克常数的减小而发生向呈现耗散的状态的相变。有证据表明量子本征状态变得不可计算，并且有界的量子系统中内在的绝热不变性在向耗散态转变后就丧失了。然而，在完全耗散级的吸收频谱中伴随有异常的量子部分，并且不同于经典混沌所期望的，这也是量子系统仍然保持不会完全恢复经典混沌的证明。

我想强调的是量子混沌将要在实际的量子系统中作为不可逆和耗散的起源而充当一个核心角色。这样的角色将会在具有多个自由度的诸如原子核、多原子分子、微束、精细颗粒等系统中特别重要。对具有无限个自由度的宏观系统诸如凝聚物质，将我们关心的缓慢相关模式与无限数目的快速不相关模式相区别，这些模式充当前面模式的热源并且因而引起不可逆和耗散^[13]是有可能的。许多输运理论诸如线性响应理论基于以上图像得到了成功的发展^[14]。然而，在具有多个自由度的系统中不存在“热源”。在这样的系统中“量子混沌”的角色将会是关键的。

二、经典混沌的量子抑制

A. 一种异常地（变则地）短的时间尺度

很明显，一个有界量子系统的波函数仅能表现出回归运动，因为能量本征值的频谱是不连续的。我们因此可以设想记忆丧失或者相关性衰减不可能发生在这样的量子系统中。有几个数学证据显示出在 $\hbar \rightarrow 0$ 的极限情况下，系统的遍历性参数中存在着量子 - 经典混沌的对应。事实上，几位作者证明了经典混沌轨迹能够到达的相空间区域在数学极限 $\hbar \rightarrow 0$ ^[15]的情况下与它的量子对应部分相一致。在数学意义上这些判定当然是正确的。然而从动力学观点看，我们能够容易理解混沌动力学是如何在量子力学的本质上获得进展的。为表明这一点，我们提出一个简单的

Gedanken 实验验证混沌动力学和量子不确定性间的不一致。

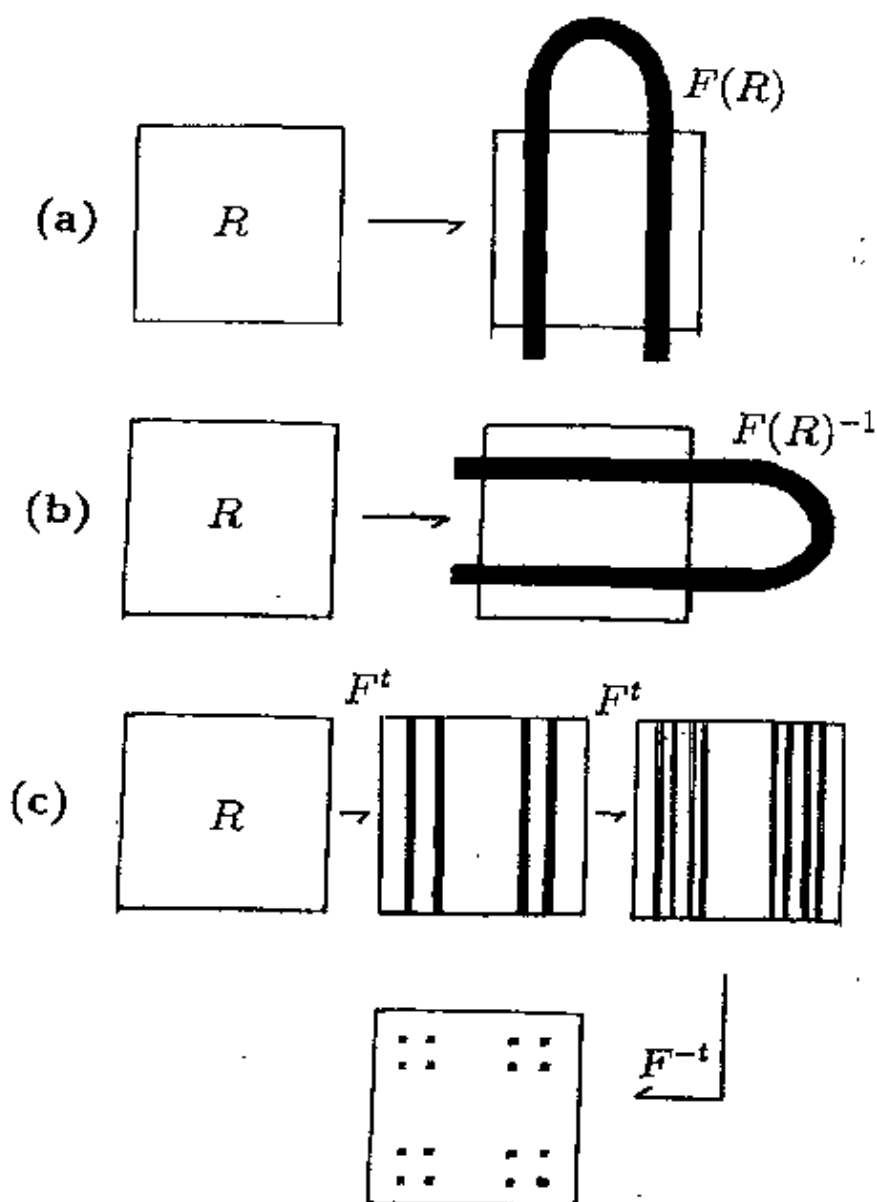


图 1 马蹄图

混沌动力学的本质是由 Smale 的马蹄图^[16,3]来表明的。如图 1 (a) 中所示, 区域 R 被拉伸及折叠以使在马蹄图 F 经过单一的操作后与 R 重叠。由此我们能看出, 如图 1 (b) 所示, 逆变换 F^{-1} 映射成 R 。假设我们由 F 重复映射 $2t$ 次, 那么与 R 重叠的图像 $F^{2t}(R)$ 分裂成 2^{2t} 个宽度为 $e^{-2\alpha t}$ 的条带 (图 1 (c)), 其中 e^α 是单步膨胀率, 因此 α 是李亚普诺夫指数 (我们假设 F 是面积保持图)。在第 $2t$ 个步骤我们进行动力学逆变换, 通过倒置的

马蹄图 F^{-1} 变换 $R \cap H^{2t}(R)$ 区域 t 倍。然后在第 $3t$ 个步骤形成的集合 $F^{-1}[R \cap H^{2t}(R)] = F^{-1}(R) \cap F^t(R)$ 恰好是由大小为 $e^{-\alpha t}$ (图 1(d)) 的 2^{2t} 个部分组成的外曲面集合, 这些部分可以通过增大 t 而变得任意小。明显地, 这样的部分的形成不能与量子不确定性相一致。因而任意小物体的形成, 作为混沌动力学的核心, 趋向于在某一时间尺度诸如 $e^{-\alpha T} = \hbar^{1/2}$ 之外中止, 比如

$$T^* = \log(1/\hbar)/\alpha \quad (1)$$

方程 (1) 意味着量子系统的信息能力, 即 $\log(1/\hbar) = \log[(\text{可用相空间容积}/\hbar)]$ 有限, 不能允许在 T^* 时刻之外混沌信息 ($\propto \alpha t$) 稳定产生的情况发生。在此时刻之外, 量子动力学就逐渐变得不能适用于模拟经典混沌运动。我们注意到时间尺度 T^* 非常短^[17,18]。如果系统可积, 相应于时间尺度 T^* 与 $\hbar$ 成比例, 且此混沌系统的 T^* 要长得多。

这样一个时间尺度的出现可以在一个变形的分布函数趋向于平衡分布函数的弛豫过程中观察到^[19]。在图 2 中表示了从一个“理想”混沌系统 (阿诺德猫)^[2] 和它的量子版本^[20] 得到的例子。在时间演化的最开始阶段, 从一种平衡分布的量子分布函数的偏离部分 P_1 遵从其经典对应部分衰减得很好, 但存在一个明显的时间尺度, 在此时间尺度之外, 量子衰减突然中止了。这个特征时间, 恰好相当于前面论述的异常时间尺度 $T^{*(21)}$ 。

B. 经典遍历的量子抑制

量子和经典映像

上面论述表明量子系统可以在一个相当受限制的时间尺度上模拟经典混沌的不稳定性。这样的差异可以在诸如相互关联的衰减方式这样的混合特性上敏感地反映出来。例如, 在充分发展的混沌行为中观察到的相互关联的指数衰减会在超出 T^* 之外受到抑制。然而遍历特性对克服混沌不稳定性的量子抑制更具鲁棒性, 并且经典和量子遍历性的差异在一个比 T^* 长得多的时间尺度上变得显著起来。不过, 正像下面所要描述的, 这个差异导

致一个易于观察到的显著效应。

我们首先引入一个典型的量子模型系统。该系统是经典混沌的。这个模型今后要被我们经常用作研究混沌动力学中经典 - 量子对应的典型系统。

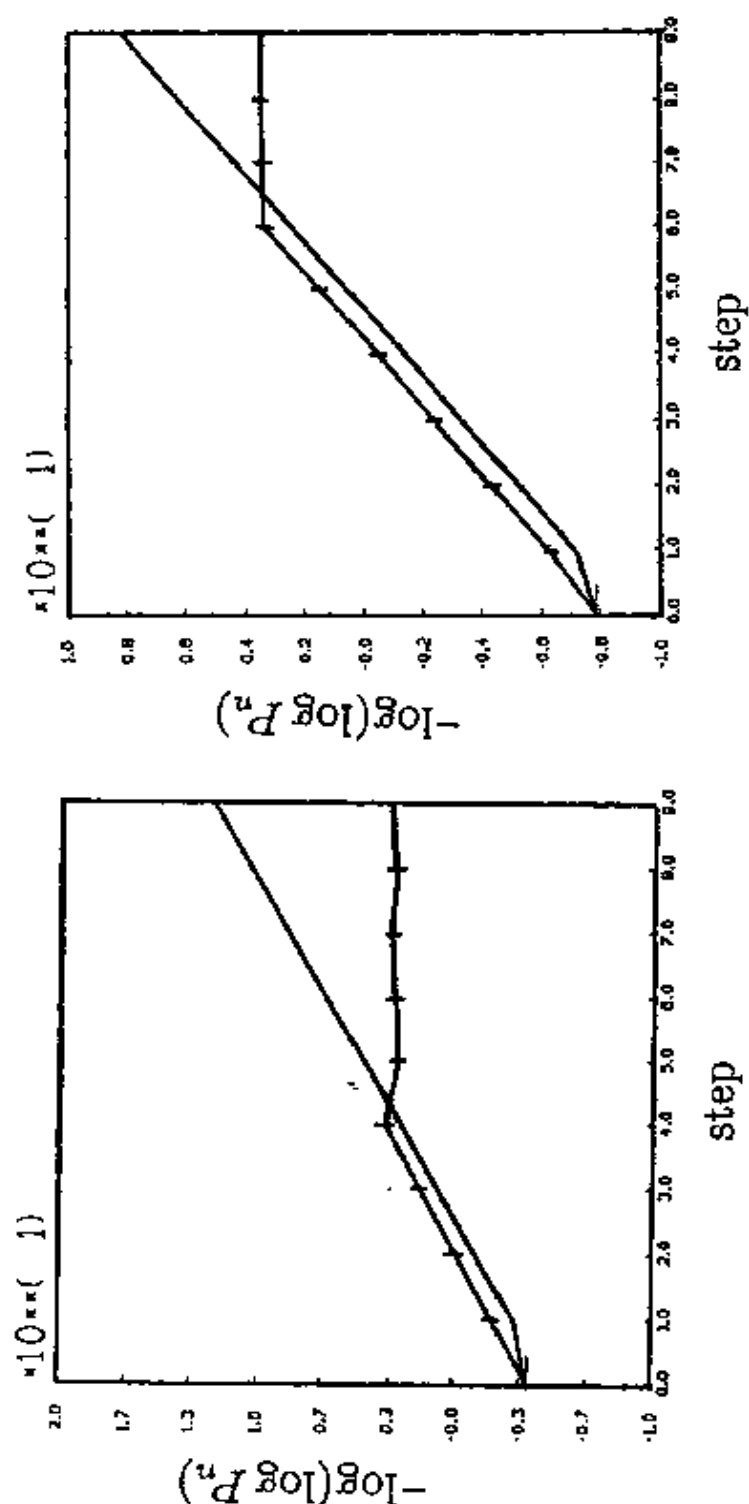


图 2 趋向于均匀平衡分布的驰豫过程的量子抑制
右: $\hbar = 2\pi/1024$ 左: $\hbar = 2\pi/64$ 经典结论 (——) 与量子结论 (+++++) 比较

考虑一个经典的具有一个以上自由度的哈密顿系统。并且设想它被分解成具有一个自由度的多个系统。那么每一个组成系统是可积的, 因此每一个哈密顿函数单独涉及行为变量, 但是一旦它们相互之间发生耦合, 整个系统会随着耦合强度的增加而呈现非常复杂的混沌特性^[13]。描述以上情况的一个最简单系统是一个与具有脉冲相关的线性振子耦合的非线性振子: 令 $H_0(I)$ 和 $2\pi J$ 分别为非线性和线性模式的哈密顿函数。那么由脉冲相关耦合的总系统由下式给出

$$H_{\text{tot}} = H_0(I) + 2\pi J + \sum_n V(\theta) \cos n\phi \quad (2)$$

其中 θ 和 ϕ 分别是与 I 与 J 共轭的角变量, $V(\theta)$ 是 θ 的 2π 周期函数。从运动规范方程 $d\phi/dt = \partial H_{\text{tot}}/\partial J = 2\pi$, 我们得到 $\phi = 2\pi t$ 及 $\sum_n \cos n\phi = \sum_n \delta(t - n)$, 因而模式 I 的运动可由周期性冲力急冲的有效哈密顿函数来描述

$$H(I, \theta, t) = H_0(I) + V(\theta) \sum_n \delta(t - n) \quad (3)$$

因此单个急冲周期后可得到从 (θ, I) 到 (θ', I') 的映像

$$\theta' = \theta + dH_0(I)/dI \quad (4a)$$

$$I' = I - dV(\theta')/d\theta' \quad (4b)$$

取 $H_0(I)$ 和 $V(\theta)$ 分别为 $H_0(I) = I^2/2$, $V(\theta) = K\cos(\theta)$, 方程 (4) 产生著名的标准映像或称为急冲转子, 由 Chirikov 等人进行过广泛研究^[22]。

将规范共轭变量由算子 $(\hat{\theta}, \hat{I}) = (\theta, -i\hbar \partial/\partial \theta)$ 替换, 我们可以立即得到相应于等式 (3) 所描述的经典系统的量子映像。确实, 相应于经典映像 (4) 的量子动力学单步演化可以通过运算一元算子来描述。

$$\hat{U} = T \exp \left(-i \int_0^1 ds H(\hat{\theta}, \hat{I}, s) \hbar \right) \quad (5)$$

局域现象

我们首先简要地描述一下标准映像的经典动力学。如果耦合

强度 K 足够小, 那么相空间几乎要被分隔不同动量空间区域 (对 I 我们常使用“动量”一词而非“作用”) 的 KAM 不变圆环所覆盖。然而如由 Greene 所指出的那样, 如果 K 值增加到超过临界 $K_c = 0.97 \dots^{[23]}$ 时, 最后的 KAM 就被破坏了, 而且横越连接所有动量空间区域的混沌轨迹就形成了。沿着这些轨迹, 初始局域的动量分布函数扩展到均匀覆盖动量空间。特别是动量表达式中分布变量 $M(t)$ 随时间扩散地增加

$$M(t) = D_{CL} t \quad (6)$$

由等式 (4b), 扩散系数通过下式与“力-力”关连函数 $g(t)$ 相联系

$$D_{CL} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} K^2 g(s) \quad (7)$$

其中 $g(t)$ 定义为 $g(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T V'[\theta(t+s)] V'[\theta(t)]$ 。

然而, 量子行为却与经典行为有很大差别。这个事实首先由 Cacati、Chirikov 和他们的合作者发现^[24]。观察到的一个令人惊奇的结论是如图 3 所描绘的混沌扩散在量子系统中受到抑制。这个事实暗示系统的本征函数都位于动量空间内。Chirikov 等人发展了一个简单的自恰图像, 将量子系统的局域长度 I_{loc} 和饱和时间 T_s 与经典扩散常数联系起来^[18], 如

$$T_s = D_{CL}/\hbar^2, I_{loc} = D_{CL}/\hbar \quad (8)$$

解释局域现象起因的一个想法由 Fishman 等人提出^[25]。他们指出对诸如 $U\phi_\omega = e^{i\omega} \phi_\omega$ 这样的量子演化算子的频率本征值方程在某种意义上等价于电子的能量本征值方程, 而电子在具有可调节的当地势的离散一维晶格上跳跃, 此处晶格相当于动量算子 $\hat{I} = -i\hbar \partial/\partial\theta$ 的离散本征态 $I = m\hbar$ (m 为整数) 的阶梯。如果调整不与晶格点位相匹配, 并且进一步调整深度足够大的话, 调整的势引起动量晶格上波函数的安德森定域, 这就是在量子急冲映像上不出现扩散的解释。

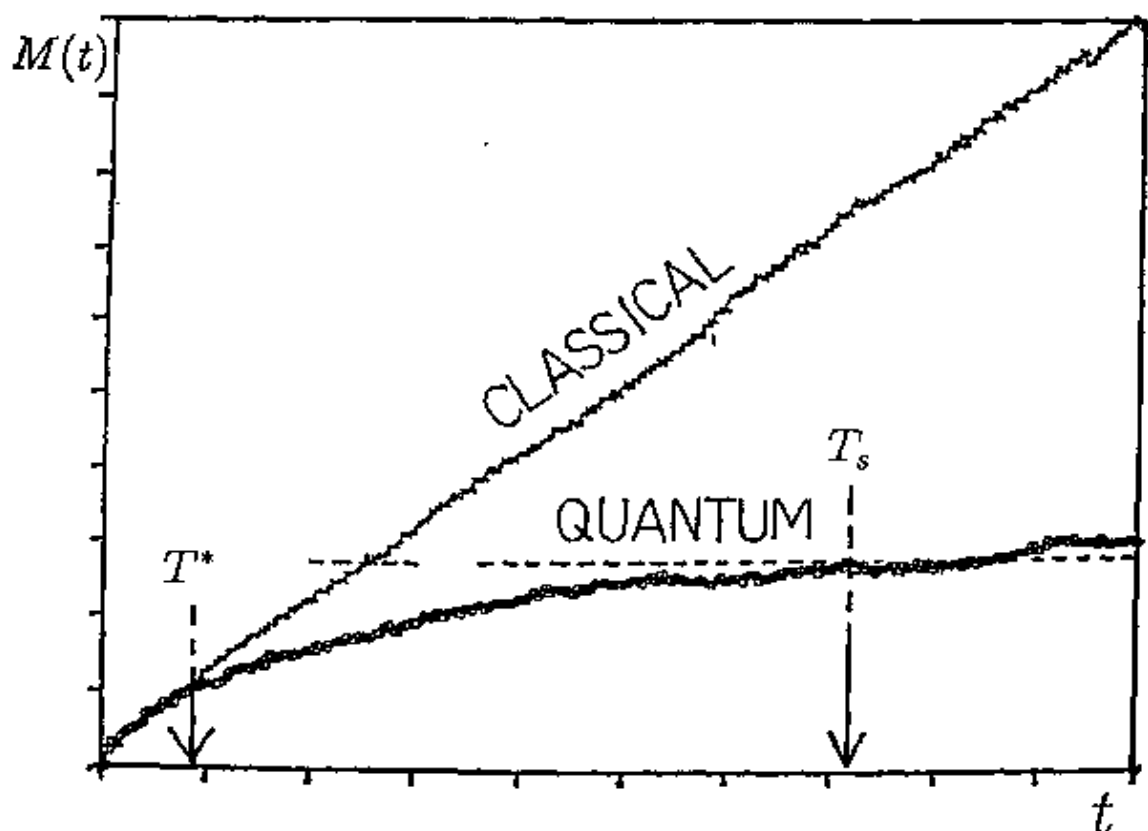


图3 在动量 (I) 空间中的混沌耗散, 其中 $M(t)$ 是 I 的二阶动量。注意量子耗散很快就饱和了

波函数局域化是在经典混沌系统中广泛观察到的普遍现象。确实, 许多都知道的例子能够证明量子波函数不能在相空间区域上扩展到经典混沌轨迹可达到的区域。特别是局域现象最近在氢原子的微波电离实验^[26]中观察到。

另一方面, 局域现象是不稳定的, 并且如果自由度数大于 2, 则量子抑制机理就被扰乱。这个问题在下面部分将要进行讨论。

三、混沌的恢复

A. 经典遍历性的恢复

外部刺激

在经典混沌动力学与量子混沌动力学之间存在严重的差异是由于量子动力学特有的干涉效应。这个事实意味着如果我们引入

任何破坏量子干涉的机制，量子系统可以从抑制机理中解脱出来，并且恢复混沌运动。很自然地设想任何量子系统会承受从外部环境引入的噪声影响，它在破坏量子相干性中扮演着一个关键角色。与破坏安德森局域效应的相似的噪声效应首先由 Thouless 在一维电子导电的文献中指出^[27]。

有几位作者关于经典噪声对混沌扩散的量子抑制的影响进行了研究^[28~31]。他们都报告施加噪声会导致混沌扩散的量子抑制的极大破坏。我们考虑在下面扩散中得到恢复的机理^[30~32]。

回想经典关系式 (7)，该式表明扩散常数 D_Q （如果必须区别一个量子参数和经典参数，我们分别以下标 Q 或 CL 表示）为

$$D_Q(\epsilon) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} K^2 g(\epsilon, s) \quad (9)$$

其中我们用 ϵ 代表噪声强度，在量子动力学中是这样表示。局域效应意味着即使在 $t \rightarrow \infty$ 处 $g(\epsilon, t)$ 也不衰减，对初始条件的记忆完全保留在系统中，但是噪声的引入显著地改变了相互关联的性质。理论上的研究揭示了 $g(\epsilon, t)$ 能近似表示成衰减因子 $d_\epsilon(t)$ 和无噪声的变换函数之积，即 $g(\epsilon, t) = d_\epsilon(t)g(\epsilon = 0, t)$ 。呈指数衰减的因子 $d_\epsilon(t) = e^{-|t|/\tau(\epsilon)}$ 描述了由于外部噪声引起的量子相干性的破坏，且衰减时间取决于 ϵ 和 $\hbar$

$$\tau(\epsilon) \propto (\hbar^2 + f/\epsilon^2) \quad (10)$$

指数 $f(>0)$ 取决于扰动的类型 ($f=2$ 代表相调整， $f=0$ 代表振幅调整)。

如在第二部分所强调的那样，存在两个时间尺度 $T^* = \log(\hbar)/\alpha$ 和 $T_S = D_{CL}/\hbar^2$ 。在 $t < T^*$ 时量子运动完全模拟经典混沌，而当 $t > T_S$ 时经典扩散完全饱和。如果 ϵ 足够大以使 $\tau(\epsilon) < T^*$ ，那么 $d_\epsilon(t)$ 分割了非经典时间区域 $g(\epsilon = 0, t)$ 使得 $D_Q(\epsilon) = \sum_s d_\epsilon(s)g(\epsilon = 0, s)$ 与经典扩散常数保持一致。在极弱的噪声区域，诸如 $\tau(\epsilon) > T_S$ ，由于噪声诱导的在局域基准间的跳跃， $D_Q(\epsilon)$ 接近扩散常数，根据基本扰动理论计算可得到 $D_Q(\epsilon) \propto \epsilon^2$ 。

存在着 ϵ 的三个区域, 可以通过数值模拟的结果在图 4 中清楚地看出来。

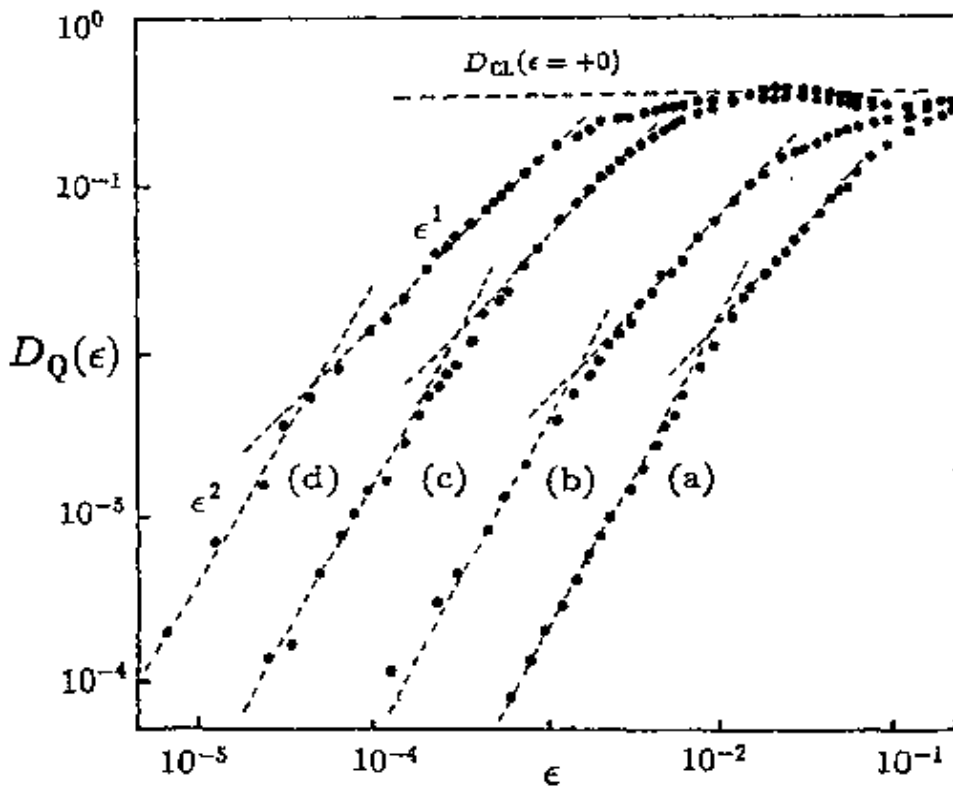


图 4 由经典噪声驱动的单个急冲转子的量子扩散常数对 ϵ 的依靠。 $D_{CL}(\epsilon = +0)$ 代表没有噪声的经典扩散常数。(a) $\hbar = 2\pi \times 21/512$ (b) $\hbar = 2\pi \times 21/1024$ (c) $\hbar = 2\pi \times 21/2048$ (d) $\hbar = 2\pi \times 21/21$ (来自[30])

一个令人惊奇的事实是图 5 表明在使 $\tau(\epsilon) < T^*$ 的 ϵ 的最大区域量子扩散常数模拟了经典扩散常数的全部细节, 这意味着 ϵ 大于“经典化”的阈值

$$\epsilon_c \propto \hbar^{(1+f/2)} \quad (11)$$

所以经典混沌扩散是由一个非常弱的经典噪声所恢复的。 ϵ 的其他区域的含义由 Toda 等人进行了讨论^[32]。

不稳定性的自组织: 两个以上自由度的系统

一个基本问题是可以由外部经典刺激恢复的经典混沌行为, 是否能够由量子系统本身不经过施加任何人为的刺激而得到恢复。为回答以上问题, 我们考查由 Adachi 等人推荐^[33]的耦合急冲转子作为最简单的例子。这个模型的哈密顿函数由下式给出

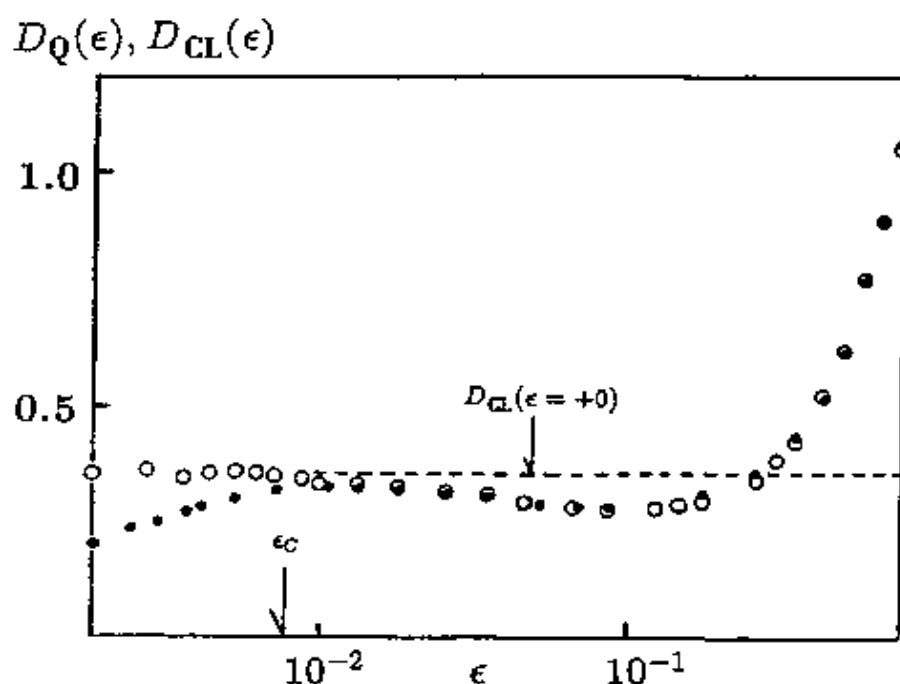


图 5 量子扩散常数 ($D_Q(\epsilon)$) 与经典扩散常数 ($D_{CL}(\epsilon)$) 的比较, 其中 $\hbar = 2\pi \times 21/4096$ (来自[30])

$$H^{(2)}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{I}_1, \hat{I}_2, t) = H(\hat{\theta}_1, \hat{I}_1, t) + H(\hat{\theta}_2, \hat{I}_2, t) + \epsilon \cos(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2) \sum_n \delta(t - n) \quad (12)$$

因为两个转子间的耦合, 其中一个转子 (设为转子 2) 的运动如同外部噪声扰乱了另一个转子 (设为转子 1)。然而来自转子 2 的扰乱远非经典刺激: 它是纯粹的量子力, 它在比 T^* 长的时间尺度逐渐失去了固有的 (或经典的) 随机性。因此如果耦合强度 ϵ 足够弱的话, 似乎转子 1 的运动不能完全恢复经典不稳定。

从不同的观点看, 一个恢复混沌不稳定的正反馈机制存在子耦合急冲转子动力学之中: 受到转子 2 的扰动, 转子 1 的运动变得比以前更加具有内在混沌了, 并且增强了的转子 1 的混沌运动特性扰动转子 2 进而使其运动更加经典。这样的两个转子间相关充当了一个正反馈回路, 通过该正反馈回路经典不稳定性在整个系统中得到恢复。问题是向经典扩散得到恢复的这个状态的转变是否确实会发生。我们首先借助一个简单的唯象论述考察这样的可能性。

唯象理论对前面提到的正反馈回路的存在提供了一个定量的证据^[32]。设想转子 2 可当作具有有效强度 ϵ^* 的经典噪声源影响转子 1 的运动。那么转子 1 的暴露耦合强度 ϵ 下的扩散常数 D_Q 可由式 $D_Q(\epsilon) = \Sigma_s K^2 g(\epsilon^*, s)$ 给出。下面的任务就是评价有效 ϵ^{*2} , 获得该值的方法是将相关力的平方平均值近似代表 ϵ^{*2} 。后者反过来能用相关函数 $g(\epsilon^*, s)$ 的面积与暴露耦合强度 ϵ^2 的乘积来表示。最后得到决定 ϵ^* 的一个自恰方程

$$\epsilon^{*2} = \epsilon^2 D_Q(\epsilon^*) \quad (13)$$

如果方程 (13) 有一个 ϵ^* 的非零解, 扩散长度就是有限的并且可以实现稳定扩散。既然对 $\epsilon^* \rightarrow 0$ 有 $D_Q(\epsilon^*) \propto \epsilon^{*2}$, 我们很容易看出当 ϵ 超过一个临界值时出现一个非零解, 并且在由等式 (11) 定义的经典化阈值之上 ($f=0$, 在等式 (12) 的耦合式情况下), D_Q 进一步接近 D_{cl} 。

具有耦合急冲转子的数值模拟首先由 Adachi 等人进行了考察^[32,33]。他们发现即使在转子间引入一个非常弱的耦合也会引起混沌扩散的极大恢复。图 6 中我们表示出 ϵ 对量子扩散常数 D_Q 随时间演化 $M(t)$ 在不同 ϵ 下的依赖关系。很明显存在一个 ϵ 阈值, 在该阈值之上稳定扩散能够得到恢复。看来转变到具有临时减小的 D_Q 的无限扩散首先是伴随着 ϵ 的增加而发生, 接下来实现了向由常数 D_Q 表征的稳定扩散的转变, 最后当 ϵ 超过了经典化阈值 ϵ_c 之后, D_Q 与经典扩散常数吻合。

因此, 经典混沌扩散可以在耦合量子转子中如从唯象考虑那样, 不用引入经典扰动而确定无疑地得到恢复。

被恢复的混沌是内在的吗?

由于不确定性原则所造成的有限信息容量, 它是在第 2A 部分讨论过的量子系统的本征特性, 不能够通过将自由度数目从 2 (单个急冲转子) 增加到 3 (耦合急冲转子) 而消除。因此与时间成比例稳定地产生的混沌信息即使在我们的耦合映射系统中也会被抑制。这个事实意味着在充分发展经典混沌中相当常见的相关指数的衰减, 在全部时间尺度内都不会发生。对足够大的 ϵ ,

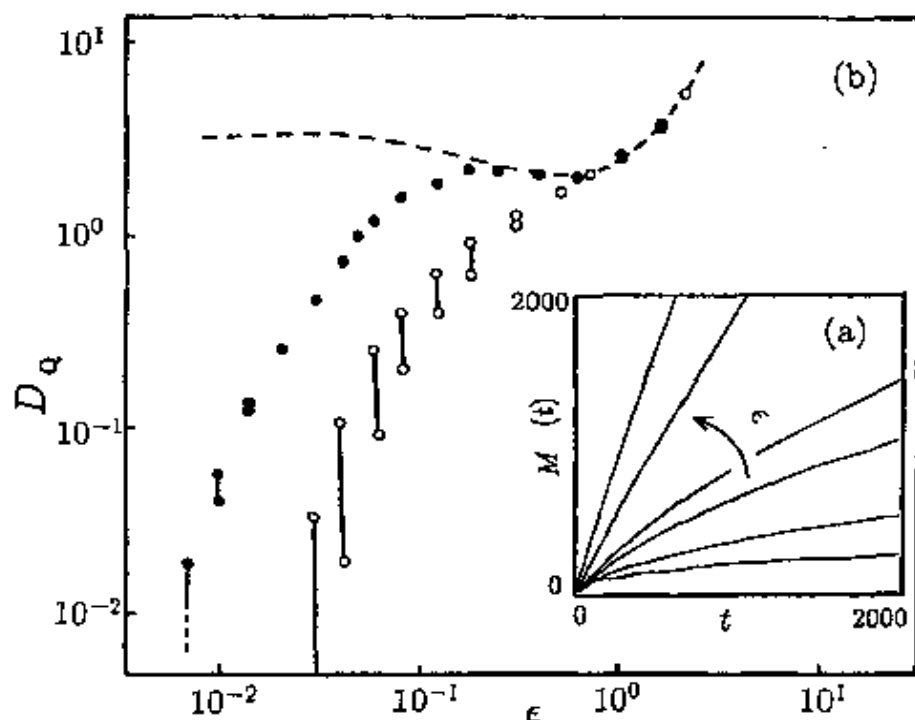


图6 (a) 随耦合强度 ϵ 的增加扩散运动的恢复; (b) 量子耦合急冲转子的扩散常数的依靠; 间断曲线代表经典扩散常数。在小的 ϵ 值下, 在由条形限定的范围内 D_Q 随时间减少。实心圆: $\hbar = 2\pi \times 41/1024$, 空心圆: $\hbar = 2\pi \times 41/512$ (来自 [30])

相关函数当然会以经典方式衰减, 从而再现经典扩散常数, 然而长期的相关特性可能不与经典系统中一样。更确切地说, 相关性在耦合系统中确会衰减, 但衰减速度可能比经典指数衰减速度要慢。我们要在第四部分出示相关性的长期尾迹的清楚证据。

总而言之, 初始记忆的衰减在耦合转子系统中当然会得到恢复。特别是, 动力学的总的特征与它们经典对应部分符合之好, 令人吃惊! 但是丧失记忆的详细过程 (或者说产生混沌信息的过程) 不能完全模拟它的经典对应部分。量子 and 经典衰减间的相关性差异在比 T^* 长得多的时间尺度上表现出来。在这种意义上, 被恢复的混沌运动还不是内在的经典混沌。

B. 量子轨迹的不稳定性

经典混沌的本质特征是对扰动轨迹的敏感依赖。确实, 在经

典混沌动力学中两个相邻的轨迹随时间呈指数规律分离，正如马蹄形映像典型地所显示的那样。急冲转子运动的经典形式（或者标准映像）当然在混沌区域内呈现出这样的敏感性。这里要确定的问题是在第 3A 部分论述的自行恢复的混沌行为是否呈现这样的敏感性。在本部分我们想要回答这一问题。

在量子动力学中追踪相空间中一条清晰的轨迹是不可能的。这个困难在使用两条邻近轨迹间的分离来量化不稳定性度时更加突出。然而，有一种简单方法，借此方法我们可以定量地检验对外部扰动的量子敏感性。这就是时间倒转实验。从一个初始量子状态 $|in\rangle$ 开始，我们通过乘以一元算子 $\hat{U}$ （方程(5)）以正常的（向前）时间演化规律来演化这个系统。在 $t = T$ 时刻我们施加一个扰动 $\hat{P}$ ，该扰动经典上相当于移动相空间中系统的位置。最后，我们根据倒转的（向后）时间演化规律使系统演化回来。从而最终状态可表示成 $\hat{U}^{-T} \hat{P} \hat{U} T |in\rangle$ 。如果没有扰动，系统会回到初态，但是如果系统遵循不稳定动力学的话，移动后的系统不再能返回初态。通过测量当 $\hat{P}$ 的强度变化时不可逆性如何改变，我们能够用外部施加的扰动来表征系统的敏感性。

在图 7(a) 中我们显示了由量子急冲转子执行的时间倒转实验的典型结果。对 $t > T$ ， $M(t)$ ，对不同的扰动强度值进行计算，以几何级数增加的 ζ 被叠加。明显地向前的扩散在除了 $\zeta = 0$ 之外，在 $t = T$ 后或早或晚会得到恢复。在图 7(b) 中我们画出了在两对时间（ $t = 0$ 和 $t = 2T$ ）与（ $t = 0.5T$ 和 $t = 1.5T$ ）下测量的作为 ζ 的函数的不可逆性。注意到所绘图形在 ζ 较大一侧位于一条直线上，这是个经典期望的行为。然而存在一个阈值 ζ_{th} ，在此值之下发生了一个对经典行为的明显偏离。这个事实表明仅当两条邻近轨迹分离超过 ζ_{th} 时它们才以经典方式呈指数分离。

阈值距离 ζ_{th} 的意义可以根据半经典路径积分理论^[34]进行解释。它由自恰的不确定性关系决定

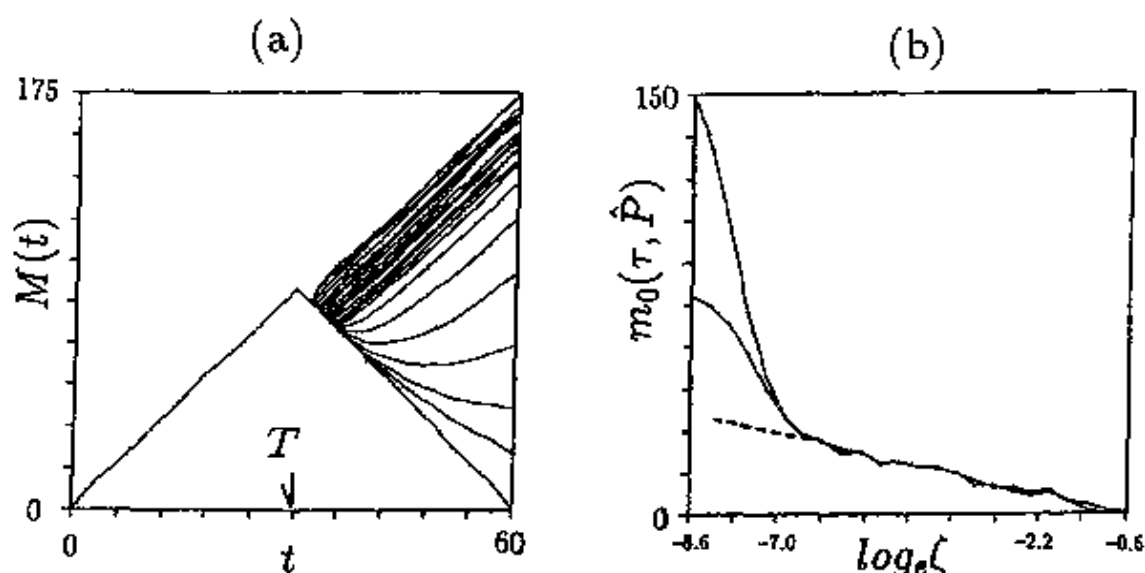


图7 时间倒转实验：(a) 对不同扰动强度的动量 $M(t)$ 的时间演化。在 T 时刻的脉冲扰动后动力学倒转；(b) 不可逆对扰动强度 ζ 的依靠，间断线代表经典特性（来自：[34]）

$$\zeta_{ih} \Delta I(\zeta_{ih}) = \hbar \quad (14)$$

其中 $\Delta I(\zeta)$ 是在两条经典轨迹在它们失去对初始分离 ζ 的记忆之前形成的特征距离。确实，在急冲转子的情况下我们可以估计出来 $\Delta I(\zeta) \sim [D_{CL}(-\log(\zeta)/\alpha)]^{1/2}$ (α : 李亚普诺夫指数)。

所以，有一个量子尺度 $\zeta_{ih} \propto \hbar$ ，而且两个状态间的初始距离必须大于 ζ_{ih} 以使从两个邻近状态开始的量子运动在经典方式上失去它们对相对位置的记忆。无论如何，即使上面提到的情形下，两个状态通常共享的记忆仍然在一个非常长的时间尺度上以指数规律丧失是令人怀疑的。正如在前面的部分所强调的那样，指数衰减会在一个比 T^* 长得多的时间尺度上逐渐停止。量子系统对经典系统长期特性的偏差直接反映在耗散过程的频谱特征上，这一点将在下一节进行详细讨论。

四、稳定耗散

A. 耗散测试：建模

正如前面部分所讨论的那样，具有两个以上自由度的经典混

沌量子系统在适当条件下可能会呈现出混沌不稳定性的一些特征。如果量子系统有能力失去记忆或者产生复杂性，我们就可以期望由外界算子作用到系统上的所有功都不返回，而且会观察到从外界算子到系统的单向能量输运，这恰好意味着耗散的发生。

我们怎样能测试是否一个系统会呈现出耗散？测试出现耗散的一种最直接方法是将系统(O)与一个充分激发的系统(P)进行弱接触，观察是否能量稳定地从 P 流向 O ^[35]。如果我们将 P 取为辐射场，那么我们的问题就转化为是否系统 O 稳定地吸收光。

传统的光吸收理论设想稳定吸收的起源是系统与由无限个自由度组成的热源间的耦合^[36]。如果热源内基本激励的频谱是绝对连续的，与热源的耦合迫使引入系统的极化流失去它的相记忆，因而使它达到吸收的稳定^[13]。我们可以说传统理论通过人为地加入一个热源而引入耗散。我们的立足点却和它有着鲜明的不同。我们期望隐藏在系统本身的内在动力学的混沌混合可能是一种机理，通过这种机理稳定耗散为自组织。我们特别关注的是混沌导出的耗散在其本质上不同于基于传统的热源模型所导出的^[13]。

现在我们解释我们借以研究由量子混沌引入的光吸收本质的系统。正如前面部分所论述的，自由度数目必须大于2以使量子系统能显示混沌混合。用真实模型的模拟，例如用耦合模式系统模拟多原子分子的电子振动运动模型，如果模式数目大于2则会占用太多的CPU时间。我们必须构造一个允许我们进行真实的光吸收数值实验的模型系统。前面部分作为标准模型的量子映像系统，似乎是适合我们目的的好的候选对象。然而，它们都存在不便于作为光吸收模型的许多缺点，但幸运的是可以对它们进行修正以达到我们的目的。

与我们问题性质密切相关的核心困难在于当耗散发生在我们测试的系统中时，能量本征值和本征状态可能是不可测定的。因此我们被迫要计算在一个给定时间步长内吸收的能量本身。以量子映像为基础构造的模型对此目的来说是非常方便的^[35,37]。

让我们回忆由方程 (3) 所描述的量子映像的自激表达式, 即非线性模式通过脉冲相关与线性模式相耦合。这里使用的模型与此非常相似, 除了非线性模式是 (都是) 与少量数目的另外线性模式相耦合外。如图 8 中所示提出了 3 种模型并进行了测试。为实际目的, 让我们解释图 8 (a) 的情况^[37]。非线性振子 I 与一个特定的线性模式 J 通过耦合强度为 K 的脉冲相关 (我们称之为系) 并强烈耦合, 而与我们称之为客系的其他线性模式 $J_1 \cdots J_{N_H}$ 的由 ϵ 表示的耦合强度不是非常强烈。无须说, 主系等价子由哈密顿函数 (2) 或 (3) 描述的量子映像系统。如果我们使主系的相空间有界, 我们的系统就模拟了一个通常的情形, 一个有界的混沌系统与我们称为客系的一些其他自由度数目的系统相互作用。这样我们进一步将主系 + 客系系统与另外的基准状态相耦合, 从 (到) 该基准状态, 系统与频率为 Ω 的辐射场相互作用而受激励。我们现在就能由两个以上自由度的系统完成光吸收的真实模拟。

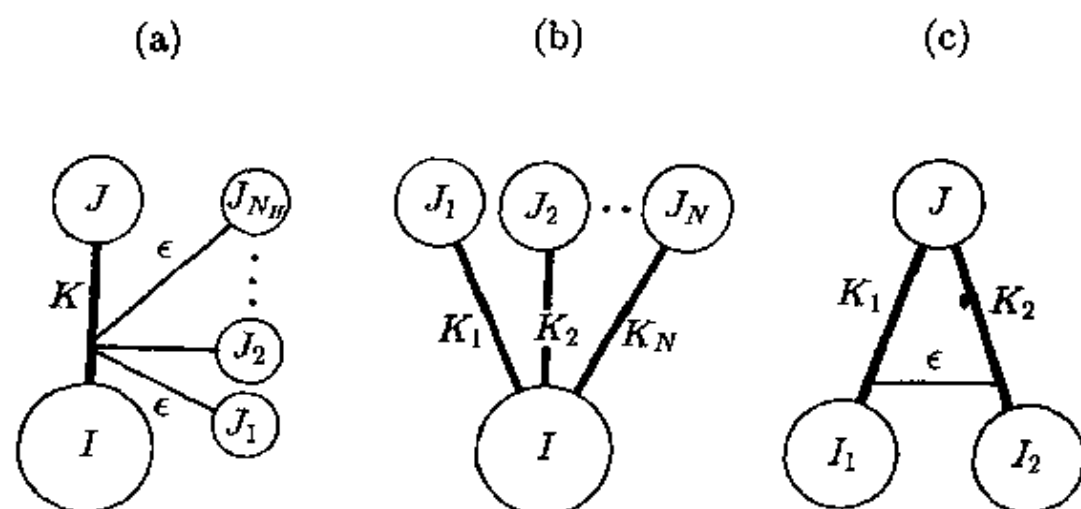


图 8 考察所提模拟的光吸收系统的块图。(a) 参数映像图; (b) 极化映像图; (c) 耦合映像图, $I(I_K)$ 代表非线性振子, 而 $J(J_K)$ 代表线性振子。 K 代表的耦合是指脉冲相互作用

B. 模拟的光吸收

在我们的模拟中, 我们使用扫描频率 Ω 来计算系统在到达

时间步长 t 时所吸收的能量 $I(\Omega, t)$ 。首先, 我们设置客系模式与主系模式的耦合强度为零 (= 两个自由度)。然后吸收频谱 $I(\Omega, t)$ 变成仅由 δ 函数峰值组成, 其位于 Ω 的函数峰值构成一组测度零, 与主系是经典混沌与否无关。在另一个构成一组测量为 1 的 Ω , 吸收是循环进行的, 这意味着稳定吸收是不存在的。

然而当主系映像系统与助手模式发生耦合时, 即使耦合强度在例如对 $\hbar \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow 0$ 时是经典可忽略的, 也会发生巨大的变化。我们在图 9 中表示了这样一个转变的典型例子。很明显存在一个 ϵ^* 阈值, 在此阈值之上吸收能量的循环 (振荡) 变化转变为稳定的线性增长。

一旦这样的转变发生, 吸收频谱就有了绝对连续的组成部分。关键的事实是这样的转变当且仅当主系是经典混沌时才会发生。因而当“混沌的”主系 (两个自由度) 与几个其他自由度相耦合时向耗散状态的转变就会发生。

然而, 混沌导出的吸收的一个特征性能是稳定扩散伴随有异常脉动, 这可在吸收频谱本身形状上清楚地看出来。在图 10 中我们显示了吸收频谱的时间演化。频谱是绝对连续的, 其中具有多个尖峰的异常部分叠加起来。随时间流逝, 每个尖峰 (谷也一样) 进一步分裂成更加细小的尖峰和谷, 这样的分裂过程的级联将持续进行没有尽头。注意 (b) 是 (a) 中显示的频率区域的一部分的放大。(b) 中瞬时的的发展是复制 (a) 的, 这是自相似的有力证明。因此, 频谱中伴随有一个不可分解的自相似部分。

异常部分的振幅与 $\hbar^{1/2}$ 成比例。结果是在 $\hbar \rightarrow 0$ 的极限情况下异常部分消失了, 并且频谱变得仅由光滑连续部分组成, 这部分可以解释为经典部分。异常部分自相似的定量方面可由该部分富里叶变换的负荷进行度量

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega F(\Omega) I(\Omega, t = \infty) e^{-i\Omega\tau} \quad (15)$$

其中 $F(\Omega)$ 是过滤函数。对 $|\Omega| \rightarrow \infty$ 有 $F(\Omega) \rightarrow 0$ 。数值模拟表明在 ϵ^* 之上的稳定耗散区域内, 权重以负指数幂规律衰减, 即

$|C(\tau)|^2 \sim \tau^{-\eta}$ 。衰减指数 η 对 ϵ 的关系在图 11 中描绘出来。明显的现象是衰减指数渐近地趋向于一个值，该值与助手 N_H 的数目密切相关。如设 $\epsilon > \epsilon_c$ ，则 $\eta = N_H/2$ ，在下一部分将根据半经典理论对此进行解释。

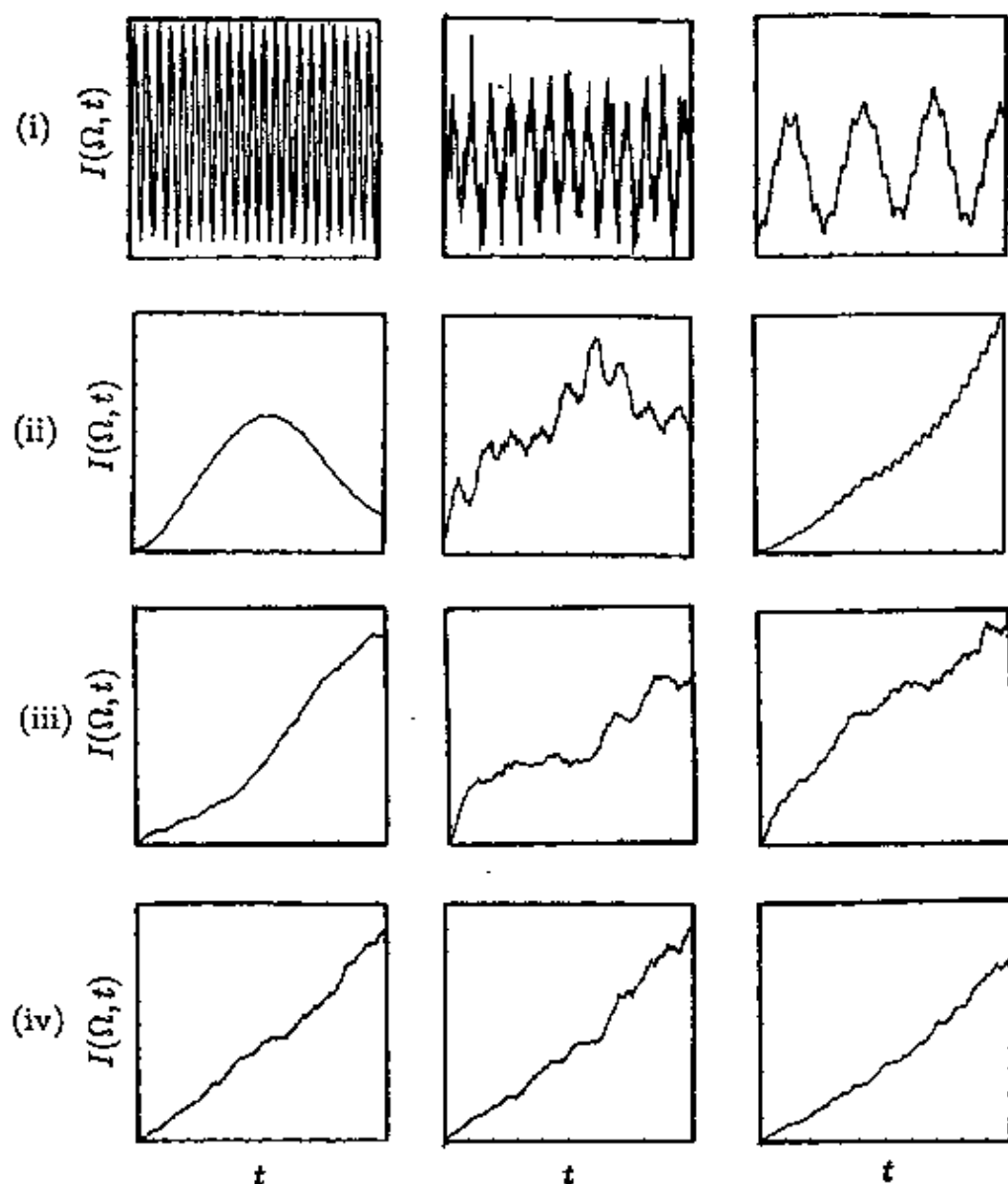


图 9 在 3 个不同频率 (Ω) 下测量的吸收能量的时间演化。耦合强度依次增加，(i)，(ii)，(iii)，…。这里 (iii) 和 (iv) 在 ϵ^* 之上。阿诺德的猫映像用作主系

$C(\tau)$ 可以和描述我们系统的时间演化的一个基本量相联系。事实上 $C(\tau)$ 不再是主系 + 客系系统的格林函数。更确切地说， $C(\tau)$ 是一个经过长的时间内平均的格林函数

$$\langle G(\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T ds \langle e | U(s + \tau, s) | e \rangle / T \quad (16)$$

其中 $U(t_1, t_2)$ 是主系 + 客系系统的演化算子。 $\langle G(\tau) \rangle$ 测量的是在 τ 内时间演化后状态 $|e\rangle$ 中保留的记忆平均量。数值模拟的结果有力地证实了记忆的衰减正好在 ϵ^* 之上并且与稳定吸收同时发生。 $\langle G(\tau) \rangle$ 突然减少到一个量子水平 $O(\hbar)$ ，并且进一步以 $\tau^{-1/2}$ 规律缓慢衰减。前一过程成为光滑的“经典”部分，而后一过程导致异常的自相似部分。

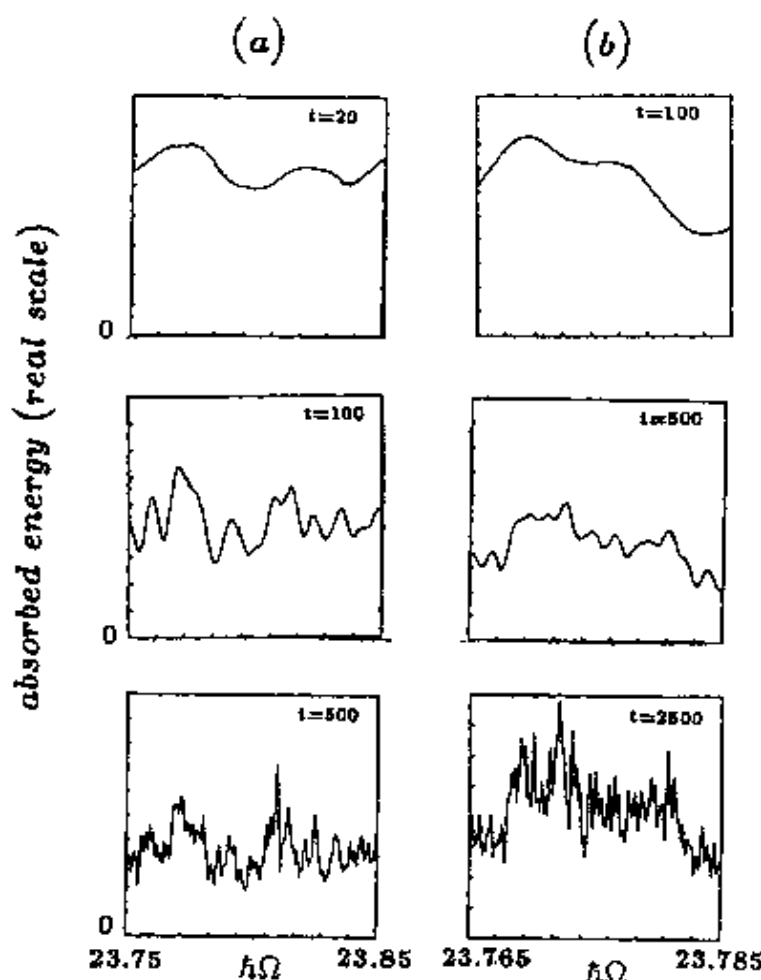


图 10 吸收谱的时间演化。(b) 是 (a) 的频率域的一部分的放大。注意在 (a) 和 (b) 间频谱形状的相似。阿诺德的猫映像用作主系 (来自: [37])

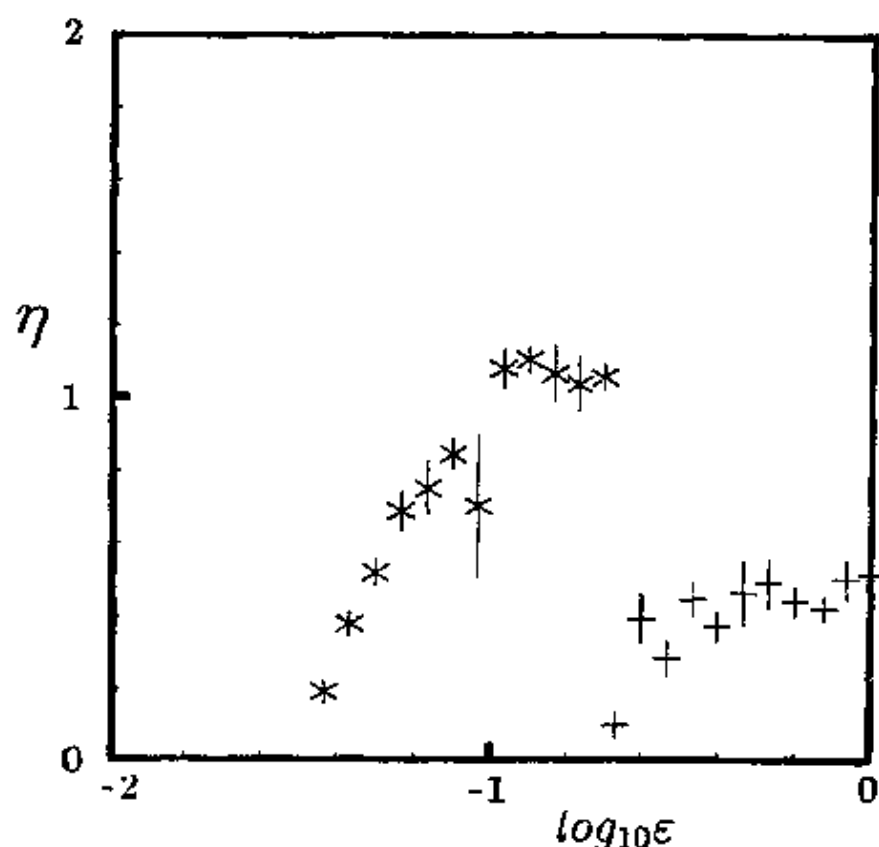


图 11 朝向耗散（稳定吸收）状态的相变。当耦合强度 ϵ 超过临界值 ϵ^* 时衰减指数 η 从 0 增加。阿诺德的猫映像用作主系（来自：[37]）

* : $N_H = 2$ + : $N_H = 1$

C. 半经典理论

沟通纯粹量子动力学与经典动力学的理论框架是半经典理论，该理论对理解我们所考虑的模式中内在耗散的发生是非常有帮助的^[37]。

为简单起见，我们首先考虑方程 (3) 的量子映像，并根据它简要描述半经典理论的本质。根据 Feynmann 的路径积分公式，连接初始位置 (θ_i) 和终了位置 (θ_f) 的格林函数在 t 时间步长内由传播函数的乘积积分表示，该积分覆盖了初始和终了步长间的中间状态的所有可能组合态。这个半经典近似是一种鞍点方法，它评估了由稳定组合态构成的被积函数数值的状态。在路径积分公式中被积函数的状态是经典拉格朗日函数，由 [17, 38]

给出

$$S(\theta_i, \theta_1, \dots, \theta_{t-1}, \theta_f) = \sum_{j=0}^{t-1} (\theta_{j+1} - \theta_j)^2 / 2 - V(\theta_j) \quad (17)$$

对量子映像系统成立。稳定组合态是由 $\partial S(\theta_i, \theta_1, \dots, \theta_{t-1}, \theta_f) / \partial \theta_j = 0$ ($j = 1, \dots, t-1$) 决定, 它引出得到映像规则(4)。因而稳定组合态不再是经典轨迹, 换句话说, 半经典格林函数可以通过对连接 θ_i 和 θ_f 的经典轨迹的所有贡献求和来估计, 就是

$$\langle \theta_f | \hat{U}(t) (= \hat{U}^\dagger | \theta_i \rangle = \sum_m A^{(m)} \exp[iS(\theta_i, \theta_1^{(m)}, \dots, \theta_{t-1}^{(m)}, \theta_f) / \hbar] \quad (18)$$

这里 $\theta_i, \theta_1^{(m)}, \dots, \theta_{t-1}^{(m)}, \theta_f$ 代表在 t 步长内从 θ_i 开始到达和 θ_f 的经典轨迹, 并且 $A^{(m)} \sim e^{-\alpha t/2}$ 代表由 m 表示的经典轨迹周围波动贡献的幅度因子。然而应用半经典公式到经典混沌系统中时却有本质上的困难。

在混沌动力学中轨迹数目以指数规律 $e^{\alpha t}$ 增加, 是因为如马蹄映射所典型地表示的动力学的拉伸和折叠。折叠分支数目的指数增加意味着出现有许多对轨迹, 这样伴随作用的差值 $\Delta S^{(lm)} = [S(\theta_i, \theta_1^{(m)}, \dots, \theta_{t-1}^{(m)}, \theta_f) - S(\theta_i, \theta_1^{(l)}, \dots, \theta_{t-1}^{(l)}, \theta_f)]$ 会尽量缩小到 $e^{-\alpha t}$, 并且这样的组合配对在当差值 $|\Delta S^{(lm)} / \hbar|$ 小于 2π 时违反半经典近似。这样的时间尺度正好是由方程(1)引入的 T^* 。因此, 半经典理论能够在比 $T^* = \log(1/\hbar) / \alpha$ 长得多的时间尺度上描绘经典混沌的量子行为的可信度就令人怀疑了。

半经典时间依存的格林函数方程(18)的频谱表达式变成 Gutzwiller 轨迹公式^[8], 该公式将半经典的状态密度和所有因素之和联系起来, 每个因素都是由一条经典的周期轨迹造成的。周期性轨迹之和的收敛是个多年存在的问题, 迄今还未被完全搞清楚。与 Selberg 的轨迹公式或 Riemann 的 ζ 函数^[39] 这样的确切例子的收敛特性相类比, 我们可以推测当我们使能量复数的虚部大于 $\hbar / T^*$ 时, Gutzwiller 公式是绝对收敛的, 这又意味着半经典结

果在超出 T^* 之外的时间区域内是不适用的。

如上面所强调的那样, 半经典理论对混沌动力学的适用性还有待怀疑, 因为在经典和量子混沌动力学间存在着严重的差距这同一类困难。无论如何我们试图应用半经典的方法到我们的主系 + 客系系统中。与客系耦合的重要效应所考虑的是关于记忆因子 $e^{-\epsilon}$ 的扩展的最低阶贡献。它对方程 (18) 进行了重大修正, 且方程 (16) 的时间平均格林函数是^[37]

$$\langle G(\tau) \rangle = \sum_m A^{(m)} D^{(m)}(\tau) \exp[iS^{(m)}(\tau)/\hbar] \quad (19)$$

其中 $S^{(m)}\tau = S(\theta_i, \theta_1^{(m)}, \dots, \theta_{i-1}^{(m)}, \theta_f)$ 。与客系耦合的重要效应由混合因子 $D^{(m)}(\tau)$ 加以充分考虑, 该因子决定平均格林函数的长期行为。为抽出混合因子的本质特征, 我们用 ϵ 的最低阶近似来评估它, 可得到下面的渐近线估计

$$|D^{(m)}(\tau)| = \prod_{k=1}^{N_H} (\epsilon |f_k^{(m)}(\tau)| / \hbar)^{1/2} \quad (20a)$$

其中

$$f_k^{(m)}(\tau) = \sum_{j=0}^{\tau-1} \exp(iv_k j) \cos(\theta_j^{(m)}) \quad (20b)$$

适用于最简单的耦合方式。假设主系可积, 那么 $\theta_i^{(m)}$ 是 s 的准周期函数, 于是 $f_k^{(m)}(\tau)$ 有上限, 并因此混合因子的绝对值不能减小到低于一个下限。然而, $f_k^{(m)}(\tau)$ 的行为在当系统是经典混沌时是相当不同的。既然 $f_k^{(m)}(\tau)$ 是随机量 $\theta_s^{(m)}$ 的线形组合, 它大体上随时间以 $\tau^{1/2}$ 增加。因此混合因子随 τ 的增加而以 $(\epsilon\tau^{1/2}/\hbar)^{N_H/2}$ 衰减。另一方面, 来自混合因子随机相的被乘因子 $\exp(iS^{(m)}/\hbar)$ 在不同 m 中是不相关的。因此, 格林函数当且仅当系统是经典混沌时才会以 $\langle G(\tau) \rangle^2 \sim \tau^{-N_H/2}$ 代数衰减, 这可以相当好地解释我们所模拟的结果。

因此半经典理论成功地解释了我们模拟光吸收的总体特征。然而, 未解决的最有趣的问题是与其问为什么半经典理论会在诸如时间平均格林函数的长期衰减这样的长期预测中如此有效, 而

不如问为什么它如此成功地解释了混沌诱导出的耗散的几个定量方面的事实。确实,半经典方法不能对从耗散状态到非耗散状态的转变提供一个合理的解释,这个转变是随 ϵ 的减少而发生的。这是个非常重要的问题,迄今尚未解决。

参 考 文 献

- [1] J. Moser, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems* (Princeton Univ. Press, 1973).
- [2] V. I. Arnold and A. Avez, *Ergodic Theory of Classical Mechanics* (Benjamin Inc., 1968).
- [3] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer - Verlag, 1983); A. J. Lichtenberg and M. A. Liberman, *Regular and Stochastic Motion* (Springer - Verlag, 1982).
- [4] I. Prigogine, *From Being to Becoming: Time and Complexity in the Physical Sciences* (W. H. Freeman, 1980).
- [5] J. von Neumann, *Mathematical Foundation of Quantum Mechanics* (Princeton Univ. Press, 1955).
- [6] See for example, *Quantum Theory and Measurement*, ed. J. A. Wheeler and W. H. Zurek (Princeton, 1983).
- [7] A. Einstein, *Verhand. Deut. Phys. Ges.* 19: 82 (1917).
- [8] M. C. Gutzwiller, *J. Math. Phys.* 8: 1997 (1967); 10: 1004 (1969); 11: 1791 (1970); 12: 343 (1971); M. C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Springer - Verlag, 1990).
- [9] See for example B. Eckhardt and E. Aurell, *Europhys. Lett.* 9: 509 (1989).
- [10] I. C. Percival, *Adv. Chem. Phys.* 36: 1 (1977).
- [11] M. V. Berry, in *Chaotic Behaviors of Deterministic Systems*, ed. G. Iooss et al. (North - Holland, 1983), p. 171; *Chaos and Quantum Physics*, ed. M. J. Giannoni (North - Holland, to be published).
- [12] M. V. Berry, *Ann. Phys.* 131: 163 (1981).
- [13] See for example, L. Van Hove, *Physica* 23: 441 (1957); E. B. Davis,

Quantum Theory of Open Systems (Academic Press, 1976).

- [14] See for example, R. Kubo, M. Toda, and N. Hashitsume, *Statistical Physics II Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Springer Series in Solid State Sciences, vol. 31 (Springer – Verlag, 1985).
- [15] S. Zelditch, *Duke Math. J.* 55: 919 (1987); Y. Colin de Verdière, *Commun. Math. Phys.* 102: 497 (1985).
- [16] S. Smale, *Bull. Am. Math. Soc.* 73: 747 (1967).
- [17] M. V. Berry N. L. Balazs, M. Tabor, and A. Voros, *Ann. Phys.* 122: 26 (1979); M. V. Berry and N. L. Balazs, *J. of Phys.* A12: 625 (1979).
- [18] B. W. Chirikov, F. M. Izrailev, and D. L. Shepelyansky, *Sov. Sci. Rev. Sect. C2*: 209 (1981); D. L. Shepelyansky, *Phys. Rev. Lett.* 56: 677 (1986).
- [19] K. Ikeda, unpublished.
- [20] J. H. Hannay and M. V. Berry, *Physica* 1D: 267 (1980).
- [21] A clear numerical evidence of the presence of the time scale T^* is demonstrated in M. Toda and K. Ikeda, *Phys. Lett.* 124A: 165 (1987). A serious discrepancy between classical – quantum correspondence has been emphasized from the view point of computability of quantum dynamics: J. Ford et al. "The Arnold's Cat: Failure of the Correspondence Principle" (Preprint).
- [22] B. V. Chirikov, *Phys. Rep.* 52: 263 (1979).
- [23] J. Greene, *J. Math. Phys.* 20: 1183 (1979).
- [24] G. Casati, B. V. Chirikov, F. M. Izrailev and J. Ford, *Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems* (Springer, 1979) p. 334.
- [25] S. Fishman, D. R. Grempel, and R. E. Prange, *Phys. Rev. Lett.* 49: 509 (1982); D. R. Grempel, R. E. Prange, and S. Fishman, *Phys. Rev.* 29: 1639 (1984).
- [26] J. Bayfield and D. W. Sokol, *Phys. Rev. Lett.* 61 (1988), 2007; E. J. Galvez, B. E. Sauer, L. Moorman, P. M. Koch, and D. Richards, *Phys. Rev. Lett.* 61: 2011 (1988).
- [27] D. J. Thouless, *Phys. Rev. Lett.* 39: 1167 (1977).
- [28] D. L. Shepelyansky, *Physica* 8D: 208 (1983).
- [29] E. Ott, I. M. Antonsen, Jr, and J. D. Hanson, *phys. Rev Lett* 53: 2187 (1984).

- [30] S. Adachi, M. Toda, and K. Ikeda, *Phys. Rev. Lett.* 61: 655 (1988).
- [31] T. Dittrich and R. Graham, *Ann. Phys.* 200: 363 (1990).
- [32] M. Toda, S. Adachi, and K. Ikeda, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* No. 98: 323 (1989).
- [33] S. Adachi, M. Toda, and K. Ikeda, *Phys. Rev. Lett.* 61: 659 (1988).
- [34] K. Ikeda, in *Quantum Chaos*, ed. G. Casati and B. V. Chirikov (Cambridge University Press, 1995).
- [35] K. Ikeda, S. Adachi, and M. Toda, *Phys. Lett.* A147: 189 (1990).
- [36] W. Heitler, *Quantum Theory of Radiation* (Oxford University Press, 1954).
- [37] K. Ikeda, *Ann. Phys.* 227: 1 (1993); K. S. Ikeda, in *Computational Physics as a New Frontier in Condensed Matter Research*, ed. H. Takayama et al., p. 277 (Physical Society of Japan, 1995).
- [38] M. Tabor, *Physica* 6D: 195 (1983).
- [39] N. L. Balazs and A. Voros, *Phys. Rep.* 143: 110 (1986).

(李大鹏 译)

Kunihiko Kaneko

一、从混沌到高维混沌

混沌已向动力学复杂性科学迈出了重要的一步。在混沌中，我们已认识到即使是具有低自由度的系统也能产生动力学复杂性。然而，这并不是最后一步。我们要问低维混沌是否有足够的复杂性来模拟自然界中真实的复杂动力学。

大致说来，对低维混沌的出现（在实验和真实数据中）需要4个可能的条件。

1. 首先选定一个具有几个自由度的系统（如摆或有外激励的 Josephson 结）。

2. 选择合适的参数，使系统仅激发出几个模态：在混沌出现的附近，调节系统参数，使大多数模态不被激发（如：激光、自旋波混沌）。

3. 抑制空间自由度：例子有，一个充分搅拌的化学混沌系统；在一个有小的宽高比中的 Rayleigh - Bénard 对流，流动中仅出现少数卷涡。

4. 一个自组织的系统有走向低维混沌的可能性。在演化中，如果低维混沌比高维混沌或其他动力状态有更好的适应能力（其他动力学状态包括周期状态或稳定状态，它们可能没有足够强的能力面对复杂的环境），这种可能性在生物系统中可能是重要的。

1 ~ 3 的限制似乎是太严格了，以致必须承认在自然界中低维混沌并不普遍。到目前为止，可能性4既没有被否定也未被证

实, 虽然在一个演化模型例子中, 对可能性的回答是否定的 (见第 6 节)。在一些生理数据中, 像心脏节率 (由 L. Glass^[4]发表的), 正在积累低维混沌的证据。我们注意到这些例子都是在病态下发现的。在健康状态下, 动力特性的维数似乎太高, 目前的混沌技术还不能分析。除像癫痫这种非正常状态外^[5,6], 在大多数情况下, 神经活动中的混沌动力学也似乎是高维的。简而言之, 在生物学中的低维混沌, 一般是在非正常状态下出现。在正常状态下维数高得多的混沌似乎是重要的。

看来大多数非线性非平衡状态往往引起高维混沌, 与通常意义下的湍流有关, 在时空混沌中可见到许多重要的例子。在生物系统的网络中, 许多单元 (elements) 动态地相互作用, 这在生态学、神经系统、免疫和多细胞组成的网络 (networks) 中常可见到。当然这样的网状组织包含巨大数量的有效自由度。

面对世界上的动力学复杂性, 低维混沌就像一个幼儿。作为一个幼儿, 他有处理一般复杂性的潜伏的能力, 但对有许多自由度的动力学复杂性, 我们仍需要一种新颖的范例 (Paradigm)。在过去的几十年中, 混沌还是使我们吃惊的事, 但现在, 我们的科学家已达到接受混沌既成事实的阶段¹, 并根据混沌的基础寻找一种新范例。

为了揭示一种新颖的范例, 我们常常需要一个标准模型。在混沌动力学中, 一些动力学方程 (如 Lorenz 方程、Rössler 方程、Logistic 映射、Hénon 映射) 已提供了这样的实例。

对高维混沌, 我们已有一些标准模型的选择对象。对时空混沌, 传统的研究方法是使用偏微分方程。然而, 当我们试着研究高维混沌^[11]现象时, 这种方法存在一些缺点。元胞自动机是另一种可能的研究手段, 但它仅在无限尺寸极限下才能显示出混沌特性^[11]。另一类动力学系统, 延迟常微分方程 (如 Mackey - Glass 方程或 Ikeda 系统) 已开辟了高维混沌的新领域。虽然它似乎也有时空混沌 (Spatio - temporal Chaos) 的一般状况, 但我们不在这讨论它。

在本文中我使用耦合映射格子 (CML) 探索高维混沌的某些方面, 这可能给具有多自由度的动力学复杂性提供一个标准的模型。

二、从时空混沌到湍流

在时域中, 对低维混沌的研究已迅速铺开。另一方面, 有序的空间结构已进行斑图形式 (pattern formation) 的研究。在自然界中, 时空中的复杂现象是普遍的, 虽然还没有建立起标准的理论。

时-空混沌 (Spatio-temporal chaos, STC), 从时间上是高维的混沌, 而包含有空间斑图动力学。通常它包括湍流现象, 这包括 Bénard 对流、在液晶中电子对流、沸腾燃烧等粒子体中 MHD 湍流、固态物理 (Josephson 结阵列、螺旋波湍流、电荷密度波等)、光学、具有空间结构的化学反应等等中的湍流。在像神经动力学这种非线性单元 (element) 中进行生物信息处理, 它也是重要的。虽然对 STC 还没有准确定义, 我们认为它包含的自由度很多, 而且随系统尺寸的增加, 它的自由度也增加。在相空间中, 维数也随系统的尺寸增加而增大。

耦合映射格子是一种具有离散的时间 (“映射”), 离散的空间 (“点阵”) 和连续状态的动力学系统。它通常由许多动力学单元 (dynamical elements) 组成, 这些动力学单元能与从其他单元中适当选择出的集合进行点阵耦合^[1~10]。CML 原是作为时空混沌的一种简单模型提出来的。

用 CML 模拟按如下步骤进行。假如你有一些具有空间结构的动力学现象, 你通过模拟想了解它的本质。首先将它的动力特性分解成简单的过程 (procedure), 用一个关于点阵的并行 (parallel) 动力学代替每一个过程。通过每个过程的连续应用, 就得到了耦合映像点阵。在一个离散时间 n , 点阵位置 i , 取一个物理量 $x_n(i)$, 可按步骤表达如下:

$$x_n(i) \rightarrow x_{n+1}(i) = F1(\cdots, x_n(i-1), x_n(i), x_n(i+1), \cdots),$$

$$\begin{aligned}
x'_n(i) \rightarrow x''_n(i) &= F2(\cdots, x'_n(i-1), x'_n(i), x'_n(i+1), \\
&\cdots), \cdots, \\
x''_{n+1}(i) \rightarrow x_{n+1}(i) &= Fk(\cdots, x''_{n+1}(i-1), x''_{n+1}(i), \\
&x''_{n+1}(i+1), \cdots),
\end{aligned}$$

用 k 表示连续过程 F_j ($j = 1, 2, \cdots k$)。注意点阵空间和时间单位不是微尺寸水平, 而是半宏观水平。在这种半宏观水平上, 变量 $x_n(i)$ 是粗粒的量 (coarse-grained quantity)。

举一个例子, 如果你有一个由局部混沌过程和扩散形成的现象。这类例子在对流、化学湍流等中常可见到。在用 CML 研究中, 我们将研究对象约化为局部混沌和扩散过程。对混沌现象, 我们选择一个逻辑斯蒂映射 $x'_n(i) = f(x_n(i))$ ($f(y) = 1 - ay^2$), 对扩散现象, 选一个离散的 Laplacian 算子。

$$\begin{aligned}
x_{n+1}(i) &= (1 - \varepsilon)f(x_n(i)) + \frac{\varepsilon}{2}\{f[x_n(i+1)] \\
&+ f[x_n(i-1)]\}
\end{aligned} \tag{1}$$

对时-空混沌, 上述 CML 作为一个标准的模型已得到了广泛的研究。我们注意到在上述例子中局部混沌和扩散过程正分别得到实现。这种分离正是 CML 研究中的优点之一。

在 CML 研究过程中, 我们寻求一类新的定性通用模型, 而不局限于现象学细节。我们相信在 STC 中存在这类通用模型, 正如通常可以由物理学中的重整化群方法所证实, 尽管我们并不一定要求这类通用模型具有定量的性质。CML 的优点之一是它对这类通用模型具有预测能力。这类通用模型的某些例子如下:

(1) 冻结混沌和空间分叉 (Frozen chaos and spatial bifurcation)^[1]: 混沌固定在空间的区域 (见图 1a)。动力学特征以一种分叉方式在空间变化。当系统参数设定, 在局部混沌产生的周围, 常常可以见到这种冻结混沌。

(2) 抑制混沌的斑图 (pattern) 选择^[1]: 由于混沌和扩散之间的相互影响, 选择某一波长的少数有序斑图出现, 抑制了原来

在局部动力学中混沌的不稳定性 (见图 1b)。

(3) 混沌行波: 如果耦合 ϵ 很大 (如: 大于 0.5), 在 (1) 和 (2) 中的区域结构不再固定在空间中, 而是以某一速度移动。当非线性与冻结状态 (1) 相一致时, 区域的运动是相当不规则的。而一个规则的行进波可在一个选定的区域图案上见到 (见图 1c)。我们也注意到具有不同波速的吸引子共存, 这取决于所选定的波形图案的空间不对称性 (asymmetry)。

(4) 时 - 空阵发 (intermittency)^[1,7]: 从一种有序的图案转变到充分发展的时空混沌可经过时空阵发 (STI) 产生。这时层流运动和湍流猝发在时空中共存^[1] (见图 1d)。对某种波数的运动, 在时空中层流区域与具有闪变特征 (flicker - Like) 的噪声形成了一种很大范围的相关 (correlation) 运动。对 STI 的实验证据已在很大长度直径比的环形套筒中的 Bénard 对流^[14,15]、表面波的 Faraday 不稳定性^[17]、二维液晶电于对流^[16]和粘性旋转流体^[18]中发现。

(5) 准静态的超瞬态^[8,12]: 在时空混沌中, 我们常常碰到很长的瞬态过程。的确, 在一类 STC 中, 进入一个吸引子前的瞬态时间以指数速度减小或随系统尺寸快速缩短。在瞬态区间, STC 是准静态的, 没有任何确定 STC 特征量延迟的征兆。在一个大的系统中, 等待系统进入一个吸引子实际上是不可能的。这就提出了这样一个问题, 湍流是否确实是一个吸引子或是这类的瞬态过程。

(6) 充分发展的时空混沌的稳定性 (FDSTC) 由超瞬态维持^[12,13]: 在低维动力系统中, 混沌是结构不稳定的。在参数空间中, 在混沌的附近, 存在周期状态, 在任何参数区域, 都散布有小的窗口结构。在 FDSTC 中, 在几乎所有初始条件下, 我们并不能观察到这样的窗口结构。FDSTC 似乎是结构稳定的。这说明这种稳定性是由 (5) 中的超瞬态的存在维持的。

Rössler 已对有效度数 (正的 Lyapunov 指数的数目) 大于 1 的混沌引入了名词“超混沌” (hyperchaos)^[21]。将他的概念加以推

广，实际上上述的 FDSTC 可以描述为在空间中的超 ∞ 混沌 (hyper) ∞ - chaos)。他可近似作为许多混沌系统的一个直接结果。换言之，这里的 FDSTC 是介于 Landan 的湍流² 图案和超混沌之间的一个综合状态。

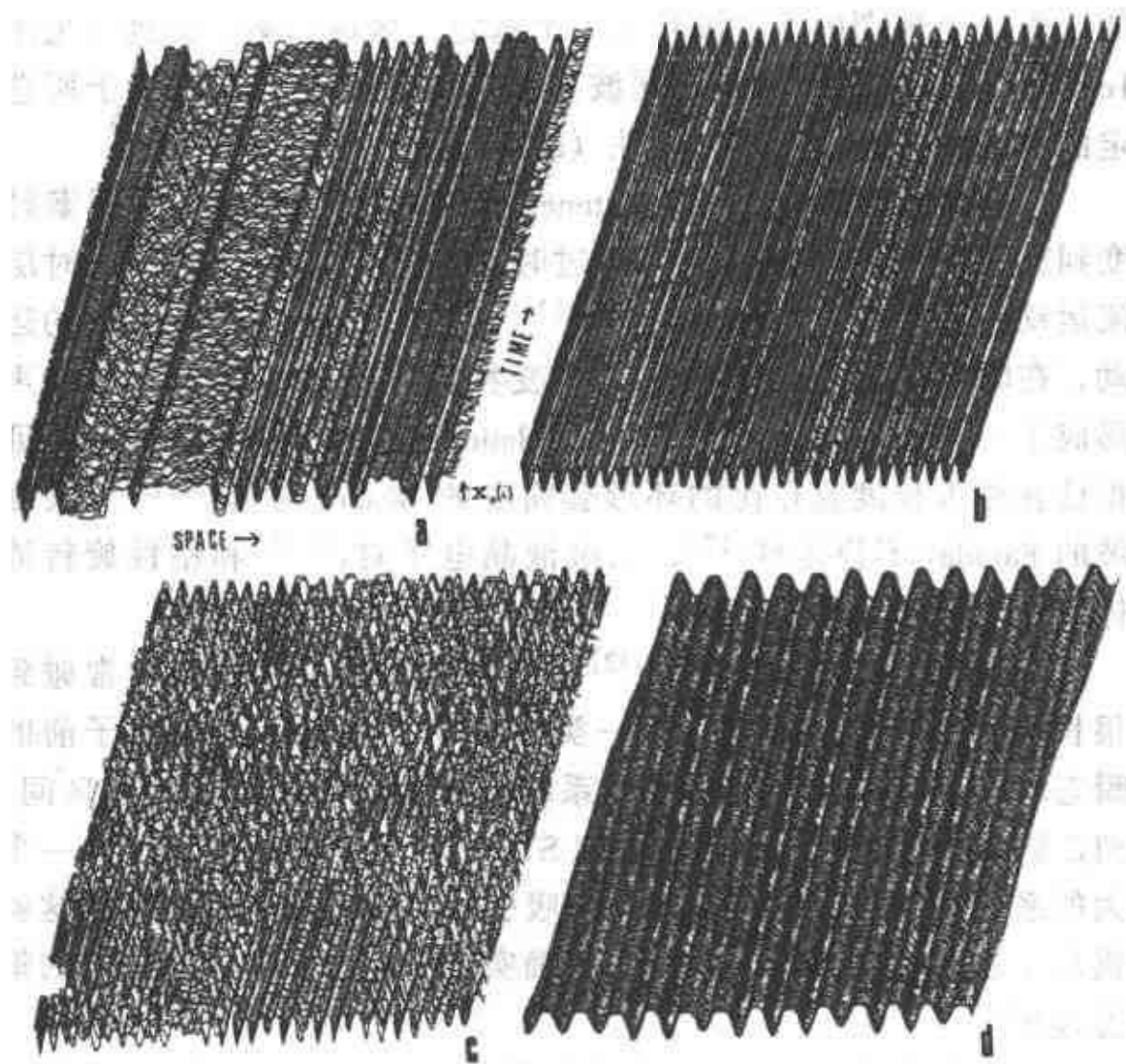


图1 空间函数 $x_n(i)$ 图。丢掉 10000 个初始瞬态点后，从某一个随机初始条件开始，画出的 $x_n(i)$ 随时间（对某一个时间步长）变化的 200 个连续图案。(a) $\alpha = 1.55$, $\epsilon = 0.4$, 每隔 8 个时间步长画出的图。(b) $\alpha = 1.65$, $\epsilon = 0.4$, 每隔 8 个时间步长画出的图。(c) $\alpha = 1.74$, $\epsilon = 0.4$, 每隔 8 个时间步长画出的图。(d) $\alpha = 1.70$, $\epsilon = 0.5$, 每隔 128 个时间步长画出的图。

在 CML 中，引入和研究了一些动力学和统计定量方法，以确定斑图动力学、在时空中的信息流和时空混沌强度的特征。用数值研究了 Lyapunov 谱和向量、共迁移 (co-moving) Lyapunov

知道即使一个单个神经元或一小部分神经元也能显出混沌^[36]。结果，在人脑中的动力学由具有复杂动力学和复杂耦合的整体单元构成。然而，大多数现代神经网络研究，使用了过于简化的局部动力学（0—1 或 S 形函数）。研究具有非平庸动力学（有混沌响应）、具有简单的整体耦合的模型是重要的，也是有意义的，它是神经动力学的一种抽象化。

在演化动力学中，环境的约束将导致整体耦合。每一个物种与环境中的其他物种耦合，Eigen^[30]的核糖核酸（RNAs）演化动力学就是一例。另外在经济学中，局部的复杂动力学和整体反馈是重要的。例如，每一个交易所都通过称为“证券市场”的平均场（mean-field）与其他交易所发生作用。整体耦合动力学也可在物理学中看到，这包括在流体中的涡动力学、Josephson 结电路或通过电流耦合的一种电荷密度波^[31]。

我们引入了“整体耦合映射”（GCM）^[32]作为混沌单元网络的最简单模型，它由下式给出

$$x_{n+1}(i) = (1 - \varepsilon)f(x_n(i)) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_n(j)) \quad (2)$$

其中 n 是离散时间步长， i 是每个单元的指标，（ $i = 1, 2, \dots, N = \text{系统尺寸}$ ）。我们选择一个映射 $f(x)$ ，它可能产生混沌（如，Logistic 映射 $f(x) = 1 - ax^2$ ）。

通过对模型的广泛模拟，我们已发现混沌单元网络的如下特征：

1. 集结性（Clustering）^[32]：在整体耦合动力学系统中的一个重要概念是集结性。当系统落到一个吸引子上后，单元 $x_n(i)$ 分裂成族（cluster）。属于同族的单元 L ，具有完全相同的值 $x_n(L)$ 。在同族上的所有单元按同步振荡，过一定时间 $x_n(L)$ 能够改变，但一旦系统落到一个吸引子上，它本身的集结性条件是不变的。集结性的特点在于族 k 的数量和每一个族上单元的数量，由 $[N_1, N_2, \dots, N_k, \dots] \left(\sum_{j=1}^K N_j = N \right)$ 给出。同步的程度随集结

性的变化而改变。

正如以前的论文^[32]中研究的, 存在 4 种具有不同集结率的状态; (1) 相关状态, 其中一个单个同步吸引子 ($k=1$) 占据了所有盆域容积; (2) 有序状态, 其中具有少数几个族的吸引子 ($k=o(N)$) 占据了盆域容积; (3) 部分有序 (PO) 状态, 其中许多具有不同集结性的吸引子共存, 一些具有大量的族, 而另一些仅有少数族; (4) 湍流状态, 其中所有的单元完全失去同步 ($k=N$)。

在部分有序状态中, 集结性状态由吸引子区别, 即使 $N \rightarrow \infty$ 的极限条件下, 集结性脉动保持有限, 正像在自旋玻璃模型中看到的。

2. 混沌巡回 (Chaotic itinerancy)^[32]: 在部分有序状态中, 动态特性阵发地在许多有序状态中巡回。在那里有效自由度的瞬时变化相当快, 从 $O(1)$ 的量级变化到 $O(N)$ 。这种动态特性称为混沌巡回, 是一种在高维混沌中常常见到的新颖动力学状态。它由准平稳的高维状态组成, 退出到低有效自由度的有序状态并驻留在那里, 然后以混沌退出。已分别在光学湍流^[33], 光学网络模型^[34], 神经动力学^[35]和整体耦合映射中发现存在混沌巡回。

3. 大数定律的崩溃 (Breakdown) 和精细的有序出现^[32]: 让我们考虑平均场 $h_n \equiv 1/N \sum_i f(x_n(i))$ 的脉动。由于 $x_n(i)$ 在湍流状态几乎不相关地取随机值, 人们可以希望 h_n 分布服从大数定律。如果是这样, 平均场 h 的均方差 (MSD) 将以 N^{-1} 随 N 减小。数值结果显示, 随 N 的进一步增加均方差仅减少到 N_c , 并保持有限。当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 相交尺寸 (crossover size) N_c 随 ϵ^{-2} 增加。与尺寸无关的脉动存在意味着在动态过程中隐藏的有序的出现。这种大数定律的崩溃在具有局部收缩和膨胀的整体混沌单元网络中是普遍的。

大数定律崩溃是整体耦合混沌特有的。一个耦合的随机系统和一个耦合的 (拟) 周期状态都不能破坏这一定律。混沌具有两

面性：有序和随机。有序和随机是随着单元数的增加而形成的隐含的连贯所必要的。具有膨胀和收缩特性的混沌有隐含的连贯和有序。随着单元数的增加，一个耦合系统揭示了收缩部分。

如果上面的讨论是正确的话，我们以为在具有局部收缩和膨胀的整体耦合动力学系统中，大数定律的崩溃是普遍性的。因此我们可以对许多场中的大尺度脉动有一个新的观点，这些场包括神经场的平均活动，湍流中的速度脉动，银河系中的平均力场分布，蛋白质动力学和涡系综。我们认为在整体耦合的混沌中，由于隐含的连贯，这些分布违背了大数定律。特别是对连贯的出现，神经细胞的数量是否大于相交尺寸是令人感兴趣的事情。存在巨大数量的神经细胞的一个原因或许与显露出隐含的连贯的必要性相关。

五、具有高维混沌的神经信息处理

混沌单元网络可能有信息处理的新能力。这种能力与神经信息处理有关^[37,32]。正如 Tsuda^[35]讨论的那样，鉴于混沌巡回具有自动巡回每个记忆状态的能力，混沌巡回在人脑功能中是重要的。

混沌单元网络用于生物信息处理的一种可能是在编码吸引子中的转换作用，正如在文献^[32]中讨论的那样，通过对一个单元的简单输入，在许多具有不同集结性的吸引子之间转换是可能的。由于不同吸引子的混沌强度不同，我们可通过这种输入控制混沌的强度。我们的模型的可能应用范围包括间歇状态转换，模糊分层转换和分层集结性的归类。在这些应用中，分层转换^[32]在归类数据的检索中可能是重要的。在转换到一个不同类别的过程中（由不同类的集结性代表），系统经历了一个强混沌瞬态过渡过程。这种瞬态过程使我们记起了由 W. Freeman^[5]在嗅觉泡中发现的混沌搜索。

Gray 和 Singer^[38]已在猫的视觉皮层中发现了非线性振荡的部分同步。虽然还没有弄明白他们的非线性振荡的性质，但这种

强的动力学特性暗示混沌的存在。在混沌单元网络^[32]的部分有序状态中已发现了混沌部分同步。通过对单元应用编码输入，我们希望找到部分同步状态与生物信息处理之间的可能联系^[39]。

六、生物网络系统中的同质混沌 (homeochaos)

在生物网络系统中，包含改变动力系统自身规律的动力学行为是重要的。最近 Ikegami 和本文作者已经研究了具有变异率的变异 (mutation of mutation rates) 的演化模型，这类变异导致了动力学规律的改变^[40]。模型包含寄主和寄居物种 (host and parasite species)，物种的变异 (mutation of species) 和变异率的变异的虫口动力学。已经发现如果物种间的相互作用不是很小的话，变异率是高度持续的。换言之，演化系统的动力学规律在连续不断地改变。

这种持续高变异率的机理是因为形成了一种振荡的网络系统^[40]。在一个由变异连接的网络系统中，所有的物种以混沌的变化保持他们的虫口数。振荡产生了混沌。全体物种仅通过每个物种虫口数的混沌变化来保持他们的虫口数。最终的稳定状态是靠这种混沌维持的。经过这一观察，我们提出了一个新的概念，同质混沌^[41,40]。在同质混沌中，低维混沌中的强不稳定性被消除了，动力学稳定性维持在高维的超混沌状态。我们的模型系统自组织到一个弱的（即，具有小的正 Lyapunov 指数）但是高维的（即，具有大数量的正 Lyapunov 指数）混沌状态。

在我们的演化模型中，弱的高维混沌的形成对保持一个系统远离灭绝是必不可少的。在我们模型中的虫口数不是维持在一个静止状态，而是通过同质混沌保持他们的虫口数。这里的动力系统不是由低维混沌控制的。在低自由度中的激烈变化经过高维动力系统被消除了。这种强的低维混沌的消除或许正是在野生生态系统中^[42]缺乏低维混沌的一个可能原因。

让我们举一个热带雨林的例子。就那里生态学而论^[43]巨大数量的物种共存，他们的虫口数随时间激烈变化。也有许多物

种, 具有很少的虫口数。的确, 在我们的演化模型中已发现了这些动力学特征。我们认为在热带雨林中的大多数物种以同质混沌的动力学特征维持其虫口数。在免疫网络系统中, 这种类型的动力学特征也可在抗体的浓度中发现, 在免疫系统中, 可通过同质混沌维持高的免疫率。

长期以来认为自动动态平衡对在变化的环境中生物体的生存来说是必不可少的。然而, 在生物学的大多数领域人们已意识到混沌振荡特征的重要性。我们相信大多数生物学的网络系统都是通过同质混沌这种动态方式来形成和维持的。

致 谢

我感谢与之进行有益的讨论的 K. Ikeda, I. Tsuda, T. Konishi, K. Nemoto, 和 T. Ikegami。也要感谢 Nagoya 国立学院提供的用于聚变研究的 FACOM M380 和 VP200 计算设备。这项工作部分受到日本教育、科学和文化部科学研究补助金资助, 部分得到统计数学研究院的合作研究计划资助。

注 释

1. 当然, 这并不意味着混沌理论的完成。尽管在近 20 年来, 混沌理论得到快速发展, 但仍留下了许多疑团, 我们还没有一个完整的语言来表述混沌的动力学复杂性。

2. Landau 已试图解释作为周期态 (具有许多不可公约频率的拟周期态) 的一个直接产物湍流。然而, 由于频率同步和接近奇怪吸引子, 这种直接产物是不稳定的^[20,2]。

3. 当然重构在实际上并不是容易的。为了得到一个好的预测, 我们还需要大量的数据。

参 考 文 献

[1] K. Kaneko, *prog. Theor. Phys.* 72: 480 (1984); 74: 1033 (1985);

- K. Kaneko, *Physica* 23D: 436 (1986); *Physica* 34D: 1 (1989); *Physica* 37D: 60 (1989).
- [2] K. Kaneko, Ph. D. Thesis, *Collapse of Tori and Genesis of Chaos in Dissipative Systems*, 1983 (enlarged version is published by World Sci., 1986).
- [3] J. P. Crutchfield and K. Kaneko, "Phenomenology of Spatiotemporal Chaos," in *Directions in Chaos* (world Sci., 1987) 272.
- [4] See e. g., L. Glass, ch. 11 of this volume.
- [5] W. Freeman and C. A. Skarda, *Brain Res. Rev.* 10: 147 (1985); W. Freeman, *Brain Res. Rev.* 11: 258 (1986).
- [6] A. Babloyanz and A. Destexhe, *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 83 3513 (1986).
- [7] J. D. Keeler and J. D. Farmer, *Physica* 23D: 413 (1986); H. Chate and P. manneville, *Physica* 32D: 409 (1988).
- [8] J. P. Crutchfield and K. Kaneko, *Phys. Rev. Lett.* 60: 2715 (1988).
- [9] L. A. Burimovich and Ya. G. Sinai, *Nonlinearity* 1: 491 (1989).
- [10] K. Kaneko, *Phys. Lett.* 139A: 47 (1989); J. M. Houlrik, L. Webman, and M. H. Jensen, *Phys. Rev.* 41A: 4210 (1990).
- [11] K. Kaneko, "Simulating Physics with Coupled Map Lattices" in *Formation, Dynamics, and Statistics of Pattern*, 1 (ed. K. Kawasaki, A. Onuki, and M. Suzuki, World Sci., 1990).
- [12] K. Kaneko, *Phys. Lett.* 149A: 105 (1990).
- [13] K. Kaneko, *Prog. Theor. Phys. Suppl* 99: 263 (1989).
- [14] S. Ciliberto and P. Bigazzi, *Phys. Rev. Lett.* 60: 286 (1988).
- [15] F. Daviaud, M. Dubois, P. Berge, *Europhys. Lett.* 9: 441 (1989).
- [16] S. Nasuno, M. Sano, Y. Sawada, in *Cooperative Dynamics in Complex Systems*, (ed. H. Takayama, Springer, 1989).
- [17] J. Gollub and R. Ramshankar, in *New Perspectives in Turbulence* (eds. S. Orszag and L. Sirovich, Springer, 1991).
- [18] S. Michalland, M. Rabaud, and Y. Couder, *Europhys. Lett.* 22: 117 (1993).
- [19] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon, London, 1959) ch. 3.
- [20] D. Ruelle and F. Takens, *Comm. Math. Phys.* 20: 167 (1971); 23:

343 (1971).

- [21] O. E. Rossler, *Phys. Lett.* 71A: 155 (1979); in *Lecture Notes in Applied Math.*, 17: 141—156 (1979); *Z. Naturforschung* 38a: 788 (1983).
- [22] N. H. Packard et al., *Phys. Rev. Lett.* 45: 712 (1980); F. Takens, in *Dynamical Systems and Turbulence* (ed. D. Rand and L - S. Young, Springer, 1981).
- [23] G. Mayer - Kress and K. Kaneko, *J. Stat. Phys.* 54: 1489 (1989).
- [24] See for a different approach to experimental spatiotemporal chaos: S. Ciliberto and B. Nicolaenko, *Europhys. Lett.* 14: 303 (1991).
- [25] R. Livi, A. Politi, S. Ruffo, and A. Vulpiani, *J. Stat. Phys.* 46: 147 (1987); K. Kaneko and T. Konishi, *J. Phys. Soc Jpn.* 56: 2993 (1987); H. Kanz and P. Grassberger, *J. of Phys.* A21: L127 (1988).
- [26] K. Kaneko and T. Konishi, *Phys. Rev.* 40A: 6130 (1989); T. Konishi and K. Kaneko, *J. Phys.* 23A: 715 (1990).
- [27] G. Benettin, L. Galgani, and A. Giorgilli, *Phys. Lett.* A120: 23 (1987).
- [28] K. Kaneko and R. Bagley, *Phys. Lett.* 110A: 435 (1985).
- [29] T. Konishi and K. Kaneko, *J. Phys.* 25A: 6283 (1992).
- [30] M. Eigen and P. Schuster, *The Hypercycle* (Springer, 1979).
- [31] P. Hadley and K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. Lett* 62: 1335 (1989).
- [32] K. Kaneko, *Phys. Rev. Lett.* 63: 219 (1989); *Physica* 41D: 137 (1990); *Phys. Rev. Lett.* 65: 1391 (1990); *J. Phys.* A24: 2107 (1991); preprint (1991), submitted to *Physica D*.
- [33] K. Ikeda, K. Matsumoto, and K. Ohtsuka, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* 99: 295 (1989).
- [34] P. Davis, *J. J. of Appl Phys.* 29L: 1238 (1990).
- [35] I. Tsuda, in *Neurocomputers and Attention* (ed. A. V. Holden and V. I. Kryukov, Manchester Univ. Press, 1990).
- [36] H. Hayashi et al., *Phys. Lett.* 88A: 265 (1982); K. Aihara and G. Matsumoto, in *Chaos* (ed. A. V. Holden, Princeton, 1986).
- [37] I. Tsuda, E. Koerner, and H. Shimizu, *Prog. Theor. Phys.* 78: 51 (1987); I. Tsuda, *Prog. Theor. Phys. Suppl* 79: 241 (1984); I. Tsuda, *Chaosteki-Noukan* (1990, Science-Pub., in Japanese).

- [38] C. M. Gray, P. Koenig, A. K. Engel, and W. Singer, *Nature* 338: 334 (1989); R. Eckhorn et al., *Biol. Cybernetics* 60: 121 (1988).
- [39] I. Tsuda and K. Kaneko, unpublished (1991).
- [40] K. Kaneko and T. Ikegami, preprint, submitted to *Physica* D56: 406 (1992).
- [41] Tsuda has also proposed the notion of homeochaos in relation to neural dynamics: I. Tsuda, *World Future* 32: 167 (1991).
- [42] R. May, *Nature* 26: 459 (1976).
- [43] J. Kikkawa, *Kagaku* 60: 603 (1990) (in Japanese); J. H. Connell, *Science* 199: 1302 (1978), where the author shows that the diversity in tropical rain forests may be maintained only in a nonequilibrium state. Our homeochaotic state provides such maintenance of a nonequilibrium state.

Bruce E. Kendall, W. M. Schaffer, C. W. Tidd 和 Lars F. Olsen

~~~~~  
**摘 要**  
~~~~~

许多理论研究经常在生物学模型中发现混沌现象。实验室中的试验也揭示出在一些彼此孤立的生物学亚单位中蕴藏着混沌。然而实验室外的经验数据分析却无法得出什么结论。这就留下了两个没有回答的重要问题。“在现实世界里生物学是混沌的吗？”“如果是，它的生物学意义何在？”本文提出一些思路，开始回答这些问题。所举例子是从许多生物学过程中提出的，它包括脑的动力学、人类流行病学以及生态种群灭绝的速率等。

一、引言

本文的题目就可作为一个问题提出来。即混沌对生物学的冲击是什么？这一问题实际上包括两部分：过去，混沌对生物学有过什么样的冲击？将来还可能有什么冲击？本文主要关注后者，但也要回顾混沌至今已给生物学带来的冲击。

对生物学中混沌的探讨

从基础水平出发：有没有充分的理由指望在生物学中发现混

沌？由于数学生物学家发现了许多生物学模型中混沌的例子 (May 1976, 1985; May 和 Oster 1976; Gilpin 1979; Aihara 等, 1984; Chay 1985; Chay 和 Rinzel 1985; Caswell 和 Weeks 1986; ander Heiden 和 Mackey 1987; Samardziji 和 Greeller 1988; Sleeman 1988; Gardini 等, 1989; Michaels 等, 1989; Allen 1990ab; Glass 和 Hunter 1990; Glass 和 Malta 1990; Glass 和 Zeng 1990; Holden 和 Lab 1990; Hastings 和 Powell 1991), 理论工作者首先将混沌的概念导入生物学。生物学模型中普遍存在的混沌可能是最佳的征兆。它得益于以下事实：平方映射 (quadratic map) 这种最简单的数学系统能够引发混沌。许多我们已知的有关倍周期的基础 (Feigenbaum 1978; Collet 和 Eckmann 1980), 这在生物学中也是大家所熟悉的, 如逻辑斯谛映射 (logistic map) 可模拟单一种群的动态过程。还有, 在生物学中很丰富的非线性的反馈机制容许生物体和种群对环境条件的改变作出迅速的反应。但是这种反馈的确是混沌的先决条件。因此, 我们实际上会对在生物学模型中, 至少对有些参数值的组合中未发现混沌现象感到惊讶。那么, 从理论的观点讲, 我们可以说: “对, 生物学充满着混沌现象的潜力。”

虽然生物模型是真实的抽象, 但只有最简单的生物系统得到过精确的描述。因此, 我们转向实验工作并试问: “在生物学数据中能真正发现混沌吗?” 实验室实验是最佳的出发点, 因为在那里你可以控制各种参数, 或测量状态的变量使精确到合理的程度。生化反应过程的波动 (Olsen 和 Degn 1977; Geest 等, 1993): 各别的细胞在离体 (Hayashi 等, 1982, 1985; Markus 等, 1984, 1985; Aihara 等, 1985, 1986; Lebrun 和 Atwater 1985; Hayashi 和 Ishizuka 1992) 或在体 (Rapp 等, 1985; Mpitsos 等, 1988) 条件下的动力学以及细胞聚合的波动的研究 (Guevara 等, 1981; Glass 等, 1983; Chialvo 和 Jalife 1987; Chialvo 等, 1990) 认为: 有这样的情况即它们的动力学是混沌的。检验过许多昆虫的实验室种群的混沌动力学 (Hassell 等, 1976; Thomas 等,

1980; Philippi 等, 1987); 发现有一种羊绿头苍蝇 (Nicholson 1954) 是混沌的。我们再次断言: 无论如何总有一些亚生物系统能表现出混沌。

当然, 在实验室内研究的彼此分离的亚系统之间, 与在“真实世界”的机体和生态系统的复杂性之间存在着巨大的差异。因此, 以前的结果并不一定要包含最后一个需要预先说明的问题的答案: 即在实验室外有生物学混沌吗? 许多研究声称答案是肯定的, 提出脑电的活动 (Babloyantz 等, 1985; Babloyantz 和 Destexhe 1986; Dvorak 和 Siska 1986; Mayer-Kress 等, 1988; Frank 等, 1990; Ehlers 等, 1991; Gallez 和 Babloyantz 1991; Roschke 和 Aldenhoff 1991; Prichard 和 Duke 1992; Fell 等, 1993), 心脏的动力学 (Babloyantz 和 Destexhe 1988; Mayer-Kress 等, 1988; Zbilut 等, 1988; Ravelli 和 Antolini 1992; Lefebvre 等, 1993; Yamamoto 等, 1993), 以及生态学和流行病学的动力学 (Schaffer 1984; Schaffer 和 Kot 1985; Olsen 等, 1988; Olsen 和 Schaffer 1990; Witteman 等, 1990; Hanski 等, 1993; Turchin 1993) 等方面混沌的证据。尽管如此, 我们相信这些结果应该认真审视。因为用于确定混沌存在的方法不是没有问题的 (见附录)。然而, 大量被认定的生物学中混沌的例子表明至少有一些是确实的。

混沌意义的探讨

留下的最后一个障碍: 混沌及其相关数 (如非整数维数或正李亚普诺夫指数) 的生物学意义是什么? 人们严格按照其进行流体动力学实验的同样方法计算种群动力学实验的维数。它指出在这些明显不相似的系统之间具有相似性, 但这也意味着计算分形维数 (fractal dimension) 确实对了解生物学没有什么帮助。说明这个问题的一个办法是进行比较。例如研究人员通过脑电图 (EEG)¹ 研究脑的动力学, 试图用意识水平与维数关联起来 (Basar 1990)。然而对于大部分研究人员用“维数”作为波形复杂性的指数, 没有推断出什么实际的脑功能。我们相信这是由于

缺乏生物学推理，以致使许多生物学家感到混沌对他们的课题确实没有提出什么新东西。

上述讨论表明用一种严格的定量方法去鉴别和分类混沌可能仅仅限于实验室。即便在如此理想的情况下，混沌对“真实世界”的贴切关系仍然不清晰。在实验室外，一个更有效的方法是设定其动力学是混沌的，利用一个或多或少看来是合适的特殊的模型，来试图推断是惟一的和可见到的结果。除了对多数生物学时间序列的范围内从头到尾观察一遍以外，这个方法开始回答“混沌对生物学有什么样的冲击？”这一问题。如果混沌对理论生物学家不再是一种游戏，这就是需要回答的中心问题。在下文中，我们查验一些近期的研究，这些工作表明有可能回答这个问题。

二、动物种群的延续和灭绝

虽然一些早期混沌的研究是受生态学模型的推动（May 1976），但许多生态学家仍然相信在自然种群中可能观察不到混沌现象。在多数简单的种群模型中，混沌动力学是以高振幅的波动为特征的，包括对起始点的周围的频繁审视。那么，人们可以期望，在存在不可避免的环境和人口统计的随机性情况下，混沌可能增加种群灭绝的概率（Thomas 等，1980；Berryman 和 Millstein 1989）。因之，任何物种在进化过程中，不幸而有导致混沌的生活史特性，就很可能被淘汰。人们将很难（即使有的话）在自然界见到这些物种。

然而，注意到从单一种群到全部物种的普遍性。可能的设想是：包含物种的种群都是独立的。它们将一个一个地消失，一直到终了。事实上，许多物种都是由亚种群（sub-population）组成，它们通过迁徙在较大或较小的程度上连接在一起，这样的物种叫镶嵌种群（metapopulation）。传统的镶嵌种群学说（见 Taylor 1990 的简要综述）认为由于局部环境的扰动，空间分布可以保护它们免遭灭绝。只要迁徙比率不是太小，通过其他亚种群的迁来者以

扩大它们的队伍（同类）而使局部的亚种群从灭绝或濒临灭绝中恢复过来。虽然，这并未提到系统对地区性的扰动的反应，如对于旱或寒潮，自然种群也是受其支配的。也没考虑亚区（subdivision）的保护效应是不是受亚种群水平上内在动力学特征的影响。

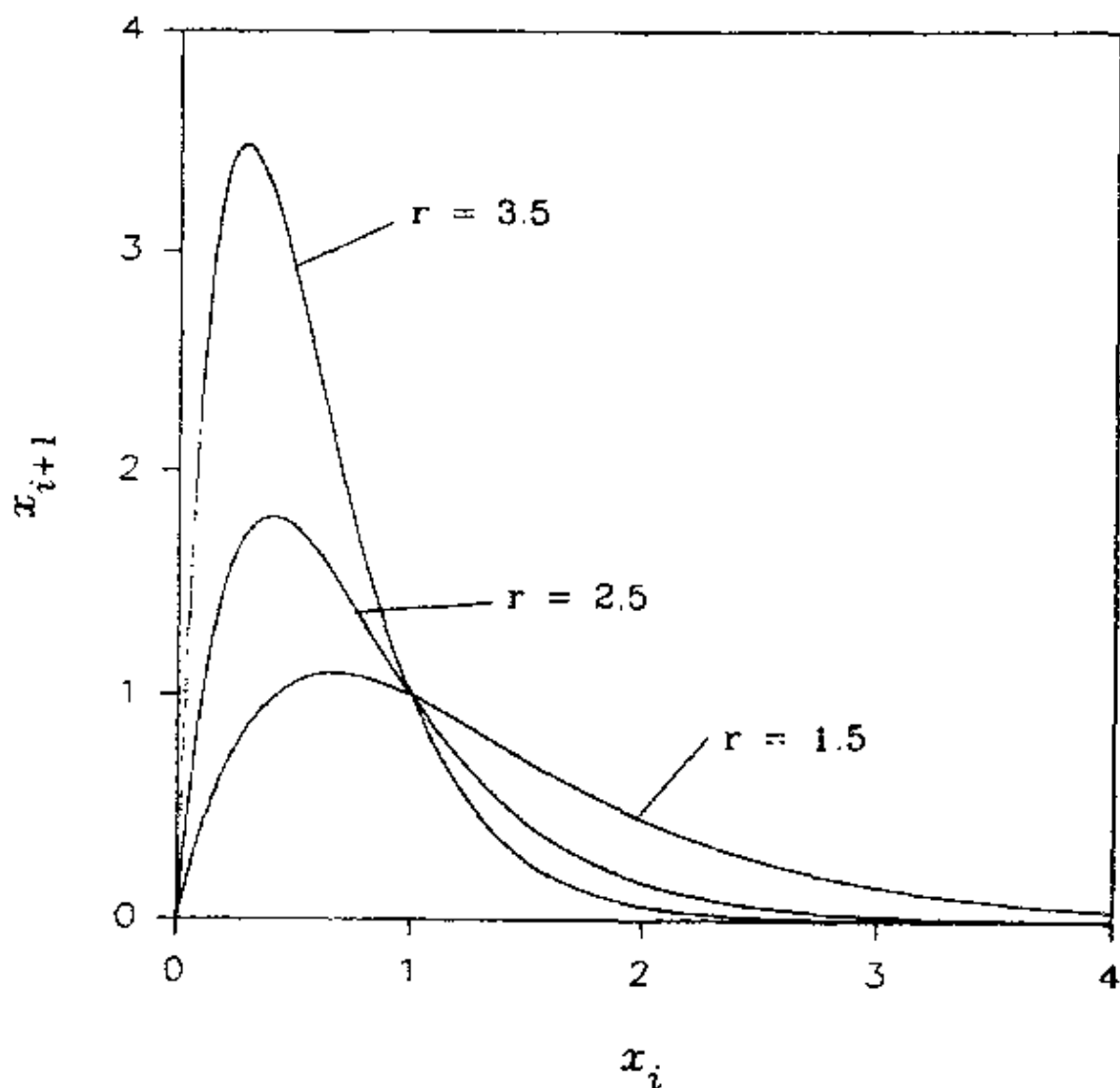


图 1 三个参数值的里克映射

Allen 等人（1993）通过建立镶嵌种群的局部和地区性的扰动模型对这些问题作了说明。局部的动力学受里克映射（Ricker map）² 控制（图 1），其动力学与 Berryman 和 Millstein（1989）所用的逻辑斯谛映射相似。在单一的亚种群内，他们发现其灭绝速率随着动力学变得更为复杂而迅速增长。相反，整个种群的灭绝

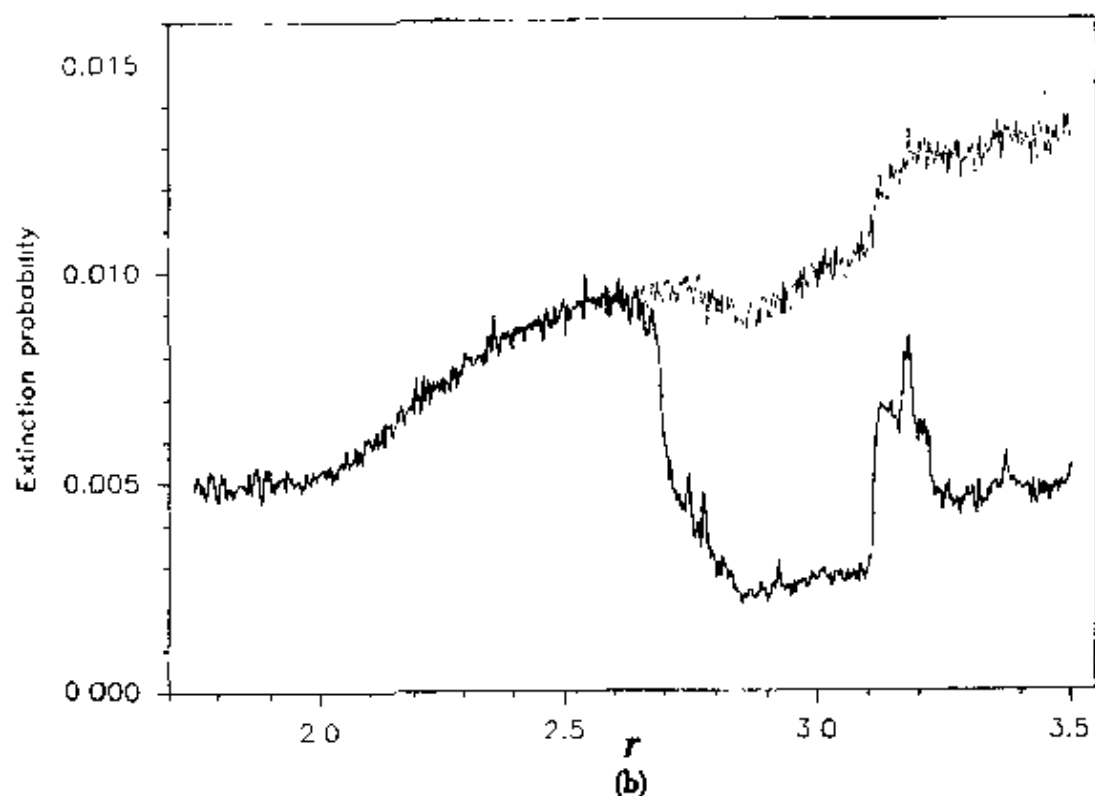
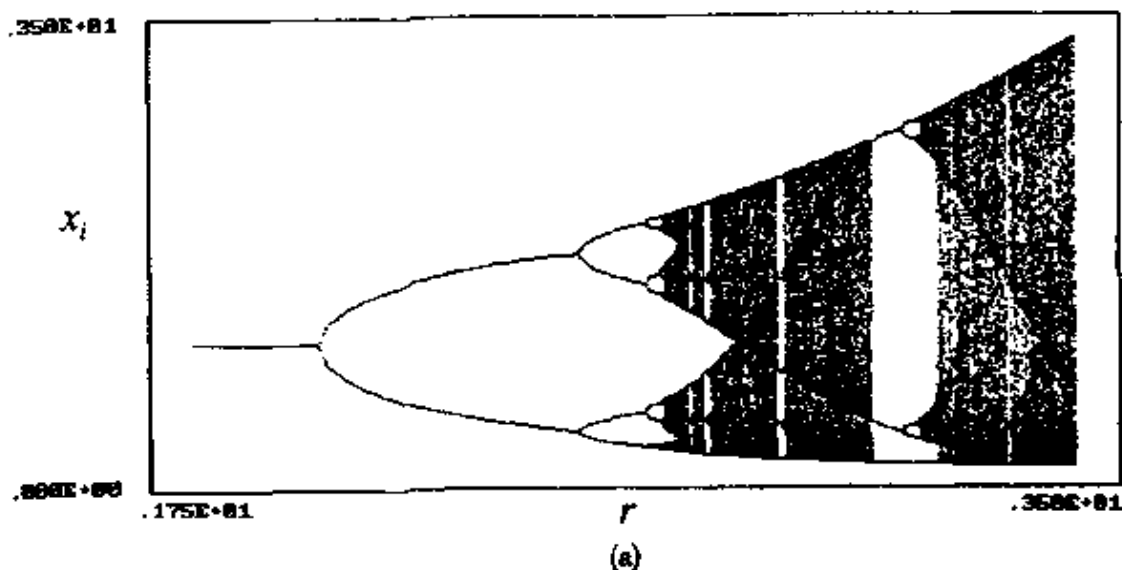
速率会随局部动力学进入混沌区而下降（图 2）。

这一效应是由于混沌本身，而不是模型其他的一些特征所造成，可以从一个仅有全球性的扰动的例子来说明（图 2b）。灭绝速率在周期三窗口突然回转到一个高的水平。在分岔图形中许多在灭绝曲线上的峰与较小的周期窗口相对应。

将较小且较经常的局部扰动（与全球性扰动相比）一起模拟时，混沌的保护效应甚至变得更大。而单个亚种群的灭绝速率现在会因具有分岔参数的功能而上升得极快，全球灭绝的概率实际上会比只有单独的全球扰动的情况为低。在图 2 指出的例子中，局部扰动的加入将按在 $r = 3.5$ 处的 100 的倍数降低全球性灭绝速率。足够大的局部扰动还破坏了周期窗口，图 2b 中的详细结构也不见了。

这种反直觉现象的解释是一个很好而简单的例子，说明混沌可以作出生物学的解释。只有全球性扰动的例子可揭示其潜在的机制。首先要注意，由于全球性扰动的最大值小于最大可能的种群规模（大小），全球性灭绝只有在全部的亚种群都相当小的时候才会发生。在平衡和周期动态区域内，任何在相内开始的种群会无限地那样维持下去，因为它们都经受同样的扰动和迁徙效应。对于低阶周期性（low order periodicities），各种不同相的吸引域（basins of attractions）都相当大，因此扰动会经常移到两组种群。最初在相外，再进入到同一相内。一旦所有的种群都进入相内，整个系统表现得就像一个单一的振子。某一特定扰动造成全球性灭绝的概率和由它造成的局部灭绝的概率是完全相同的。虽然如此，在混沌动态的区域，任何在开始时具有相似种群大小的亚种群会迅速地分道扬镳。这是因为它们对起始条件的敏感依赖性。而这又是混沌的特征（Ruelle 1979）。即使一种扰动使所有的亚种群都成为相近的大小（特别是接近于零），混沌可保证它们在下次扰动之前变得互不相关。从而，所有的亚种群由于单一的扰动而同时变得很小以至遭到毁灭的情况是不大可能的。

在混沌区增强保护的结果是：当加入局部扰动时，似乎可导



致局部扰动迅速引发 (jump starts) 亚种群的分离。虽然由正李亚普诺夫指数 (positive Lyapunov exponent) 所反映的决定性分离 (deterministic divergence) 是指数的, 无疑地其在起始时发散得非常慢。局部扰动能增强起始的去相关作用, 保护它免受迅速出现两代的全球性扰动造成的灭绝。

这些结果对于混沌在种群动力学中的作用意味着什么呢? 在

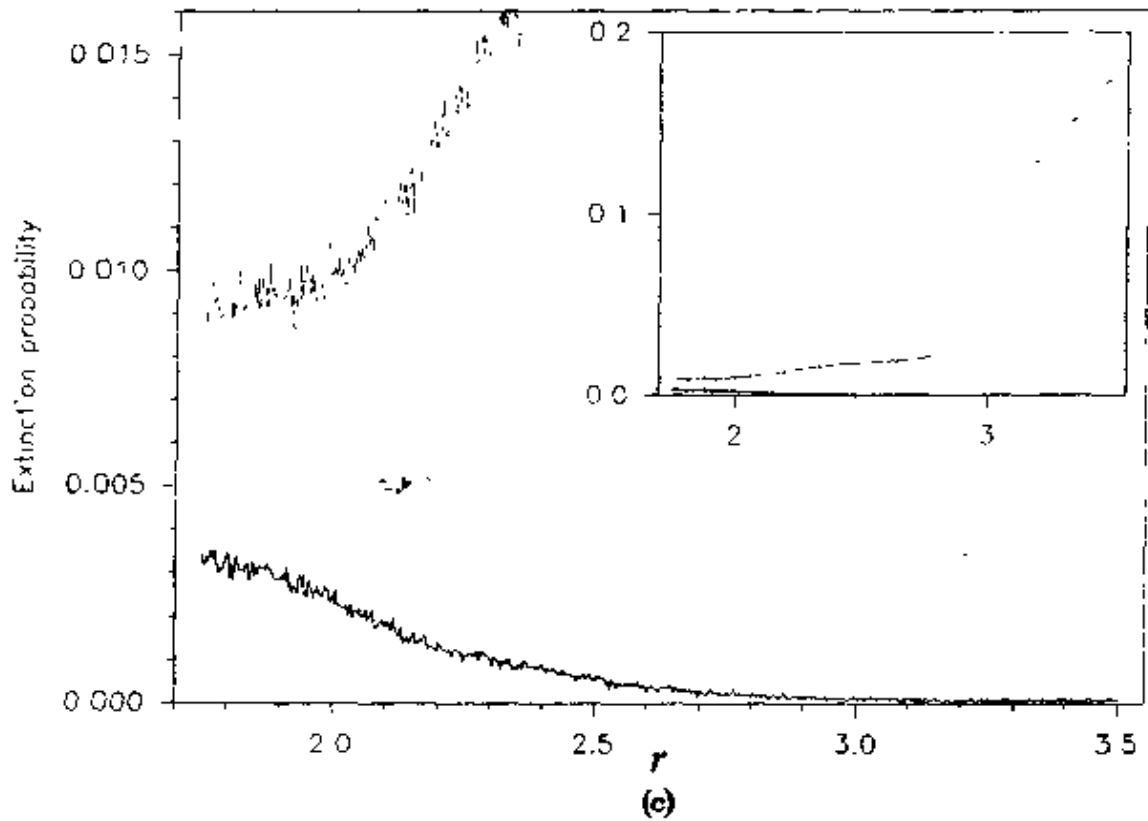


图2 Allen-Schaffer 模型中的局部和全球性灭绝的概率。25 个亚种群； r 是里克映射中的分岔参数。(a) 里克映射的分岔图。(b) 仅有全球性扰动的局部和全球性灭绝概率。全球性扰动是另加的： $x \rightarrow x + z$ ， z 是从 $[-0.75, 0.75]$ 均匀分布绘出。(c) 结合全球和局部的扰动的局部和全球性灭绝的概率。局部扰动也是另加的， z 是从 $[-0.1, 0.1]$ 绘出。扰动应用于各重复

简单的非空间性的模型中，混沌与高繁殖率是相关的。例如可期望高生育力的个体选择能将一个种群推向混沌动力学。Berryman 和 Millstein (1989) 断言这将会出现灭绝速率增加的不幸的副作用。但这只出现在一个亚分种群 (subdivided population) 内。现在看来混沌确实能增强物种的存活。基于这些结果的一个合理推断是：在一个分类群 (taxon) (一组彼此紧密相关的种群或物种) 内，仅具有有限的扩散能力的种群，较之在大范围内充分混合了的种群或几乎完全隔绝的种群更有可能证实混沌种群动力学。一种可以适合这一模式的动物是一种田鼠 (*Microtus* spp.)。大多数的田鼠种群经历引人注目的波动，而且具有高生殖率 (Keller 1985; Taitt 和 Krebs 1985)。在当地亚种群间，还有相当数量的迁徙

(Lidicker 1985)。然而有一种田鼠局限在远离马萨诸塞海岸的一小岛上。这里没有迁徙，生殖率低于大陆的田鼠。种群大小的波动只是对资源水平的季节性反应 (Tamarin 1977a, b)。为什么有些种群出现波动而另一些则不出现的问题一直是生态学上的一个重要问题。如果能在认真思考混沌对种群动力学的影响方面看出苗头，这将是这一问题的重要进展。

三、混沌现象中的周期性

尽管对混沌的经典描述是“确定性的非周期性流” (Lorenz 1963)。混沌的轨线仍可呈现强的统计学的周期性。在有些系统中，这是由于延伸和折叠出现在流的垂直方向的缘故 (Farmer 等, 1980)。这种周期性充满在全部时间序列之中，且能经常通过去掉部分流而移去。在轨线靠近和“遮蔽”非稳定性周期轨道的时候，周期性运动的情景也可发生 (Auerbach 等, 1987; Cvitanovic 1988)。更多的近周期运动 (near-periodic motion) 的连续的情景 (Kendall 等, 于 1993 年称之为瞬时周期) 可在其轨线临时陷入“半周期半吸引子”的附近时发生。后两种类型的周期行为是吸引子的局部特性造成的，发生在时间序列的零星分散的间隔中。虽然如此，一个瞬时周期的情景可以存在相当长的时间。作为生物学家，发现这种现象是鼓舞人心的，因为在生物系统中有许多情况会在周期性和无规则的动力学之间反复无常地转换。

麻疹的流行

从种群水平探寻混沌的观点来看，流行病学的记录可能提供发现混沌的最佳数据。各种儿童疾病都有广泛的记录，包括北美和欧洲不同城市麻疹、风疹、脊髓灰质炎（小儿麻痹症）和水痘。其中许多从本世纪初直到本世纪 60 年代和 70 年代实施大规模疫苗接种的计划为止。虽然并未报道全部病例（估计麻疹在不同城市的报道率范围为 10% ~ 30% (London 和 Yorke 1973)），每年疾病爆发量的巨大变异性，不能用取样的误差来解释。

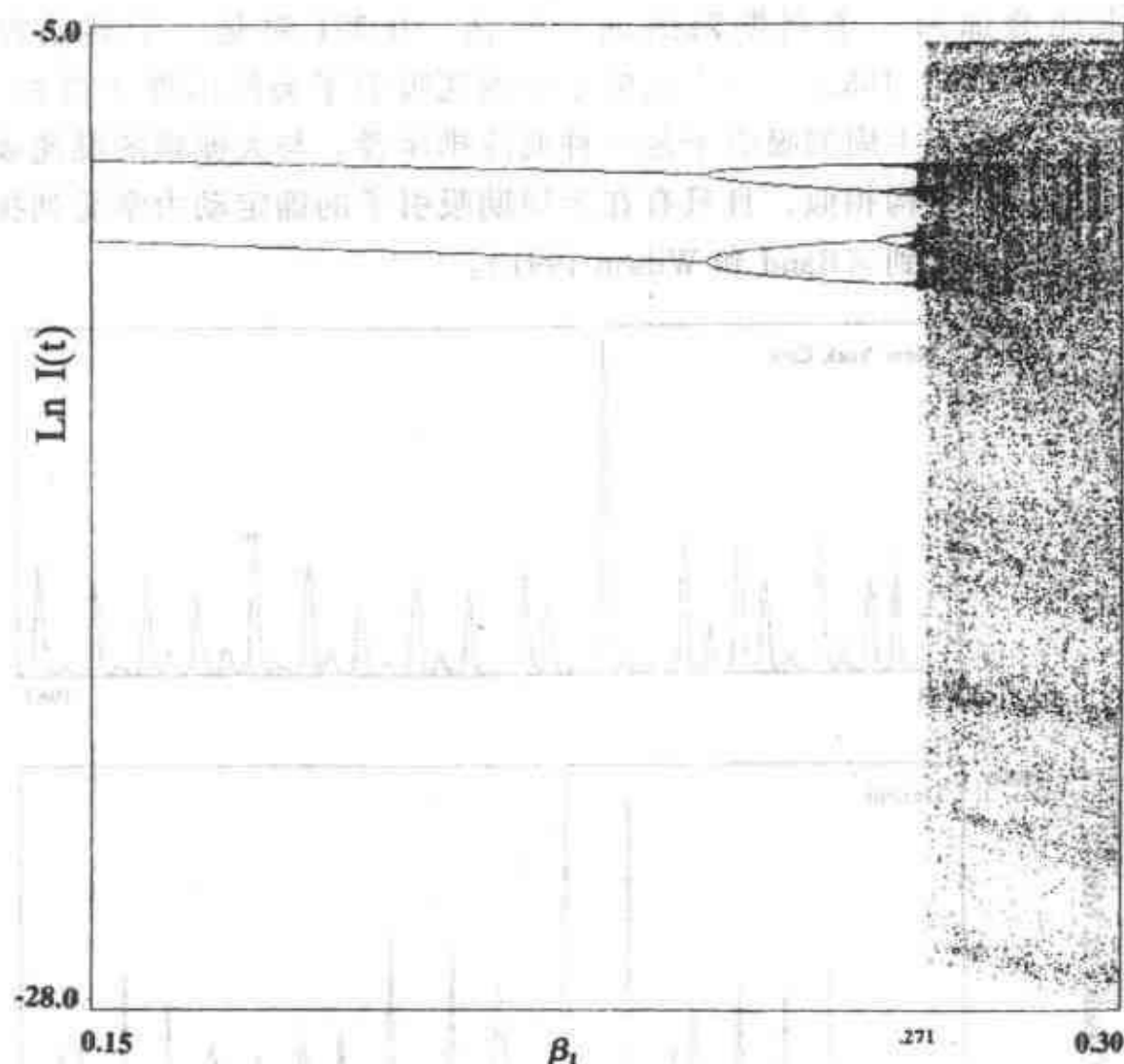


图3 具有适合于麻疹模拟参数的季节性强迫 SEIR 方程的分岔图

儿童流行病资料已作为检验混沌的证据 (Schaffer 和 Kot 1985; Olsen 和 Schaffer 1990)。至少在麻疹, 混沌的证据是符合情理、令人信服的。还有麻疹数据在“形式”和动态不变量值方面都能模拟得非常相似, 如维数和李亚普诺夫指数 (Lyapunov exponent), 用一个标准的流行病学模型, 即季节性的强迫 SEIR 方程式³ (Dietz 1976; Olsen 和 Schaffer 1990)。关于适合于麻疹的参数值, 在接触率 β_1 的巨大季节变异性中的小变动, 可产生 3 种类型的动力学。 β_1 的最低值产生简单的周期性。随着 β_1 的增强出现倍周期级联 (period-doubling cascade) 可获得最多 4 片组成的混沌吸引子, 或半周期吸引子 (Lorenz 1980), 在这里低振幅

混沌叠加为一个周期四摆动，在 $\beta_1 \approx 0.271$ 时是一个转折期 (Grebogi 等, 1983)，一个大的振幅混沌吸引子突然出现 (图 3)。同时存在的半周期吸引子是一种混沌排斥者。与大振幅的混沌吸引子拓扑结构相似，且只有在半周期吸引子的确定动力学受到扰动时才可见到 (Rand 和 Wilson 1991)。

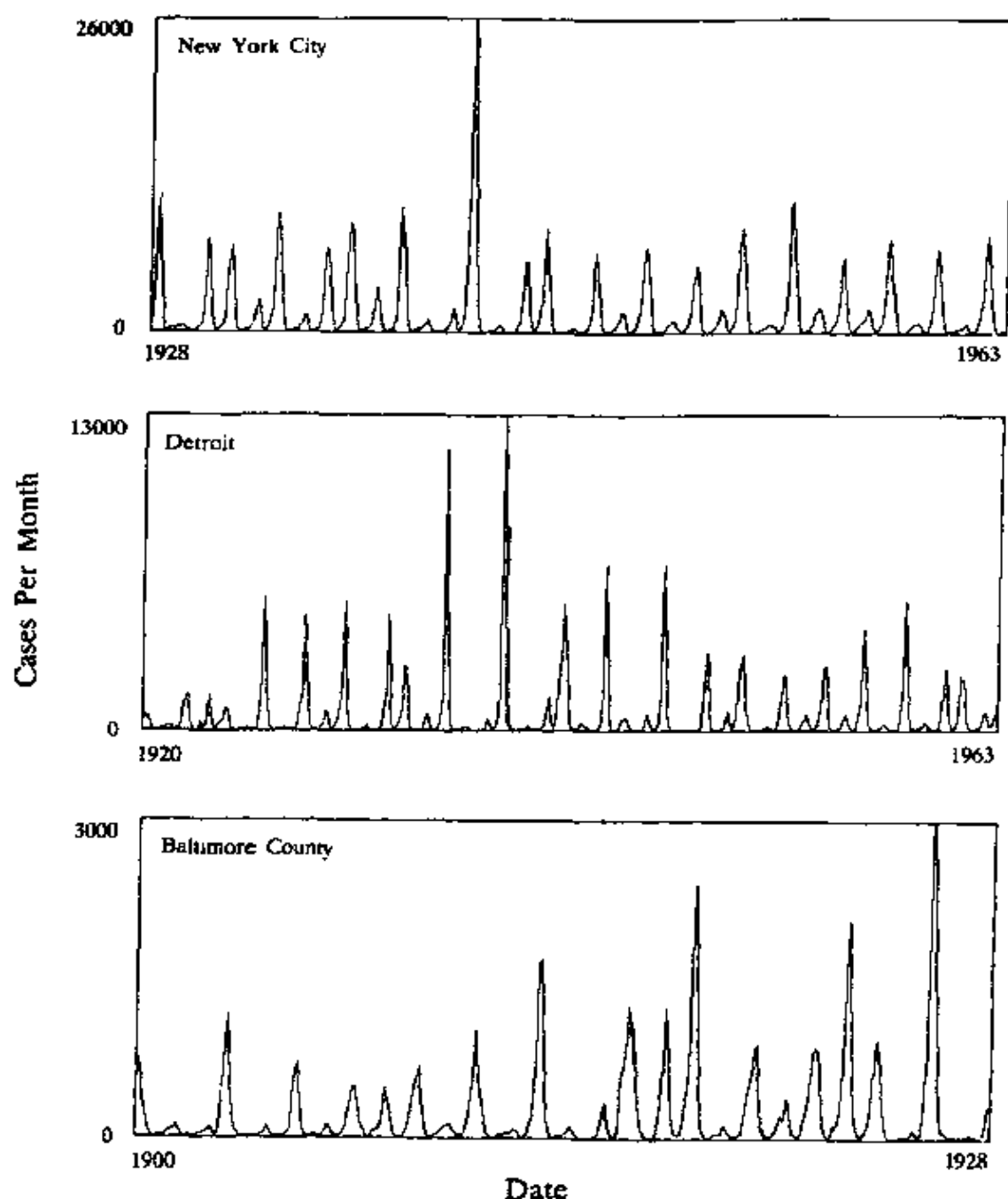


图 4 三个北美城市逐月报道的麻疹病例 (纽约城资料来自 Yorke 和 London (1973); 巴尔的摩县资料来自 Hedrich (1933))

人们借助数据资料，可经常见到的是周期性与无序性的混合体。如在纽约城，1945 ~ 1963 年麻疹的流行明显的表现为两年一周期。在底特律 (Detroit) 和巴尔的摩 (Baltimore) 县有较短的同一模式的情景 (图 4)。但在这一时间序列的其他部分则是高度的不规则。两年一次的分段不是真正的周期性，但它们与典型的动力学比较又是非常有规则的。确实，任何人只注意到纽约城数据的下半部分是很难声称这不是一个有扰动的极限环 (noisy limit cycle)。

SEIR 模式产生相似的图形。如 $\beta_1 = 0.28$ ，几乎是两年周期的动力学情景中 (与资料中所见的相似) 分散着较多的不规则的波动 (图 5)。要显示高维相空间形象的办法之一是取一个二维相邻的振幅图形——由时间序列中每个最大值相对前一最大值的图形——该图形绘自感染的时间序列 (与报道的病例数据相符，图 6)。在这一图形中，二年周期的动力学表现为两个大的 V 形区域 (图 7)。

这些周期性运动的情景来自何处？在 $\beta_1 = 0.27$ ，刚好在大振幅混沌起始之前，该模型产生一个半周期吸引子，并与混沌吸引子的双年周期部分非常匹配 (图 7)。这种相似性提示这两部分可能是相关的。Kendall 等 (1993) 已经用二维图形表明，瞬时周期性区域是半周期半吸引子的邻域 (Kantz 和 Grassberger 1985)，当一半周期吸引子被一种内部激变破坏时所形成的 (Grebogi 等，1983)，实际上，它出现了下述结果：一条轨线通过清晰的预映像 (preimages) 集，进入瞬时周期性区域；并在一可变的时间内截留其中；然后通过一清晰的“应急出口”离去。

就此而言，人们无需任何特殊的因素去解释麻疹数据各部分之间的差异：“二年周期”情景反映出瞬时周期性，这是混沌运动的本质部分。一种可能的选择是，4 片半周期吸引子确定渐进动力学，而不规则运动的情景则起因于由 Rand 和 Wilson (1991) 所讨论的对于混沌排斥者的扰动。当噪声非常小时，其动力学随着一噪声极限环而行。若噪声水平比较高，则有偶发的大振幅偏

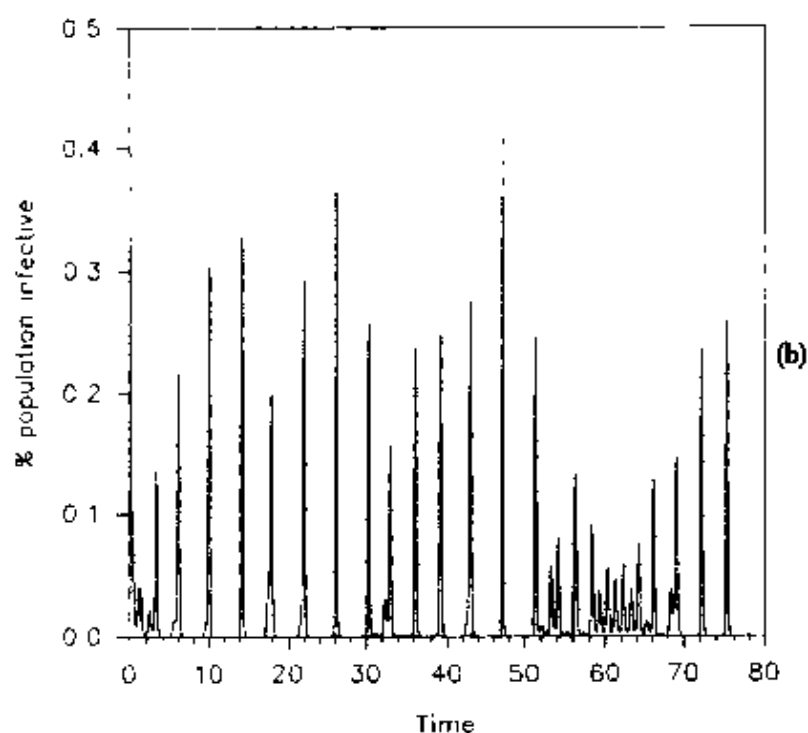
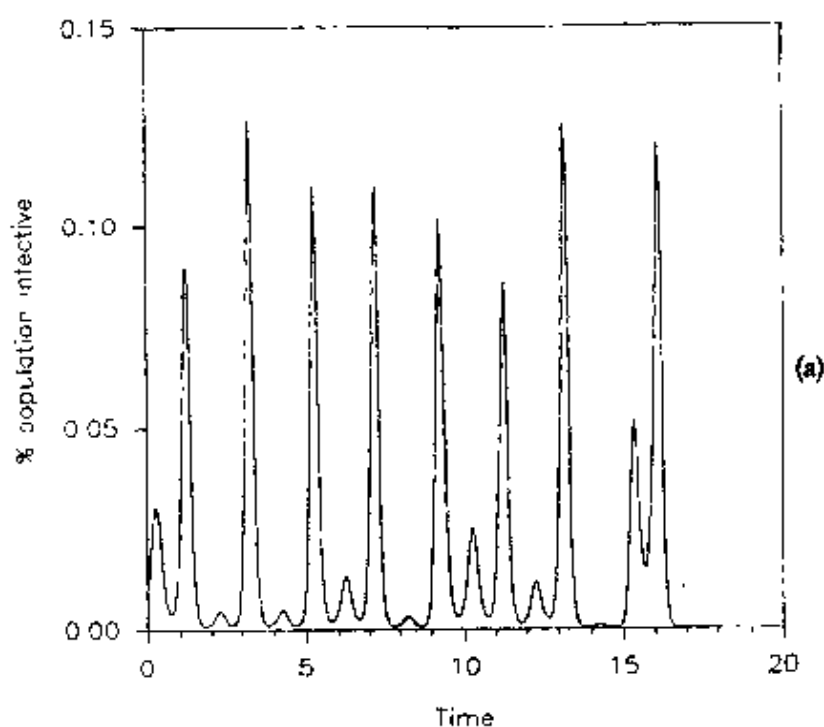


图5 季节性强迫 SEIR 方程中的瞬时周期性
(a) 时间序列显示大振幅不规则振荡和小振幅二年周期的动力学。(b) 二年周期情景的放大

移，好像是轨线对于混沌半吸引子经历了一种偏移（图8）。我们把这种现象称之为“突入式间歇现象”。最后，如果有更多的

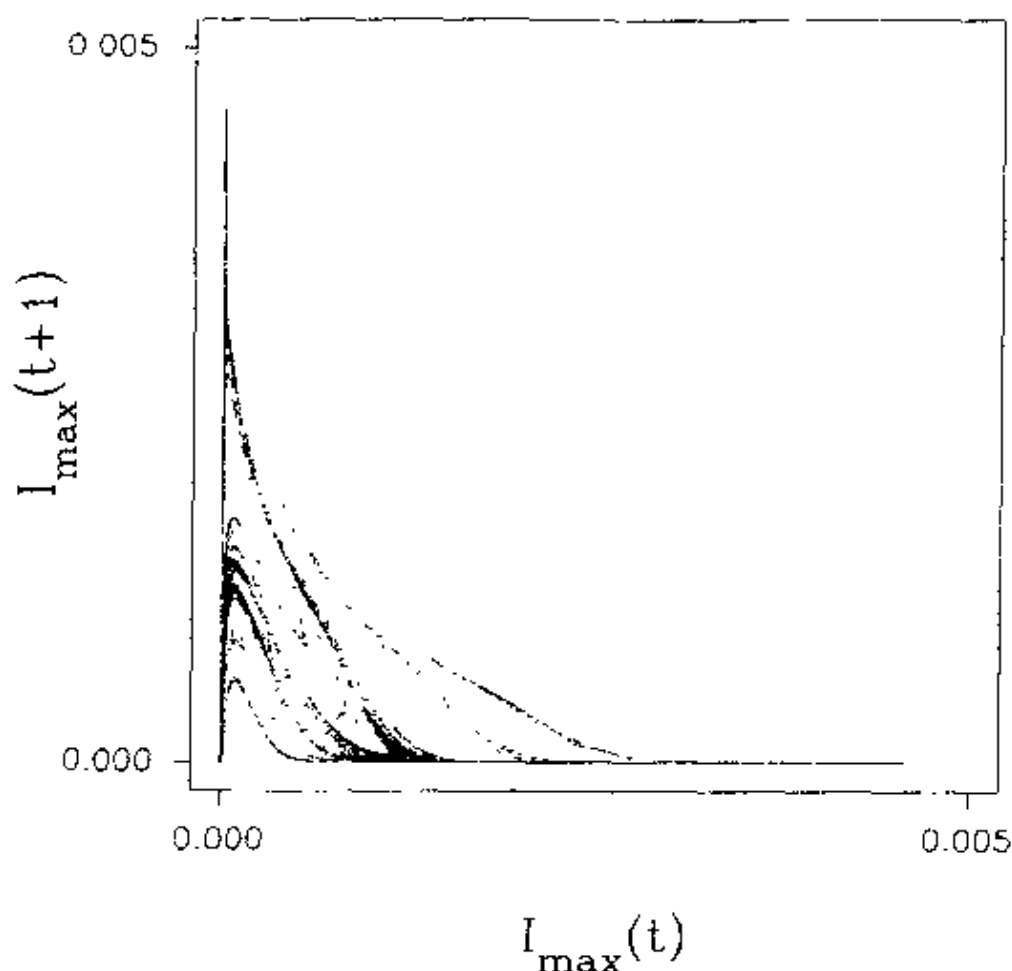


图6 SEIR 方程的相邻的振幅图形，该图形按感染的时间序列中的每个最大值相对于前者的最大值绘出

噪声（但仍然不很多），则轨线几乎没有机会维持极限环的特性（图9）。而轨线和大 β_1 值相联系的大振幅混沌吸引子实质上已无法区分。这种场景是与通常所认为的“噪声周期性”（即关于极限环的随机性变动）大不相同的：此处一个单一的扰动即可导致一个扩大的混沌偏移。当有一个随机的超值扰动时，随之而来的不规则波动则是完全确定的。

虽然在当今世界由于疫苗的广泛接种，了解麻疹流行的动态并不怎么重要，但这个例子确实有两重有趣的含意。首先是可能在种群水平现象上检测混沌，人们可以从这里指望随机的影响占据优势。其次是方法本身：麻疹的研究包括在模型与实际动力学之间的一种动力学相互影响，使得有可能识别单靠数据无法轻易

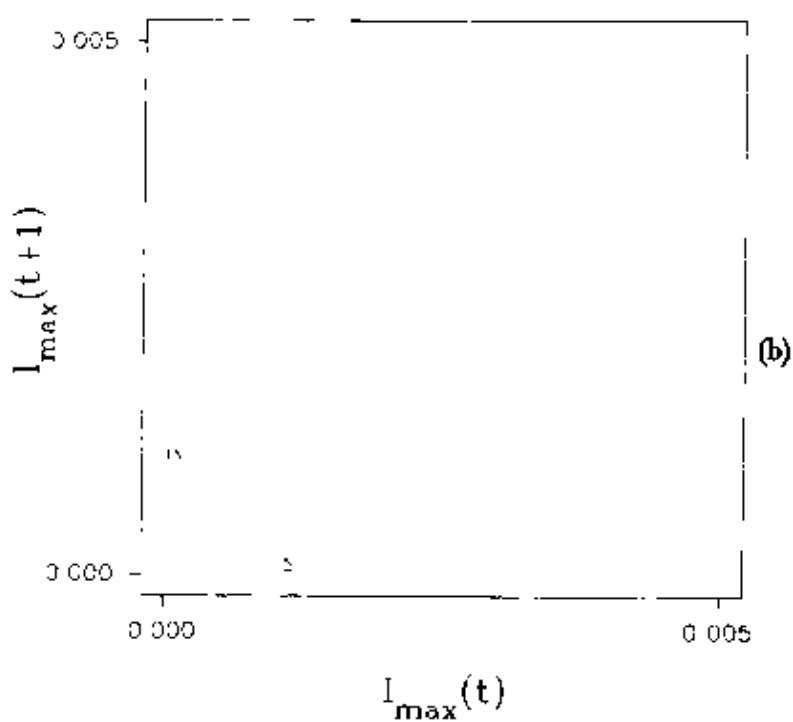
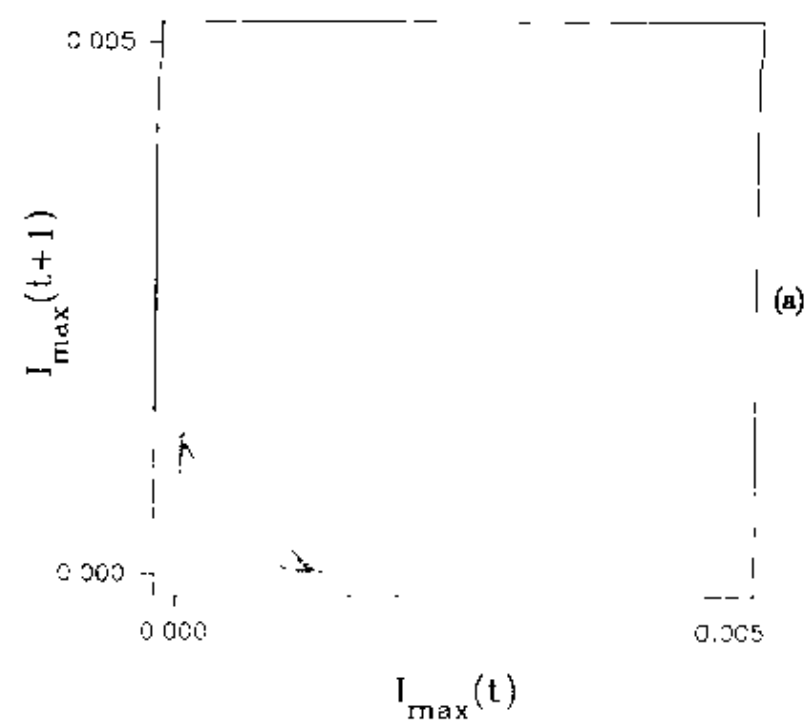


图 7 (a) 摘自 SEIR 方程 ($\beta_1 = 0.28$) 的相邻振幅图形的瞬时周期区域。(b) 4 片吸引子 ($\beta_1 = 0.27$) 的相邻振幅图形

表现的动力学特征。

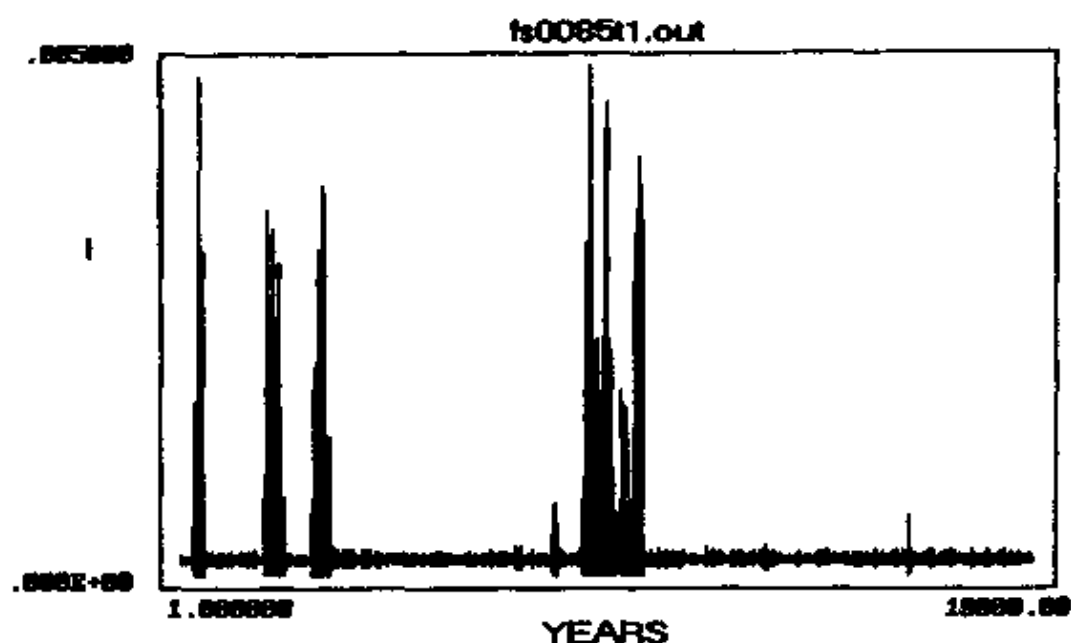


图 8 SEIR 模型中的突入式间歇现象

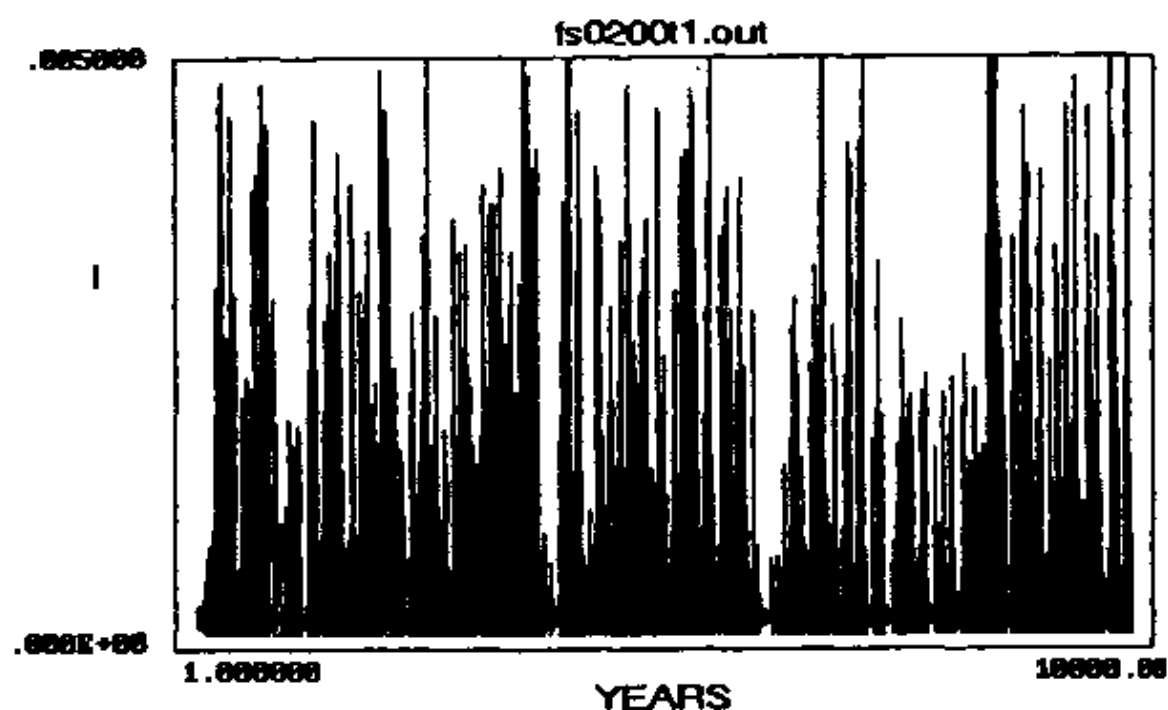


图 9 SEIR 模型中持续噪声的混沌现象

癫痫病

前面的例子，对其潜在的生物学机制已充分了解。可惜的是对这样的了解并不多。如果我们只局限于这样的例子中，上述方

法就没有普遍价值。此外，周期性动力学往往出自高维（highdimensional）背景。问题是我们能否懂得这种现象而没有清楚地了解其全部动力学。

一种医学上重要的引人注目的例子是癫痫病。这种疾病的特征是它的突发性和不同的持续时间，且经常伴随着意识丧失⁴。发病本身通常不会危及生命⁵。然而，在意志清醒的情况下突然和无法预料的发作会妨碍许多癫痫患者过正常的生活。发作时伴随着脑电图的显著改变。典型的情况下，可能有出其不意的高幅的发病，几乎与周期动力学相同（图 10）⁶。虽然某些类型的发作能由不同的外部刺激引起（反射性癫痫：Forster 1977），发作活动的开始更多的是自发性的。同样，多数发作也会自己结束（Dreifuss 1990；Niedermeyer 1990）。

一个对癫痫的动力学解释是：发作表示一个分岔进入周期窗口，像脑“穿过”参数空间。这是一个对非终结性的发作引人注意的模型。用药物处理来终止发作可视为引发参数转回而离开窗口。或者，如 Schaffer 等（1993）指出：如果脑临近周期窗口，那么它就会受瞬时周期性情景的支配。最后脑还可能在这些参数空间区域内，受间歇现象支配（Pomeau 和 Manneville 1980）。这虽不同于瞬时周期性，但仍会有引发接近周期运动情景的影响。后两种现象可说明大多数的发作会自发性地开始和结束。由于在病人发病史的全过程中，发病频率和严重性经常不同，一种似乎有理由的解释是，由于长期限（几周至几年）通过参数空间的运动，致使系统漂移接近或远离周期窗⁷。

将癫痫作为瞬时周期性的问题是由于在瞬时周期性中近周期的轨道都包括在“正常的”吸引子之内，伴随着发病的振荡与脑电图的背景振荡均在相空间中完全不同的部分。这就提示，作为一个更类似子突入式间歇性模型可能更合适。Speelman 等（1995）一直在探究一种海马模型，它可能产生覆盖一些参数值范围的大振幅摆动的一些“突起”。他们提出如果这些“突起”能在空间上连贯地覆盖脑的大面积，他们就可能阐述一个癫痫病

的合理模型。

最符合理想的是，大家都希望有一个在空间上明确的脑动力学模型，但是由于脑内神经元的数目使得这一想法并不实际。然而有些由空间扩展动力系统的较简单的模型的一些结果有可能解释这一问题。Kaneko (1993, 和其中的参考资料) 研究了具有总体或最接近邻域的耦合的混沌逻辑斯谛映射 (logistic map) 的大型阵列。对这两种较简单耦合的逻辑斯谛系统的研究 (Kaneko 1983; Gyllenberg 等 1993; Hastings 1993; Kendall 和 Fox 1995) 已经表明了多种共存周期及混沌的吸引子的可能性，并具有不同的空间模式；由于振子数目的增加，其复杂度也相应增加。一种可能的大型阵列的状态是充分发展的时-空混沌，其中所有的振子都是混沌的。而且在它们之间没有明显的相关性。它产生一种具有低振幅波动的平均信号 (mean signal)，它们仍然是混沌和高维的，很像正常的脑电图。可能的动力学的一个相反的极端是当所有的振荡子都是同相的：其系统状态没有空间变异。在这种情况下，平均信号有大的振幅，且要么呈周期的，要么呈低维的混沌动力学，与发病时的脑电图极为相似。

如果同相动力学 (in-phase dynamics) 的主要李亚普诺夫指数 (Lyapunov exponent) 很小，那么同相动力学是局部吸引：如果系统几乎都在同相，它将仍然会是那样，并不会自发地逃逸。然而同相吸引子的局部吸引域的大小随着系统大小的增加而呈指数下降 (Kaneko 1993)。在脑一般大小的系统中，任一小的扰动都会使系统脱离同相状态。

另外还有一种观点：经常在一长时间的时-空混沌之后，系统会突然崩溃而进入同相动力学。即使局部吸引域小，最终仍有寿命较长的混沌瞬变态导入，有如混沌瞬变态与在简单图形中的周期窗口联在一起。因此我们可以选择另外一个明显的空间癫痫病模型：当明显正常动力学的长瞬变态衰退到同相状态时，即病的发作开始。当脑遇到内部或外部刺激而扰动，使脑脱离同相状态的狭窄的局部吸引域时，癫痫的发作就结束。反之，对于健康

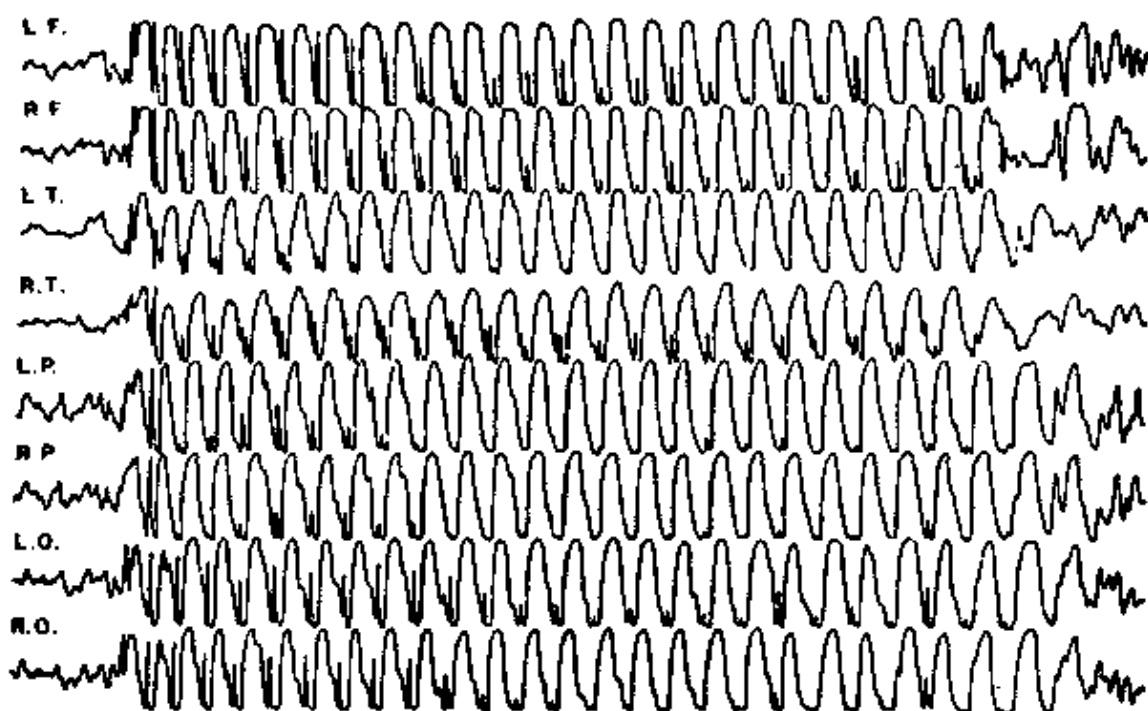


图 10 癫痫病发作脑电图扫迹（轻度癫痫）（摘自：Avoli 等 1990）

人的同相状态，连局部的稳定性都不存在。

有关癫痫病的这些观点需要脑的活动实际上发生在同相空间。因此我们认为有些癫痫病患者经历过他们发病前的一种灵敏的预感（发展先兆）是值得注意的，还有，有些报道认为发病是由特定的思维所激发（Paulson 1963；Symonds 1970）。这两种观察提出存在着癫痫病状态的完全清晰的预映像。

在第一个模型下，健康人与癫痫病患者之间没有根本区别；后者仅仅只是在参数空间的不幸区域（靠近周期窗口，或有较稳定的同相动力学）。抗发病的药物治疗通常会改变神经膜的离子转运能力，或是不同神经递质的浓度（Prichard 1980；Suria 和 Killam 1980；Woodbury 1980），而且通常还需要几周或几个月才发挥充分的效力；这也能在参数空间的运动中观察到。这个模型给人们以启迪，有助于指导找寻新的治疗方法。例如，第一个模型提示我们可尝试勾画发病状态的预映像。有时，发作会由于恰巧在发病前或发病后给予突然的刺激而终止（Symonds 1970；Forster 1977；Rajna 和 Loma 1989；Iragui 和 McCutchen 1991）。通过自动

监测脑的癫痫发作的预映像得到治疗的可能性是有极大的潜力的。癫痫病患者不仅可过上正常的生活（某些我们认为可以参加的活动，但如果开车，则对随时都可能发病的人是不可能的），而且还可避免抗癫痫药物治疗中有时会出现的严重的副作用。如果非线性动力学不仅能告诉人们对一种疾病，如癫痫病的了解，而且还包括治疗，它将被证明是一种确实有用的工具。

四、结语

尽管在生物学中为寻找复杂动力学的证据做过许多努力，而混沌在功能方面的含义却很少分析过。因此，混沌对于大多数生物学家而言几乎没造成什么影响。本文试图介绍这些研究以直接提出这一问题。我们觉得这些都是有益的探讨和陈述。希望它能激励人们对这一问题进行深入的和创造性的研究。

致 谢

该项研究工作受到 NIH 及丹麦研究委员会的资助。感谢 G. A. Fox 对论文的评释。

附 注

1. 脑电图 (EEG) 是测量全脑活动的最常用的方法。它通过测量置放在头皮上不同点电极之间的电压差，表示脑皮质外层电流活动空间的平均记录。

$$2. \quad x_{t+1} = x_t \exp [r (1 - x_t)]$$

这是基于 Ricker (1954) 建立的模型，它描述种群动力学（如某种鱼），其幼体的密度依赖性死亡率是被成鱼掠食或与成鱼竞争的结果。然而，与下代的功能性形式非常一般（见 Ricker (1954) 的许多其他例子）。与逻辑斯蒂映射的主要区别是其指数尾数；式中 r 无正值，对正的 r 值确定性动力学可导致种群灭绝。

$$3. \quad \frac{dS}{dt} = m(N - S) - b(t)SI$$

$$\frac{dE}{dt} = b(t)SI - (m + \alpha)E$$

$$dI/dt = aE - (m + g)I$$

$$dR/dt = gI - mR$$

$$b(t) = \beta_0(1 + \beta_1 \cos 2\pi t)$$

见 Olsen 和 Schaffer (1990) 对变量和参数的叙述。在此讨论用于模拟的“麻疹”的参数值, $m = 0.02y^{-1}$; $a = 35.84y^{-1}$; $g = 100y^{-1}$; $\beta_0 = 1800y^{-1}$; β_1 在 0.2 到 0.3 之间变动。

4. 一种有用的分类将癫痫病分成两种显著的类型, 病灶型和遍发型。病灶型发作开始于脑的特定部位, 经常与某些生理学损伤一致, 发病逐步扩散到脑的其他部位。遍发型的发病同时出现在脑的大部分, 包括脑的两个半球, 而且很难查出任何特定损伤 (Niedermeyer 1990)。这一节讨论的动力学范例主要适用于遍发型的癫痫。

5. 一个例外是“器质性癫痫病患者” (status epilepticus), 从几分钟或更短时间的间隔反复发作, 病人不能再恢复意识 (Niedermeyer 1990)。

6. 在发病时测量电的活动显示出实际上为混沌。Babloyantz 和 Destexhe (1986) 计算维数 $D_C = 2.05 \pm 0.09$ 主要的李亚普诺夫指数 $\lambda = 2.1 \pm 0.6S^{-1}$, Frank 等 (1990) 发现 $D_C = 5.6$, $\lambda \approx 1.0S^{-1}$ 。然而, 显然“近似周期性”恰如 SEIR 方程产生的半周期吸引子。

7. 间歇性 (周期性) 和瞬时周期性的情景都较长, 而且系统也较频繁地接近周期窗口。

参考文献

- [1] Aihara, K., G. Matsumoto, and M. Ichikawa. 1985. "An Alternating Periodic-chaotic Sequence Observed in Neural Oscillators." *Physics Letters* A111: 251 - 255.
- [2] Aihara, K., G. Matsumoto, and Y. Ikegaya. 1984. "Periodic and Non-Periodic Responses of a Periodically Forced Hodgkin-Huxley Oscillator." *Journal of Theoretical Biology* 109: 249 - 269.
- [3] Aihara, k., T. Numajiri, G. Matsumoto, and M. Kotani. 1986. "Structures of Attractors in Periodically Forced Neural Oscillators." *Physics Letters* A116: 313 - 317.
- [4] Allen, J. C. 1990a, "Chaos and phase locking in predator-prey Models in Re-

- lation to the Functional Response." *Florida Entomologist* 73: 100 – 110.
- [5] Allen, J. C. 1990b. "Factors Contributing to Chaos in Population Feedback Systems." *Ecological Modelling* 51: 281 – 298.
- [6] Allen, J. C., W. Schaffer, and D. Rosko. 1993. "Chaos Reduces Species Extinction by Amplifying Local Population Noise." *Nature* 364: 229 – 232.
- [7] Auerbach, D., P. Cvitanovic, J. P. Eckmann, G. Gunaratne, and I. Procaccia. 1987. "Exploring Chaotic Motion through Periodic Orbits." *Physical Review Letters* 58: 2387 – 2389.
- [8] Avoli, M. P. Gloor, G. Kostopoulos, and R. Naquet. 1990. *Generalized Epilepsy: Neurobiological Approaches* (Birkhäuser, Boston).
- [9] Babloyantz, A. and A. Destexhe. 1986. "Low-dimensional Chaos in an Instance of Epilepsy." *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA* 83: 3513 – 3517.
- [10] Babloyantz, A., Destexhe. 1988. "Is the Normal Heart a Periodic Oscillator?" *Biological Cybernetics* 58: 203 – 211.
- [11] Babloyantz, A., J., J. M. Salazar, and C. Nicolis, 1985. "Evidence of Chaotic Dynamics of Brain activity during the Sleep Cycle." *Physics Letters* A111: 152 – 156.
- [12] Basar, E. 1990. "Chaotic Dynamics and Resonance Phenomena in Brain Function: Progress, Perspectives, and Thoughts." pp. 1. 30. in E. Basar, ed. *Chaos in Brain Function* (Springer-Verlag, Berlin).
- [13] Berryman, A. A., and J. A. Millstein. 1989. "Are Ecological Systems Chaotic-and If Not, Why Not?" *Trends in Ecology and Evolution* 4: 26 – 28.
- [14] Bier, M., and T. C. Bountis. 1984. "Remerging Feigenbaum Trees in Dynamical Systems." *Physics Letters* A 104: 239 – 244.
- [15] Caswell, H., and D. E. Weeks. 1986. "Two-sex Models: Chaos, Extinction, and Other Dynamic Consequences of Sex." *The American Naturalist* 128: 707 – 735.
- [16] Chay, T. R. 1985. "Chaos in a Three-variable Model of an Excitable Cell." *Physica* D16: 233 – 242.
- [17] Chay, T. R., and J. Rinzel. 1985. "Bursting, Beating, and Chaos in an Excitable Membrane Model." *Biophysical Journal* 47: 357 – 366.
- [18] Chialvo, D. R., R. F. Gilmour, Jr., and J. Jalife. 1990. "Low-Di-

- mensional Chaos in Cardiac Tissue." *Nature* 343: 653 – 657.
- [19] Chialvo, D. R., and J. Jalife. 1987. "Non-linear Dynamics of Cardiac Excitation and Impulse Propagation." *Nature* 330: 749 – 752.
- [20] Collet, P., and J. P. Eckmann. 1980. *Iterated Maps On the Interval As Dynamical Systems* (Birkhauser, Basel).
- [21] Cvitanović, P. 1988. "Invariant Measurement of Strange Sets in Terms of Cycles." *Physical Review Letters* 61: 2729 – 2732.
- [22] Destexhe, A., J. A. Sepulchre, and A. Babloyantz. 1988. "A comparative Study of the Experimental Quantification of Deterministic Chaos." *Physics Letters A* 132: 101 – 106.
- [23] Dietz, K. 1976. "The Incidence of Infectious Diseases under the Influence of Seasonal Fluctuations." pp. 1 – 15. In: J. Berger, W. Bühler, R. Repges, and P. Tauto. eds. *Mathematical Models in Medicine* (Springer-Verlag, Berlin).
- [24] Dreifuss, F. E. 1990. "The Syndromes of Generalized Epilepsy." pp. 19 – 29. In: M. Avoli, P. Gloor, G. Kostopoulos, and R. Naquet, eds. *Generalized Epilepsy: Neurobiological Approaches* (Birkhauser, Boston).
- [25] Dvorak, I., and J. Siska. 1986. "On Some Problems Encountered in the Estimation of the Correlation Dimension of the EEG." *Physics Letters A* 118: 63 – 66.
- [26] Eckmann, J. P., and D. Ruelle. 1985. "Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors." *Reviews of Modern Physics* 57: 617 – 656.
- [27] Ehlers, C. L., J. W. Havstad, A. Garfinkel, and D. J. Kupfer. 1991. "Nonlinear Analysis of EEG Sleep States." *Neuropsychopharmacology* 5: 167 – 176.
- [28] Ellner, S., A. R. Gallant, D. McCaffrey, and D. Nychka. 1991. "Convergence Rates and Data Requirements for Jacobian-based Estimates of Lyapunov Exponents from Data." *Physics Letters A* 153: 357 – 363.
- [29] Farmer, D., J. Crutchfield, H. Froehling, N. Packard, and R. Shaw. 1980. "Power Spectra and Mixing Properties of Strange Attractors." *Annals of the New York Academy of Sciences* 357: 453 – 472.
- [30] Farmer, J. D., and J. J. Sidorowich. 1987. "Predicting Chaotic Time Series." *Physical Review Letters* 59: 845 – 848.

- [31] Feigenbaum, M. J. 1978. "Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations." *Journal of Statistical Physics* 19: 25 – 52.
- [32] Fell, J., J. Roschke, and P. Beckmann. 1993. "Deterministic Chaos and the First Positive Lyapunov Exponent: A Nonlinear Analysis of the Human Electroencephalogram during Sleep." *Biological Cybernetics* 69: 139 – 146.
- [33] Forster, F. M. 1977. *Reflex Epilepsy, Behavioral Therapy and Conditional Reflexes* (Charles C. Thomas, Springfield, Illinois).
- [34] Frank, G. W., T. Lookman, M. A. H. Nerenberg, C. Essex, J. Lemieux, and W. Blume. 1990. "Chaotic Time Series Analyses of Epileptic Seizures." *Physica D* 46: 427 – 438.
- [35] Gallez, D., and A. Babloyantz. 1991. "Predictability of Human EEG: A Dynamical Approach." *Biological Cybernetics* 64: 381 – 391.
- [36] Gardini, L., R. Lupini, and M. G. Messina. 1989. "Hopf Bifurcation and Transition to Chaos in Lotka-Volterra Equation." *Journal of Mathematical Biology* 27: 259 – 272.
- [37] Geest, T., L. F. Olsen, C. G. Steinmetz, R. Larter, and W. M. Schaffer. 1993. "Nonlinear Analyses of Periodic and Chaotic Time Series From the Peroxidase Oxidase Reaction." *Journal of Physical Chemistry* 97: 8431 – 8441.
- [38] Gilpin, M. E. 1979. "Spiral Chaos in a Predator-Prey Model." *The American Naturalist* 113: 306 – 308.
- [39] Glass, L., M. R. Guevara, A. Shrier, and R. Perez. 1983. "Bifurcation and Chaos in a Periodically Stimulated Cardiac Oscillator." *Physica D* 7: 89 – 101.
- [40] Glass, L., and P. Hunter. 1990. "There Is a Theory of Heart." *Physica D* 43: 1 – 16.
- [41] Glass, L., and C. P. Malta. 1990. "Chaos in Multi-looped Negative Feedback Systems." *Journal of Theoretical Biology* 145: 217 – 223.
- [42] Glass, L., and W. Z. Zeng. 1990. "Complex Bifurcations and Chaos in Simple Theoretical Models of Cardiac Oscillations." *Annals of the New York Academy of Sciences* 519: 316 – 327.
- [43] Grassberger, P., and I. Procaccia. 1983. "Characterization of Strange Attractors." *Physical Review Letter* 50: 346 – 349.

- [44] Grebogi, C., B. Ott, and J. A. Yorke. 1983. "Crises, Sudden Changes in Strange Attractors, and Transient Chaos" *Physica D*7: 181 – 200.
- [45] Guevara, M. R., L. Glass, and A. Shrier. 1981. "Phase Locking, Period-doubling Bifurcations, and Irregular Dynamics in Periodically Stimulated Cardiac Cells." *Science* 214: 1350 – 1353.
- [46] Gillenberg, M., G. S. Soderbacka, and S. Ericsson. 1993. "Does Migration Stabilize Local Population Dynamics? Analysis of a Discrete Metapopulation Model." *Mathematical Biosciences* 118: 25 – 49.
- [47] Hanski, I., P. Turchin, E. Korpimäki, and H. Henttonen. 1993 "Population Oscillations of Boreal Rodents: Regulation by Mustelid Predators Leads to Chaos..." *Nature* 364: 232 – 235.
- [48] Hassell, M. P., J. H. Lawton, and R. M. May. 1976. "Patterns of Dynamical Behavior in Single-species Populations." *Journal of Animal Ecology* 45: 471 – 486.
- [49] Hastings, A. 1993. "Complex Interactions between Dispersal and Dynamics: Lessons from Coupled Logistic Equations." *Ecology* 74: 1362 – 1372.
- [50] Hastings, A., and T. Powell. 1991. "Chaos in a Three-species Food Chain." *Ecology* 72: 896 – 903.
- [51] Hayashi, H., and S. Ishizuka. 1992. "Chaotic Nature of Bursting Discharges in the *Onchidium* Pacemaker Neuron." *Journal of Theoretical Biology* 156: 269 – 291.
- [52] Hayashi, H., S. Ishizuka, and K. Hirakawa, 1985. "Chaotic Response of the pacemaker Neuron." *Journal of the Physical Society of Japan* 54: 2337 – 2346.
- [53] Hayashi, H., S. Ishizuka, M. Ohta, and K. Hirakawa. 1982 "Chaotic Behavior in the *Onchidium* Giant Neuron under Sinusoidal Stimulation." *Physics Letter A* 88: 435 – 438.
- [54] Hedrich, A. W. 1933. "Monthly Estimates of the Child Population 'Susceptible' to Measles. 1900 – 1931. Baltimore. Md." *American Journal of Hygiene* 17: 613 – 636.
- [55] van der Heiden, U., and M. C. Mackey. 1987. "Mixed Feedback: A Paradigm for Regular and Irregular Oscillations." pp. 30 – 46. In I. Rensing, U. van der Heiden, and M. C. Mackey, eds *Temporal Disorder in Hu-*

man Oscillatory Systems (Springer-Verlag, Berlin).

- [56] Holden, A. V., and M. J. Lab. 1990. "Chaotic Behavior in Excitable Systems." *Annals of the New York Academy of Sciences* 591: 303 – 315.
- [57] Holling, C. S. 1959. "Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism." *Canadian Entomologist* 94: 385 – 395.
- [58] Iragui, V. J., and C. B. McCutchen. 1991. "Self-Abatement of Simple Partial Epileptic Seizures." *European Neurology* 31: 21 – 22.
- [59] Kaneko, K. 1983. "Transition from Torus to Noise Accompanied by Frequency Lockings with Symmetry Breaking." *Progress of Theoretical Physics* 69: 1427 – 1442.
- [60] Kaneko, K. 1993. "The Coupled Map Lattice: Introduction, Phenomenology, Lapunov Analysis, Thermodynamics and Applications." pp. 1 – 49. In K. Kaneko, ed. *Theory and Applications of Coupled Map Lattices* (Wiley, Chichester).
- [61] Kantz, H., and P. Grassberger, 1985. "Repellers, Semi-attractors, and Long-lived Chaotic Transients." *Physica D* 17: 75 – 86.
- [62] Keller, B. L., 1985. "Reproductive Patterns." pp. 725 – 778. In R. H. Tamarin, ed. *Biology of New World Microtus* (The American Society of Mammalogists, Shippenburg, PA).
- [63] Kendall, B. E., and G. F. Fox. 1995. "The Impact of Spatial Structure on Population Dynamics; Analysis of the Coupled Logistic Map." preprint.
- [64] Kendall, B. E., W. M. Schaffer, and C. W. Tidd, 1993. "Transient Periodicity in Chaos." *Physics Letters A* 177: 13 – 20.
- [65] Lebrun, P., and I. Atwater, 1985. "Chaotic and Irregular Bursting Electrical Activity in Mouse Pancreatic B-cells." *Biophysical Journal* 48: 529 – 531.
- [66] Lefebvre, J. H., D. A. Goodings, M. V. Kamath, and E. L. Fallen. 1993. "Predictability of Normal Heart Rhythms and Deterministic Chaos." *Chaos* 3: 267 – 276.
- [67] Lidicker, W. Z. 1985. "Dispersal," pp. 420 – 454. In R. H. Tamarin, ed. *Biology of New World Microtus* (The American Society of Mammalogists, Shippenburg, PA).
- [68] London, W. P., and J. A. Yorke. 1973. "Recurrent Outbreaks of Measles, Chickenpox and Mumps I. Seasonal Variation in Contact Rates."

American Journal of Epidemiology 98: 453 – 468.

- [69] Lorenz, E. N. 1963. "Deterministic Nonperiodic Flow." *Journal of the Atmospheric Sciences* 20: 130 – 141.
- [70] Lorenz, E. N. 1980. "Noisy Periodicity and Reverse Bifurcation." *Annals of the New York Academy of Sciences* 357: 282 – 291.
- [71] Mackey, M. C. and L. Glass, 1977. "Oscillations and Chaos in Physiological Control Systems." *Science* 197: 287 – 289.
- [72] Markus, M., D. Kuschmitz, and B. Hess. 1984. "Chaotic Dynamics in Yeast Glycolysis under Periodic Substrate Input Flux." *EFBS Letters* 172: 235 – 238.
- [73] Markus, M., D. Kuschmitz, and B. Hess. 1985. "Properties of Strange Attractors in Yeast Glycolysis." *Biophysical Chemistry* 22: 95 – 105.
- [74] May, R. M., 1976. "Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics." *Nature* 261: 459 – 467.
- [75] May, R. M. 1985. "When Two and Two Do Not Make Four: Nonlinear Phenomena in Ecology." *Proceedings of the Royal Society of London* B228: 241 – 266.
- [76] May, R. M., and G. F. Oster. 1976. "Bifurcations and Dynamic Complexity in Simple Ecological Models." *The American Naturalist* 110: 573 – 599.
- [77] Mayer-Kress, G., F. E. Yates, L. Benton, M. Keidel, W. Tirsch, S. J. Poppl and K. Geist, 1988. "Dimensional Analysis of Nonlinear Oscillations in Brain, Heart, and Muscle." *Mathematical Biosciences* 90: 155 – 182.
- [78] McCaffrey, D., S. Ellner, D. W. Nychka, and A. R. Gallant. 1992. "Estimating the Lyapunov Exponent of a Chaotic System with Nonlinear Regression." *Journal of the American Statistical Association* 87: 682 – 695.
- [79] Michaels, D. C., D. R. Chialvo, E. P. Matyas, and J. Jalife. 1989. "Chaotic Activity in a Mathematical Model of the Vagally Driven Sinoatrial Node." *Circulation Research* 65: 1350 – 1360.
- [80] Mpitsos, G. J., H. C. Creech, C. S. Cohan, and M. Mendelson. 1988. "Variability and Chaos: Neurointegrative Principles in Self-organization of Motor Patterns. pp. 162 – 190. In J. A. S. Kelso, A. J. Mandell, and M. F. Shlesinger, eds. *Dynamic Patterns in Complex Systems* (World

Scientific, Singapore).

- [81] Nerenberg, M. A. H., and C. Essex. 1990. "Correlation Dimension and Systematic Geometric Effects." *Physical Review A* 42: 7065 – 7074.
- [82] Nicholson, A. J. 1954. "An Outline of the Dynamics of Animal Populations." *Australian Journal of Zoology* 2: 9 – 65.
- [83] Niedermeyer, E. 1990. *The Epilpsies: Diagnosis and Management* (Urban & Schwarzenberg Balitimore).
- [84] Olsen, L. F. 1983. "An Enzyme Reaction with a Strange Attractor." *Physics Letters A* 94: 454 – 457.
- [85] Olsen, L. F., and H. Degn, 1977. "Chaos in an Enzyme Reaction." *Nature* 267: 177 – 178.
- [86] Olsen, L. F., and W. M. Schaffer. 1990. "Chaos versus Noisy Periodicity: Alternative Hypotheses for Childhood Epidemics." *Science* 249: 499 – 504.
- [87] Olsen, L. F., G. L. Truty, and W. M. Schaffer. 1988. "Oscillations and Chaos in Epidemics: A Nonlinear Dynamic Study of Six Childhood Diseases in Copenhagen, Denmark." *Theoretical Population Biology* 33: 344 – 370.
- [88] Olsen, L. F., K. R. Valeur, T. Gesst, C. W. Tidd, and W. M. Schaffer. 1995. "Predicting Nonuniform Chaotic Attractors in an Enzyme Reaction," pp. 161174. In H. Tong, ed. *Chaos and Forecasting* (World Scientific, Singapore).
- [89] Paulson, G. W. 1963. "Inhibition of Seizures." *Diseases of the Nervous System* 24: 657 – 664.
- [90] Philippi, T. E., M. P. Carpenter, T. J. Case, and M. E. Gilpin. 1987. "Drosophila Population Dynamics: Chaos and Extinction." *Ecology* 68: 154 – 159.
- [91] Pomeau, Y., and P. Manneville. 1980. "Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems." *Communications in Mathematical Physics* 74: 189 – 197.
- [92] Prichard, J. W. 1980. "Phenobarbitol: Proposed Mechanisms of Antiepileptic Action." pp. 553 – 562. In G. H. Glaser, J. K. Penry, and D. M. Woodbury, eds. *Antiepileptic Drugs: Mechanisms of Action* (Raven, New York).

- [93] Pritchard, W. S., and D. W. Duke. 1992. "Dimensional Analysis of No-task Human EEG Using the Grassberger - procaccia Method." *Psychophysiology* 29: 182 - 192.
- [94] Rajna, P., and C. Loma. 1989. "Sensory Stimulation for Inhibition of Epileptic Seizures." *Epilepsia* 30: 168 - 174.
- [95] Rand, D. A., and H. Wilson. 1991. "Chaotic Stochasticity." *Proceedings of the Royal Society of London* B246: 179 - 184.
- [96] Rapp, P. E., I. D. Zimmerman, A. M. Albano, G. C. deGuzman, and N. N. Greenbaum. 1985. "Dynamics of Spontaneous Neural Activity in the Simian Motor Cortex: The Dimension of Chaotic Neurons." *Physics Letters* A110: 335 - 338.
- [97] Ravelli, F., and R. Antolini. 1992. "Complex Dynamics Underlying the Human Eletrocardiogram." *Biological Cybernetics* 67: 57 - 65.
- [98] Ricker, W. E. 1954. "Stock and Recruitment." *Journal of the Fisheries Research Board of Canada* 11: 559 - 623.
- [99] Röschke, J., and J. Aldenhoff. 1991. "The Dimensionality of Human's Electroencephal ogram during Sleep." *Biological Cybernetics* 64: 307 - 313.
- [100] Rössler, O. E. 1976. "An Equation for Continuous Chaos." *Physics Letters* A35: 397 - 298.
- [101] Ruele, D. 1979. "Sensitive Dependence on Initial Conditions and Turbulent Behavior." *Annals of the New York Academy of Sciences* 316: 408 - 416.
- [102] Ruelle, D. 1990. "Deterministic Chaos: The Science and the Fiction." *Proceedings of the Royal Society of London* A427: 241 - 248.
- [103] Samardzija, N., and L. D. Geller. 1988. "Explosive Route to Chaos through a Fractal Torus in a Generalized Lotka - Volterra Model *Bulletin of Mathematical Biology* 50: 465 - 491.
- [104] Schaffer, W. M. 1984. "Stretching and Folding in Lynx Fur Returns: Evidence for a Strange Attractor in Nature?" *The American Naturalist* 124: 798 - 820.
- [105] Schaffer, W. M., B. Kendall, C. W. Tidd, and L. F. Olsen. 1993. "Transient Periodicity and Episodic Predicatability in Biological Dynamics." *IMA Journal of Mathematics Appiled in Medicine and Biology* 10: 227 - 247.
- [106] Schaffer, W. M., and M. Kot. 1985. "Nearly One Dimensional Dynamics

- in an Epidemic." *Journal of Theoretical Biology* 112: 403 – 427.
- [107] Sleeman, B. D. 1988. "Period – doubling Bifurcations Leading to Chaos in Discrete Models of Biology." *IMA Journal of Mathematics Applied in Medicine and Biology* 5: 21 – 31.
- [108] Smith, L. A. 1988. "Intrinsic Limits on Dimension Calculations." *Physics Letters A*133: 283 – 288.
- [109] Speelman, B. T., R. Larter, and R. M. Worth, 1995. "A Dynamical Systems Approach to the Modelling of Epileptic Seizures." preprint (submitted to *Chaos*).
- [110] Sugihara, g., and R. M. May, 1990. "Nonlinear Forecasting as a Way of Distinguishing Chaos from Measurement Error in Time Series." *Nature* 344: 734 – 741.
- [111] Suria, A., and E. K. Killam. 1980. "Carbamazepine." pp. 575. In G. H. Glaser, J. K. Penry, and D. M. Woodbury. eds. *Antiepileptic Drugs; Mechanisms of Action* (Raven, New York)
- [112] Symonds, C. 1970. *Studies in Neurology* (Oxford University Press, London).
- [113] Taitt, M. J., and C. J. Krebs. 1985. "Population Dynamics and Cycles." pp. 567620. In R. H. Tamarin, ed. *Biology of New World Microtus*. (The American Society of Mammalogists, Shippenburg, PA).
- [114] Takens, F. 1981. "Detecting Strange Attractors in Turbulence." pp. 366381. In D. A. Rand and I. S. Young. eds. *Dynamical Systems and Turbulence* (Springer Verlag, Berlin).
- [115] Tamarin, R. H. 1977a. "Demography of the Beach Vole (*Microtus breweri*) and the Meadow Vole (*Microtus pennsylvanicus*) in Southeastern Massachusetts." *Ecology* 58: 1310 – 1321.
- [116] Tamarin, R. H. 1977b "Reproduction in the Island Beach Vole, *Microtus breweri*, and the Mainland Meadow Vole, *Microtus pennsylvanicus*, in Southeastern Massachusetts *Journal of Mammalogy* 58: 536 – 548.
- [117] Taylor, A. D. 1990 "Metapopulations, Dispersal, and Predator Prey Dynamics: An Overview." *Ecology* 71: 429 – 433.
- [118] Theiler, J. 1986. "Spurious Dimension from Correlation Algorithms Applied to Limited Time – series Data". *Physical Review A*34: 2427 – 2432.

- [119] Theiler, J. 1990. "Statistical Precision of Dimension Estimators." *Physical Review A* 41: 3038 - 3051.
- [120] Thomas, W. R., M. J. Pomerantz, and M. E. Gilpin. 1980. "Chaos, Asymmetric Growth and Group Selection for Dynamical Stability." *Ecology* 61: 1312 - 1320.
- [121] Turchin, P. 1993. "Chaos and Stability in Rodent Population Dynamics: Evidence from Nonlinear Timeseries Analysis." *Oikos* 68: 167 - 172.
- [122] Wales, D. J. 1991. "Calculating the Rate of Loss of Information from Chaotic Time Series by Forecasting." *Nature* 350: 485 - 488.
- [123] Witteman, G. J., A. Redfearn, and S. L. Pimm. 1990. "The Extent of Complex Population Changes in Nature." *Evolutionary Ecology* 4: 173 - 183.
- [124] Wolf, A. J. B. Swift, H. LL. Swinney, and J. A. Vastano. 1985. "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series" *Physica D* 16: 285 - 317.
- [125] Woodbury, D. M. 1980. "Phenytoin: Proposed Mechanisms of Anticonvulsant Action." pp. 447 - 471. In G. H. Glaser, J. K. Penry, and D. M. Woodbury, eds. *Antiepileptic Drugs: Mechanisms of Action* (Raven, New York).
- [126] Yamamoto, Y., R. I. Hughson, J. R. Sutton, C. S. Houston, A. Cymmerman, E. L. Fallen, and M. V. Kamath. 1993. "Operation Everest II: An Indication of Chaos in Human Heart Rate Variability at Simulated Extreme Altitude." *Biological Cybernetics* 69: 205 - 212.
- [127] Yorke, J. A. and W. P. London. 1973. "Recurrent Outbreaks of Measles, Chickenpox and Mumps II. Systematic Differences in Contact Rates and Stochastic Effects." *American Journal of Epidemiology* 98: 469 - 482.
- [128] Zbilut, J. P. G. Mayer - Kress, and K. Geist. 1988. "Dimensional Analysis of Heart Rate Variability in Heart Transplant Recipients." *Mathematical Biosciences* 90: 49 - 70.

附录：在生物学数据中发现混沌的困难

为了确定一个实验系统是混沌的，最常用的技术是采用 Takens (1981)

的方法，从标量时间序列来重建一个假定的吸引子。各种动力学的不变因子，经常是相关维数和主要的李亚普诺夫指数（Eckmann 和 Ruelle 1985），可从重建的吸引子估算出来。通常用于从时间序列估算这些量的算法（Grassberger 和 Procaccia 1983；Wolf 等 1985）需要足够的点以覆盖具有合理密度的假定吸引子，它是一个典型的大数目。因为很多生物学系统计算起来是按几个月或几年为时间标准，很少有数据组能长得足以使这些方法可靠地工作。只有生理学是例外，生理学的时间分段常用几分钟或几秒钟（这说明至少是部分说明生理学研究的优势）；但这里通常有不稳定的问题。除非试验对象在熟睡时（或是离体状态下的细胞培养物）；生理活动经常受环境因子变化的影响（包括试验对象的移动）；这些能造成简单时间序列的扰动或实际上使系统转换到不同的参数体系。尽管系统对这些扰动的反应本身相当重要，但最后结果是很难获得足够长以分析混沌现象的任一特定状态而不受扰动的数据。

更为新近鉴别混沌的技术，包括适合高级的非线性随机模型（Ellner 等，1991；McCaffrey 等，1992），以及应用于数据时，不同的非线性预测算法的预测精确度的许多解释（Farmer and Sidorowich 1987；Sugihara 和 May 1990；Wales 1991）。这些方法认为可能只需要较短的数据组，而不是像原有方法那样需要较多的数据组。而且他们能直接提出非线性和噪声之间的相互作用。然而这些方法仍然处于发展的较早阶段，对它们的局限性和偏差还没有充分的了解。

所有这些方法在低维系统中使用得最好。尚无一种既定的理由来使人相信大多数的生物学吸引子都是低维的：毕竟状态变量的数目常常很大。例如，致力于计算脑电活动的相关维数通常产生八或大于八的值（Basar 1990）。这样量值的维数大大地增加了有限样品大小的难度，因为精确确定动力学所需的数据量随同维数迅速增加（Theiler 1986, 1990；Destexhe 等，1988；Smith 1988；Nerenberg 和 Essex 1990）。例如 Ruelle（1990）提出用 Grassberger Procaccia 算法（Grassberger Procaccia algorithm）计算维数，我们应把 $2 \log_{10} N$ 或更大的阶的任何结果看成是谬误的， N 表示数据点的数目。另一烦人的效果是，经常混乱的生物学数据不一致（Geest 等，1993；Olsen 等，1995）；吸引子的有些部分（通常是对了解动力学特性最富信息的部分）却很少见到。再说一遍，要适于重建动力学还需要大量的数据点。

Leon Glass

摘 要

在生理系统及其数学模型中，人们已经观察到了包含混沌和各种周期性转变中的复杂动力学。典型系统中的结果可能有助于解释非标准经典动力学所表征的动态疾病的机制。

这些观察资料对于医学实践、医学研究的积累以及医务工作者和基础研究科学家的培养，都具有潜在的重大意义。

一、引言——混沌与动态疾病

“混沌”这个词引起适用于描述许多医学现象的形象化描绘，现分析如下。

震颤性综合病症的病理生理学是一种有组织的混沌研究，这种混沌首先由重要机体的破坏所引起，并在恢复过程中按某种非稳定基础重新组织。在心脏病中可以发现一种富有启发性的类推，心脏病中常被耽搁很久的血液循环失调与震颤性综合病症具有某些相似之处（McKenzie^[1]）。

心律混乱这个术语专用于表示某种不规则的心动，这种心律是由常见的心脏起端多尖的过早收缩引起的，通常独自发生或短促突然发作，尤其当异位病灶不仅局限于心室或心耳而且来自两

心室或房室结时，更易出现这种心动。这种情况的重大意义在于它总是作为纤维性颤动病症的预兆，而且经常是突然心脏病死亡的前奏曲（Katz^[2]）。

纤维性颤动可以定义为混乱的、异步的、分成几部分的心脏活动（Moe 等^[3]）。

“混沌”这个术语的上述用法相当于一种普通语言，而不是混沌的技术定义。混沌的通常定义是：完全无次序、无顺序、无组织或不可预报的绝对混乱的状态。这个定义与 1975 年由 Li 和 Yorke^[4]引入的混沌术语的现代技术用法明显相反。在现代技术用法中，混沌是指确定系统中的非周期动态，而该系统中存在对初始条件的敏感依赖性。因此，在混沌的技术定义中具有一个确定动力学行为的明确定律。然而，该定律使这种动力学可能是非周期的、貌似杂乱的。

几年前，Michael Mackey 和我提出：不规则的生理节奏可能与确定性混沌有关^[5,6]。我们提议：由不正常节奏所表征的许多疾病可能与生理系统动力学数学模型的质变有关。我们指出：体现非线性反馈控制和时间延迟的简单方程显示了宽广的行为范围，包括参数改变时（分叉）节奏的复杂变化及混沌动力学。在数学模型中观察到的节奏相似于呼吸系统和造血控制系统中观察到的不规则节奏。我们还提出：“动态疾病”这个术语适合于描述不规则动力学所表征的医学紊乱，该紊乱与产生及调节生理节奏的控制系统中的不规则性有关。不规则的混乱节奏可能相应于疾病或相应于正常生理波动^[7,8]。

根据适合于非线性数学模型的动力学，通过系统地阐述生理控制方面的问题，“动态疾病”的概念给医学动力学的研究增添了新的内容。数学可能有助于疾病的分类和新疗法的进展。

这些观察资料留下的悬而未决的问题是如何识别特定生理系统的混沌动力学。在第 2 节，我简单概述了观察混沌动态的实验系统，并对医学应用中的混沌动力学的观察结果进行了分类排列。在第 3 节，关于复杂心律不齐与心率易变的研究方面，我讨

论了非线性动力学被很好开发的一个可能领域，并表明了该理论对于内科学的可能应用。最后，在第4节，我讨论了混沌动力学的较宽含义。因为心病学方面的非线性动力学的应用正在扎实地进行着，并具有潜在的重大意义，所以我主要集中讨论这个领域。对于发表本文的会议录的其他文献是考虑了与神经系统和精神病学有关的问题。

二、关于生理实验和内科学方面的混沌

对于生理系统的确定性混沌动力学，根据自发振动系统或易激励系统的周期刺激作用，我们能得到最清楚的论证。我总结了一套实验结果，这些结果是我们研究小组在蒙特利尔获得的，并简单涉及其他几个系统，它们中的有关现象已被观察到。最后，我提到了一些声称已观察到混沌动态的其他系统。

生理系统混沌动力学的一项实验论证来自 Guevara、Shrier 和我自己的工作^[9~11]。这项工作是观察周期性电刺激对胚胎小鸡心脏细胞自发跳动群的影响。在这项实验准备中，不同频率和振幅的各种周期性刺激导致不同种类的周期和非周期动态。例如，当刺激频率增加时，这种动态从节奏 1:1 变化到节奏 $N:M$ ，在节奏 1:1 中，对于每次刺激都有一次挛缩或一个动作电位，在节奏 $N:M$ 中，对于 N 次刺激有 M 个动作电位。

这项实验研究的主要目的之一是要确定在大的频率和振幅范围内所发现的行为。在宽的刺激频率和振幅范围内存在一个 1:1 节奏；在较窄范围内，已发现了其他节奏，例如 2:1 和 1:2；在比较窄的刺激变化范围内，存在 2:2 节奏和 4:4 节奏，对前者来说，在一个周期的两相之间出现了刺激相位的交替，对后者来说，在返回到刺激的初值之前，其相位在四个不同值之间变化。此外，还有不规则的节奏。产生非周期节奏序列是通向混沌的周期倍增途径的一个例子，这已由 Feigenbaum 和其他研究者详细研究过^[12]。我们研究小组采用模拟实验系统的一维有限差分方程所进行的广泛理论研究，已论证了周期性和非周期性节奏，理论

研究与实验观察到的结果具有很好的一致性。因此，我们把该系统中不规则的动态与确定性混沌联系起来。虽然这项工作是在组织培养基内进行的，但实际上，已观察到的所有现象与临床观察到的心脏心律不齐至少表面上相似，可作为临床研究的基础^[11]。

Aihara^[13]、Hayashi^[14]、Chialvo^[15]及其合作者已经完成了确定性混沌的其他论证，这种混沌是由振荡的、易激励的生物组织的周期刺激而产生的。这些研究者的大多数都成功地开发了说明某些参数范围内混沌动态外表的理论模型，而且其他参数范围内的周期性动态与该理论模型具有很好的一致性。

除了这些很好控制的生理标本外，还要求观察许多其他系统的确定性混沌。研究者们已采用了度量方法，例如，维数、Lyapunov 数、功率谱、熵，或对这些测量作了各种修正，以便对这种动力学的“复杂性”进行评估，而且宣称在某些情况下已观察到的实验数据中存在确定性混沌，例如，最近发表的论文集中包含了关于神经、心病或其他系统中混沌动力学的几项主张^[16,17]。

虽然对表示复杂节奏特性的新颖方法进行估价是合情合理的、有趣的工作，但在我看来，所采用的这些统计度量方法还不足以精练到认定确定性混沌。例如，一个正的 Lyapunov 数（与相空间中邻近轨线的分离相联系）能用来解释微分方程这种系统的混沌，在这种微分方程中人们已经知道存在确定性动力学^[18]。然而，不可能用一个正的 Lyapunov 数来解释可以包含随机关系的系统中的确定性混沌。当人们处理生命系统中自发产生的节奏时，像不可控制的环境波动这样的影响可能起重要作用。我觉得采取怀疑态度是十分必要的，而且人们必须谨防各式各样的断言，例如，“正常心率的变化就是混沌”或“脑电图就是混沌”。目前作出这样的断言还没有充分的资料。

三、心病学中的非线性动力学

为了把这些想法形成一个具体观点，我分析了心脏节奏的复

杂波动。理解这样的波动是一个重要的医学问题，这是因为突然心脏病死亡是最突出的健康问题。通过考虑因冠状动脉阻塞所致的心肌梗死（心脏病）病人，我用例子阐明了一些有趣的医学理论争端。虽然许多病人在心脏病后康复，但有些病人不能康复，冒着伴发病的风险而试图鉴别这两者，以便能尝试较先进的疗法，这正是内科医师要解决的问题。直到现在，对病人的评价还没有采用非线性动力学方法，而是相当多地依赖以临床经验和流行病学研究为基础的各种测量，并以此对突然心脏病死亡的危险进行估价。我讨论了3个独立的问题：（1）心律不齐的非线性动力学；（2）复杂心律不齐与突然心脏病死亡；（3）心率易变性与突然心脏病死亡。

A. 心律不齐的非线性动力学

60多年以前，科学研究就强调非线性动力学与心脏心律不齐的联系。由非线性耦合振荡器产生的节奏类似于在未受损心脏中观察到的节奏^[19]。虽然曾经对心律不齐的数学描述有兴趣（例如，参见最近两本论文集^[20,21]），但目前大多数研究是由训练不足和缺乏数学兴趣的人员进行的。这里，我简单提及有关心律不齐的非线性动力学的理论工作，这与阐述复杂心律不齐和突然心脏病死亡的联系有关^[22]。

正常心脏节律（窦性节律）是由心房中的心房结调节的，心房结起整律器的作用。有大量不同的非正常心律不齐，其中许多是良性的而不危及病人的生命。然而，正如我们都知道，心脏心律不齐也可能威胁生命。心室的心搏过速起源于心室的快节奏，它总被认为是危险的，而心室的纤维性颤动则被认为是与心肌中兴奋的无序扩散有关的节奏，它在发作的几分钟内总是致命的。心跳的常见不规则之一是出现过早心室收缩（PVC），它是由位于心室的病灶产生的。虽然过早心室收缩通常是良性的，但临床流行病学研究已经证明，它对突然心脏病死亡具有越来越大的影响。在常见过早心室收缩的心肌梗死病人中，通常认为是由致命

的心室心搏过速或纤维性颤动的影响所造成的^[22]。过早心室收缩、心室心搏过速、心室纤维性颤动的机制的理论分析一直在产生新的成果。在讨论了本节剩余部分的一些工作后，我返回到下节的临床问题。

对于过早心室收缩，虽有许多可能的机制，但一种称为舒缩间期过长的特殊机制导致了惊人的理论预见，而且已成为广泛分析的主题^[23~26]。当舒缩间期过长时，采用一个异位整律器，以便控制心脏获得窦性节奏。一般来说，每个心脏的复杂性取决于窦或舒缩间期过长的整律器，而且根据心电图的不同形态容易识别。假设窦和异位率不变，而且麻木时间（心脏在两次兴奋之间的时间间隔）不变，那么一般来说，出现的动态是“准周期”节奏的例子，关于这种动态，人们能作出许多理论预告^[25,26]。考虑介于异位心跳之间窦性心跳数的整数序列，该序列中仅有三个数，这三个数中只有一个是奇数，而且两个较小数的和小于最大的数。这一出人意料的结果是数学直接应用于发生心律不齐的假设模型。这个结果是对区分心律不齐类别的传统心电图方法的补充，对于某些出现常见过早心室收缩的病人，它也能用来预报临床观察到的节奏。最近，Castellanos 和同事们进一步证实这些规律能应用于某些显示常见异位的病人^[27]。然而，当我诊察显示常见异位病人的心电图时，只有比较小的百分比，约 10%，似乎显示与舒缩间期过长一致的动态。这表明存在一些其他机制，这些机制也能构成过早心室收缩外表的基础（例如见^[28]），但产生节奏的动态现在还未被很好理解。

除了孤立的过早心室收缩的理论分析外，对于重新进入的心脏心律不齐的建立和动态，还有大量的理论和实验工作，在这种重新进入的心律不齐中，某一兴奋波在心肌中具有一条兴奋的迂回轨迹。一般认为，这种重新进入的兴奋是心搏过速和心律不齐的生理基础。起初的分析提出：对于重新进入兴奋的建立，心肌的异质性是必要的^[29]。然而，由 Winfree 和其他研究者进行的理论分析（更多的述评见^[30]）已经证明，重新进入的兴奋也能产

生于空间同质组织，而且已提出了导致这种节奏的新疗法，这就引起了对这些预言的随后实验证实^[31]。在生物科学上，理论和实验的这种紧密结合是罕见的，这也是非线性动力学与医学问题有关的明显证明。当前研究的目标是理解心搏过速和纤维性颤动的突然发作与动态^[20,21,30~32]。心室纤维性颤动是否反映确定性混沌，这个问题已成为与不同结论争论的主题^[33~35]。虽然阐明这些心律不齐的机制是一个基础科学问题，但内科医师面临一个更实际的问题：谁愿冒突然心脏病死亡的风险？什么干预是可能的？现在我转向这个问题。

B. 复杂心律不齐与突然心脏病死亡

如果回忆本文开头 Katz 的引文，我们知道，在心肌梗死（心脏病）后，常见的过早心室收缩与日益增加的突然心脏病死亡风险有关^[22]。同样真实的是：即使没有疾病的影响和惊恐的原因，许多人仍会出现过早心室收缩。尽管已观察到的过早心室收缩通常是良性的，但心律不齐与日益增加的突然心脏病死亡风险的联系，促使内科医师们努力开发以某种假设为基础的新疗法，这种假设是：心肌梗死后过早心室收缩数的减小将降低突然心脏病死亡的风险。为了检验该假设，心脏心律不齐抑制试验（CAST）是开始于 1987 年的一个大临床试验（1500 个病人）^[36,37]。CAST 课题所包含的判断标准是：病人患了心肌梗死、出现常见异位而且对抗心律不齐的药物敏感。在这个试验中，双目失明的病人被随机分配到各个小组，他们分别得到安慰剂或抗心律不齐的药，以便减小异位心跳的发生率。据麻省总医院的 Ruskin 说，该试验结果“使大多数观察者震惊”^[38]。受到药物疗法的病人比未受药物疗法的病人有高得多的死亡率，这导致了该试验的过早中断，对于具有常见异位的心肌梗死病人，不应建议他们采用已检验过的心律不齐药疗法。

为了对病人（例如在 CAST 中登记过的病人）的复杂心律不齐进行分类，非线性动力学可以提供新的方法。大家记得，前面

讨论过的舒缩间期过长的机制仅能解释出现常见异位的一小部分病人。因此，为了对可能产生常见异位的许多生理机制进行分类，仅仅计算单位时间内异位心跳数显然是不够的。

我认为：为了对患有常见异位的病人提供更好的诊断，必须具有比目前所用的心电图方法精细得多的分类，这是未来研究的一个领域。

C. 心率易变性与突然心脏病死亡

对非线性动力学应用于医学有兴趣的其他研究小组，一直在集中寻求使突然心脏病死亡病症减轻的另一种方法。正常心率显示相当大的波动，但这种波动源和控制波动源的机制仍未被很好理解。调节心率波动的因素主要是交感神经系统、副交感神经系统、荷尔蒙系统（例如肾酵素——血管紧缩素系统）及各种各样的其他反馈控制^[39,41]。目前，使心率易变的详细机制还不清楚。然而，有些证据表明：心率波动对突然心脏病死亡的发生可以提供线索。例如，1987年 Kleiger 和同事们发现：心率易变的降低与心肌梗死后死亡率的增加有关^[42]。

这些观察资料可能与混沌的发生有关。几年前，我们研究小组的一篇文章提出：正常生理波动可能是混沌的^[7]。最近，Goldberger 及其同事强调指出：正常心率波动是极不规则的，而且提出：正常心率易变显示了确定性混沌^[43,44]。基于这一假设，当前正在研究突然心脏病死亡高危病人的窦性心率波动，在该项研究中，从混沌动力学研究所引入的测量方法正被用来分析窦性心率易变。例如，得克萨斯州的 Skinner 研究小组的初步结果使突然心脏病死亡的高危险与低“维”一致^[45]。目前，评价这些断言的困难之一是：用来处理临床实验数据的算法是专有资料，这意味着希望研究这些断言效验的其他研究者不能对该算法进行评论性的审查。

尽管这些困难和怀疑的态度，为了利用由非线性动力学推出的方法，我觉得科研人员仍须继续风险研究小组的现行分类，显

然，目前我们仅理解了发生于人体心脏的复杂节奏的很小部分。

四、概要与结论

动态疾病的概念为医学动力学的研究提供了一个新的前景。因为已被改变的动态可能与生理控制系统的分叉有关，所以研究产生这种改变动态的因素、开发生理系统的理论和实验模型是有趣的，治疗方法可以从使控制系统回复到正常参数范围和正常动态开始着手。然而，CAST研究的结果表明：仅仅重新建立更正常的动力学不一定导致更好的预测。

因为分析实际临床数据存在困难，所以简单的理论和实验模型的研究在未来进展中将起重要作用。在这些简单系统中，确定性混沌和复杂分叉现已有许多资料证明，然而，我们必须谨慎对待这样的断言：确定性混沌已在神志清醒者的脑电图或心电图中心中验明。

无论这样的数据是否确实显示确定性混沌，由非线性动力学所提出的复杂节奏的定量测量，将为分析复杂医学动力学提供一个有用的办法。初步的研究表明：利用非线性动力学推导出的方法所进行的心率波动分析能识别突然心脏病死亡的高危病人。为了阐明数学和病理生理学，需要进行系统的交叉学科研究。

总之，非线性动力学和混沌对医学可能具有重大影响，但需要更基础和更实用的研究。为了进行这样的研究，基础研究的科学家、医师和数学家之间必须密切合作。使人遗憾的是，目前要形成这种密切合作的研究还不是一件简单的事情，这是因为各种学科具有充分限定的边界，对于交叉学科的资助，资金管理机构经常持保守的态度，这常常阻碍了研究工作。如果数学家的生物学知识得到提高，而且医师的数学知识也得到提高，那么他们之间的合作将最富有成效。因此，在激活各分散学科的狭窄性和局限性方面以及在激励研究生命节奏的新方法方面，我预见到混沌对医学的又一次冲击。

致 谢

我感谢加拿大自然科学与工程研究委员会以及心脏与脉搏基金会的连续资助。

参 考 文 献

- [1] McKenzie, I. 1927. "Epidemic Encephalitis. I. Epidemiological Considerations." *Brit. Med. J.* Sept. 24: 532 - 534.
- [2] Katz, L. N. 1946. *Electrocardiology*, 2nd ed. Lea and Febiger, Philadelphia.
- [3] Moe, G. K., Abildskov, J. A., Han, J. 1964. "Factors Responsible for the Initiation and Maintenance of Ventricular Fibrillation." In: Surawicz B., Pellegrino E. D., eds. *Sudden Cardiac Death*. Grune and Stratton, New York.
- [4] Li, T. Y., Yorke, J. A. 1975. "Period Three Implies Chaos." *Amer. Math. Monthly* 82: 985 - 992.
- [5] Mackey, M. C., Glass, L. 1997. "Oscillation and Chaos in Physiological Control Systems." *Science* 197: 287 - 289.
- [6] Glass, L., Mackey, M. C. 1979. "Pathological Conditions Resulting from Instabilities in Physiological Control Systems." *Ann. N. Y. Acad. Sci.* 316: 214 - 235.
- [7] Guevara, M. R., Glass, L., Mackey, M. C., Shrier, A. 1983. "Chaos in Neurobiology." *IEEE Trans., Syst. Man Cyber.* SMC - 13: 790 - 798.
- [8] Glass, L., Mackey, M. C. 1988. *From Clocks to Chaos: The Rhythms of Life*. Princeton University Press, Princeton.
- [9] Guevara, M. R., Glass, L., Shrier, A. 1981. "Phase-locking, Period-doubling Bifurcations and Irregular Dynamics in Periodically Stimulated Cardiac Cells." *Science* 214: 1350 - 1353.
- [10] Glass, L., Guevara, M. R., Bélair, J., Shrier, A. 1984. "Global Bi-

furcations of a Periodically Forced Biological Oscillator." *Phys. Rev. A* 29: 1348 – 1357.

- [11] Guevara, M. R., Shrier, A., Glass, L. 1990. "Chaotic and Complex Cardiac Rhythms." In: D. P. Zipes, J. Jalife, eds. *Cardiac Physiology: From Cell to Bedside*. W. B. Saunders, Philadelphia, pp. 192 – 201.
- [12] Feigenbaum, M. J. 1978. "Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations." *J. Stat. Phys.* 19: 25 – 52.
- [13] Aihara, K., Matsumoto, G. 1986. "Forced Oscillations and Routes to Chaos in the Hodgkin – Huxley Axons and Squid Giant Axon." In: H. Degn, A. V. Holden, and L. F. Olsen, eds. *Chaos in Biological Systems*. Plenum Press, New York, pp. 121 – 132.
- [14] Hayashi, H., Ishizuka, S. 1986. "Chaos in Molluscan Neuron." In: H. Degn, A. V. Holden, and L. F. Olsen, eds. *Chaos in Biological Systems*. Plenum Press, New York, pp. 157 – 166.
- [15] Chialvo, D., Michaels, M. C., Jalife, J. 1990. "Supernormal Excitability as a Mechanism of Chaotic Dynamics of Activation in Cardiac Purkinje Fibers." *Circ. Res.* 66: 525 – 545.
- [16] Mayer – Kress, G., ed. 1986. *Dimensions and Entropies in Chaotic Systems: Quantification of Complex Behavior*. Springer – Verlag, Berlin.
- [17] Krasner, S., ed. *The Ubiquity of Chaos*. 1990. American Association for the Advancement of Science, Washington, D. C.
- [18] Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., Vastano, J. A. 1985. "Determining Lyapunov Numbers from a Time Series." *Physica* 16D: 285 – 317.
- [19] Van der Pol, B., Van der Mark, J. 1928. "The Heartbeat Considered as a Relaxation Oscillation and an Electronic Model of the Heart." *Phil. Mag.* 6: 763 – 775.
- [20] Jalife, J., ed. 1990. "Mathematical Approaches to Cardiac Arrhythmias." *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, vol. 591.
- [21] Glass, L., Hunter, P. J., McCulloch, A., eds. 1991, *Theory of Heart: Bio – mechanics, Biophysics, and Nonlinear Dynamics of Cardiac Function*. Springer – Verlag, New York.
- [22] Kremers, M. S., Black, W. H., Wells, P. J. 1989. "Sudden Cardiac

- Death: Etiology, Pathogenesis, and Management." *Dis. Mon.* 35: 381 - 481.
- [23] Moe, G. K., Jalife, J., Mueller, W. J., Moe, N. 1977. "A Mathematical Model of Parasystole and its Application to Clinical Arrhythmias." *Circulation* 56: 968 - 979.
- [24] Ikeda, N., Yoshizawa, S., Sato, T. 1983, "Difference Equation Model of Ventricular Parasystole as an Interaction of Pacemakers Based on the Phase Response Curve." *J. Theor. Biol.* 103: 439 - 465.
- [25] Glass, L., Goldberger, A. L., Bélair, J. 1986. "Dynamics of Pure Parasystole." *Am. J. Physiol.* 251: H841 - 847.
- [26] Courtemanche, M., Glass, L., Rosengarten, M. D., Goldberger, A. L. 1989. "Beyond Pure Parasystole: promises and Problems in Modelling Complex Cardiac Arrhythmias." *Am. J. Physiol.* 257: H693 - 706.
- [27] Castellanos, A., Fernandez, P., Moleiro, F., Interian, A., Myerburg, R. J. 1991. "Symmetry, Broken Symmetry and Restored Symmetry of Apparent Pure Ventricular Parasystole." *Am. J. Cardiol.* 68: 256 - 259.
- [28] Antzelevitch, C., Bernstein, M. J., Feldman, H. N., Moe, G. K. 1983. "Parasystole, Reentry, and Tachycardia: A canine Preparation of Cardiac Arrhythmias Occurring across Inexcitable Segments of Tissue." *Circulation* 68: 1101 - 1115.
- [29] Moe, G. K., Rheinboldt, W. C., Abildskov, J. A. 1964, "A Computer Model of Atrial Fibrillation." *Am. Heart J.* 67: 200 - 202.
- [30] Winfree, A. T. 1990. "Vortex Action Potentials in Normal Ventricular Muscle." *Ann. N. Y. Acad. Sci.* 91: 190 - 207.
- [31] Ideker, R. E., Frazier, D. W., Krassowska, W. et al. 1990. "Experimental Evidence for Autowaves in the Heart." *Ann. N. Y. Acad. Sci.* 591: 208 - 218.
- [32] Ito, H., Glass, L. 1991. "Spiral Breakup in a New Model of Discrete Excitable Media." *Phys. Rev. Lett.* 66: 671 - 674.
- [33] Goldberger, A. L., Bhargava, V., West, B. J. 1986, Mandell A. J. "Some Observations on the Question: Is ventricular Fibrillation Chaos?" *Physica D* 19: 282 - 289.
- [34] Evans, S. J., Khan, S. S., Garfinkel, A., Kass, R. M. et al.

1989. "Is Ventricular Fibrillation Random or Chaotic?" *Circulation Suppl.* 280: 538 (abstract).
- [35] Kaplan, D., Choe, R. J. 1990. "Is Fibrillation Chaos?" *Circ. Res.* 67: 886 - 892.
- [36] CAST Investigators. 1989. "Preliminary Report: Effect of Encainide and Flecaïnide on Mortality in a Randomized Trial of Arrhythmia Suppression after Myocardial Infarction." *N. Engl. J. Med.* 321: 406 - 413.
- [37] Echt, D. S., Liebson, P. R., Mitchell, L. B. et al. 1991, "Mortality and Morbidity in Patients Receiving Encainide, Flecaïnide, or Placebo: The Cardiac Arrhythmia Suppression Trial." *N. Engl. J. Med.* 324: 781 - 788.
- [38] Ruskin, J. N. 1989. "The Cardiac Arrhythmia Suppression Trial (CAST)." *N. Engl. J. Med.* 321: 386 - 388.
- [39] Guyton, A. C. 1981. *Textbook of Medical Physiology*, 6th ed. W. B. Saunders, Philadelphia, chapter 21.
- [40] Kitney, R. I. Rompelman, O. eds. *The Study of Heart Rate Variability*, Clarendon, Oxford, 1981.
- [41] Akselrod, S., Gordon, D., Ubel, A., Shannon, D. C. et al. 1981. "Power Spectrum Analysis of Heart - rate Fluctuation: A Quantitative Probe of Beat - to - Beat Variability." *Science* 213: 220 - 222.
- [42] Kleiger, R. E. Miller, J. P., Bigger, J. T. et al. 1987. "Decreased Heart Rate Variability and Its Association with Increased Mortality after Acute Myocardial Infarction." *Am. J. Cardiol.* 59: 256 - 262.
- [43] Goldberger, A. L., Rigney, D. R., West, B. J. 1990. "Fractals and Chaos in Human Physiology." *Scientific American*: February, 43 - 49.
- [44] Skinner, J. E., Goldberger, A. L., Mayer - Kress, G., Ideker, R. E. 1990. "Chaos in the Heart: Implications for Clinical Cardiology." *Biotechnology* 8: 1018 - 1024.
- [45] Skinner, J. E., Pratt, C. M., Vybiral, T. 1991. "A New Predictor of Sudden Cardiac Death: Low - dimensional Chaos in Heartbeat Intervals," preprint.

A Speranza

一、引言

我想对这个问题的论述最好从标题的反面开始，即讨论气象学对混沌的影响。事实上，在混沌理论开拓发展的年代，气象学所作的贡献比他得到的还要多。只要提到 Lorenz 的工作，他本身就可以说明这个论断是合理的。因此详细考察气象学对非线性现象的历史发展是很有意义的。

大气运动方程组提出了众所周知的流体动力学数学难题。由于复杂的地形和地球的旋转，还伴有太阳辐射作用下的复杂的化学和热力学。对理论气象学家来说，非线性在确定大气环流性质中的核心作用早已显然，尽管直到现在处理非线性问题所必要的数学和技术装备还不完备。在 20 世纪 20 年代 Richardson 已经提出一种天气预报的“数值”方程，并且应用这种方法到特殊的天气事件中。不幸的是由于当时一些数学工具还不具备，如数值稳定性的 Levi 判据和一些技术装备，特别是还没有足够强有力的计算机，Richardson 的失败给有利于天气预报的定量分析方法投下了阴影，从而促使了模拟预报方法的发展。事实上，对科学的天气预报的冷嘲热讽态度一直延续到最近（某些地方现在还有！）。可是，后来的工作表明 Richardson 的理论方法基本上是正确的。

仅仅在二次大战后使用了 ENIAC 计算机（由 J. Von Neumann 完成的原型机）才可能对描述大气运动的一些方程首次作

数值积分。受 Von Neumann 的鼓舞, J. Charney 成功地完成了复杂系统建模与逼近经常要求的两种基本操作:

(a) 简化方程组, 使之可以利用当时能用的计算机进行数值积分, 但又不损失主要的动力学本质 (这是他在以前的理论工作中已确定的)。

(b) 建立了使数值计算得以进行下去的数值 - 数学流程 (包括初始条件和边界条件)。

Charney 的工作基本上属于应用数学。但是他的发现来源于物理的直觉, 不少于数学的洞察。在这种情况下, 他首先能识别物理过程对发展大气的“天气”中的基本作用, 并将运动方程专用于它的描述。所研究的过程是“斜压不稳定”。它可以确定使冷的极地和暖的热带之间进行空气质量交换的温带 (中纬度) 气旋的增长。Charney 知道并能证明斜压不稳定性可以足够好地通过一组方程来模拟, 以 1 天为时间尺度, 以 1000 千米为空间尺度。这个“准地转方程”的推导可以从完全“原始方程组”通过一个过滤的数学过程。用物理术语来表示就是消去小时间尺度上的大气运动。

对这个准地转方程组的仔细解析和数值的研究 (包括数值计算的稳定性、边界条件等) 成功地完成了第一个数值天气预报, Charney 等在经典论文 (1950) 中发布。虽然这个天气预报是基于过于简单化的模型 (所谓“正压的”) 未能描述上面所说的基本过程的斜压不稳定性, 而且数值积分所费的时间长于预报时间 (正如 Charney 本人愉快地指出的)。不过, 可以毫不夸张地说这项工作开创了应用计算机模拟的道路。

此后, 数值方法的理论研究和实际应用 in 气象学上发展非常快。但是, 由于可利用的计算机功能的限制, 不可能同时研究大气运动的复杂的细节及其随时间的动力学演变的复杂性质。事实上, 随着计算机功能的不断增长, 许多气象学家的努力集中于愈来愈详细的短期天气预报。然而, 其他一些气象学家包括 Charney 本人 (参看 Charney 在 Rossby 纪念论文集上发表的论文,

1959) 仍在通过仔细地分析很简单的方程组(低阶模型)探索非线性相互作用的主要特性。原来设想用这些方程来表示大气环流的某些基本性质,但实际上只起了一个实验室的作用。用以获得关于流体流动中非线性所扮演的角色的直观理解。在这方面,绝对卓越的贡献归于 E. N. Lorenz 的工作。作为 Birkhoff 学派的数学家, Lorenz 是二战后期进入气象界的。从此就充分关注动力学系统理论的基本概念。对气象学本身作出基本贡献的同时(例如,参见在大气环流中引进“有效位能”的概念 1955)在非线性分析中迈出有根本意义的几步。特别是,对 Saltzman 首先提出的三个方程(1962)作为流体对流方程的最小 Fourier 截断, Lorenz 能抓住并从数学上描述该确定性方程的非周期性。Lorenz 的 1963 年的文章描述了 Saltzman 方程组的“奇怪吸引子”这篇文章显著地成为既是数学又是物理学历史上最著名的论文之一。它的一个伟大贡献在于阐明了用数值方法证明数学性质在方法论上的有效性。

这里我不能进一步谈论气象学上非线性模拟的历史发展,相反地我将转入更多的技术方面,以便提供比上述两类方法深入一些的描述。其中一类是基于对流动尽可能多地详尽地描述,另一类是研究低阶模型。

二、局部和整体性质

上节所概括的两种方法的区别不仅仅只是计算机资源限制的结果,而且在某种程度上也代表动力学系统理论范畴上的固有的区别:即相空间上的局部和整体的区别。

强非线性的局部(即相空间的小的体积)特征是相应于稍有差别的初始条件的邻近轨迹的发散性。定量上它是用动力学系统本身的线性化矩阵的指数(即特征值——译者注)来刻画的。对于实际的大气和当前用的高维数值预报模型,局部发散性的直接度量是不可行的。然而,从经验的可预报性研究中(在许多可用的数值模型中,是基于“误差增长”的分析),我们能够估计误

差增长到 e 倍的典型时间大约是 3 天，误差饱和的时间大约是一周。对于长时间的确定性可预报性就完全失去了。

如果我们的兴趣在于很长时间的动力学系统的状态，我们必须考虑相空间的整体（涉及大的体积）性质。虽然受整体不变量（如能量和熵）的限制，但是表示大气系统演化的轨道的相空间体积是太大而不能直接研究。然而由于大气是一个耗散系统，相空间的轨迹并不扫描不变量所限制的整个空间，而是保持在较低维数的一个子集上（即“吸引子”）。虽然许多研究者致力于估计大气吸引子的维数问题，但是目前我们没有关于大气吸引子的维数的可靠估计。

事实上，在全球尺度上大气资料的不相关时间大约是 5 天；而在这种分辨率下可利用的记录持续时间小于 50 年。因为对于估计维数所需独立数据以维数为方次增加。所以对于估计大气吸引子的维数的独立资料的数量是不够的，除非大气吸引子的维数异常地小。

确定性的可预报时间的概念导致“天气预报”与“气候模拟”的必然区别。如果我们把天气看成和相空间的局部性质有关（在确定的可预测区域内），那么天气预报本质上与初始条件相联系。相反，气候模拟与初始条件无关，并且意味着对确定的可预测性细节的某种“过滤”。虽然这种概念在一些科学家中许多年来已经清楚，但仍然没有可利用的完整理论。原因就是上面提到的有关大气吸引子的维数的估计问题。这里我们继续分析下去将变得非常困难而且过于专业化。为了便于探索，适当的方式是借助特殊设定的数例，对所遇到的困难给出一些启发。

三、中纬度急流作为一个动力学系统

在非线性理论经典发展年代，动力学系统的性质的详细探索只有对于维数很小的系统才有可能。今天，无论如何，我们能够对付“中等”维数的系统（几十到几百的自由度）。

在这里我们考虑的系统是用 192 个实分量表达大气环流最重

要的特性：中纬度极地附近急流。这个模型（Speranza 和 Malguzzi 1988，Malguzzi 等 1990，Trevisan 1993 都作了广泛的描述与研究）模拟急流的非线性动力学演变。在垂直方向仅分二层，纬度方向有 36 个 Fourier 模态，在经向仅有一个 Fourier 模态迭加在直线的带状急流上。

对所得到的方程组积分，积分时间相当于几十年。这个系统可以模拟典型的中纬度急流与混沌涨落的相互作用。其驱动能量来源于太阳沿纬向加热不同（即实际大气的斜压波）所引起的热反差。事实上，控制系统的混沌范围的外参数（ θ_E ）是平均纬向热反差本身的度量。在适当的无因次单位下， θ_E 为 10 的量级时可以得到地球状的环流。 θ_E 小于大约 4.158 时，这个环流是定常的不动点（即 Hadley 环流）。

图 1 表示对于不同的外参数 θ_E ，流动的第一纬向波分量随时间的演变轨迹。我们能看出从图 1 (a) 稳定的不动点通过 Hopf 分岔到图 1 (c) 的极限环，再到图 1 (f) 的混沌的演变过程。

在某种程度上，分岔的序列可以连续地查明。图 2 是第一波分量的分岔图。当 θ_E 一定值时，将出现形状像地球的环流，而早在达到这个值之前，分岔序列已变得十分复杂。

对于这种实际的 θ_E ，要在相空间区分任何特殊的结构是不可能的，必须借助统计方法。

Lyapunov 指数的估计表明正的指数是几十（以图 3 为例，图上只给出零点几的例——译者注），因此与模型的总的维数相比，吸引子的维数相当高。这个发现似乎不支持在不同文章中关于气候吸引子维数很低的见解，除非由于某些尚待澄清的理由，在流体动力学连续介质的极限情况下，吸引子的维数降低。

这时，可以看到基于混沌理论的数学方法的许多事物，确实对气象学有贡献。在所有不同的可以实现的分析中，最有意义的是相应于相空间轨迹发散的误差增长与饱和。图 4 表明第一个 Lyapunov 指数和误差初始增长率之间的对应关系。沿着这个路径

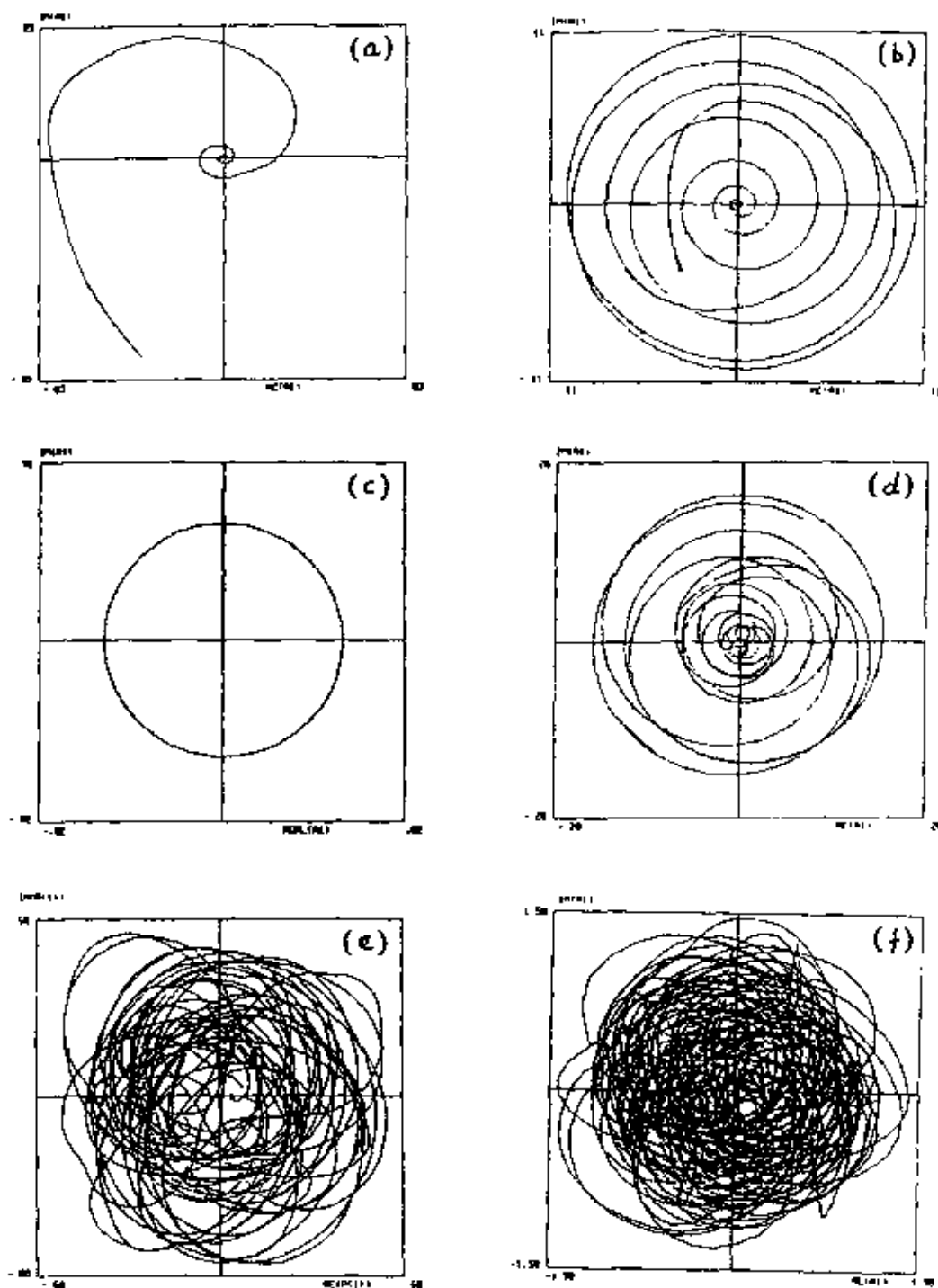


图 1 对于不同的外参数, 相空间轨迹在 $[\text{Im}(\text{Im}A_1), \text{Re}(\text{Im}(A_1))]$ 平面上的投影。所有这些轨迹都是描述系统 1 年的演变。(a) $\theta_E = 4$, (b) $\theta_E = 4.07$, (c) $\theta_E = 4.2$, (d) $\theta_E = 4.3$, (e) $\theta_E = 6$, (f) $\theta_E = 9$ 。在 $\theta_E \approx 4.158$ 时, Hadley 环流失去其稳定性。注意吸引子的维数随 θ_E 的增加而扩大

的研究证实了经典的估计值: 误差增长 (e 倍 ≈ 3 天) 及饱和

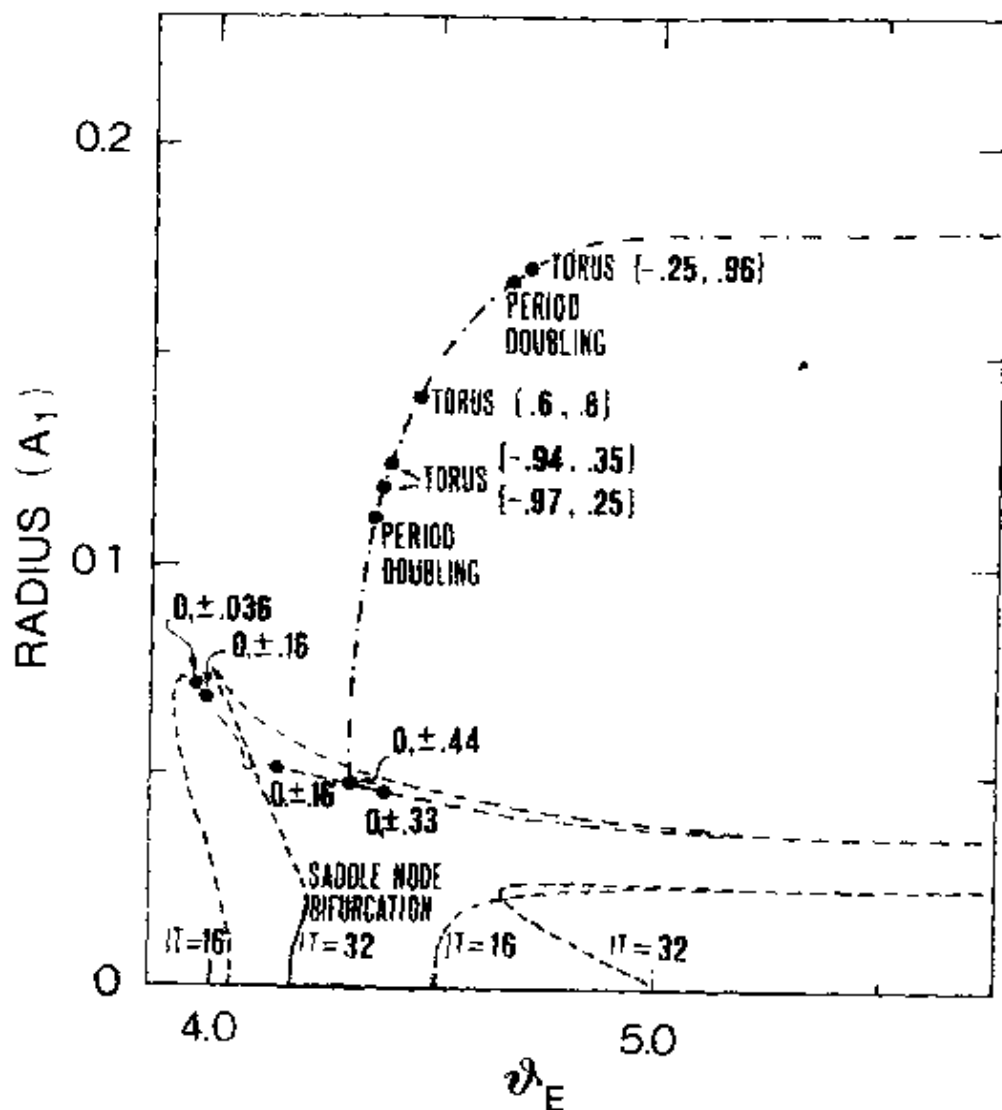


图2 对于两个不同的 Fourier 展开的截断 (16 和 32 个模) 的系统 (8) ~ (11) 的分岔图。横坐标是外参数 θ_E ，纵坐标是正压波场第一个 Fourier 分量的模 (A_1 ，单位米)。在准周期轨道 (点划线) 情况下，曲线给出达到震荡周期的最大振幅。实线表示稳定的 Rossby 环流。黑点旁的数字是 Hopf 分叉 (用黑点标记) 稳定性分析的特征值。方括号的数字是处在单位圆上的 Floquet 乘子，此时新的准周期轨道产生

(饱和时间 ≈ 1 周)。

按当前各种不同动力学系统理论，或多或少能够进行数值处理的系统最大的维数不过几百，而用来预报或作气候灵敏度研究的模型往往是几十万个自由度的系统。实际气象学家总希望所建立的模型要能再现他们所熟悉的特性的细节。即使对这些模型还

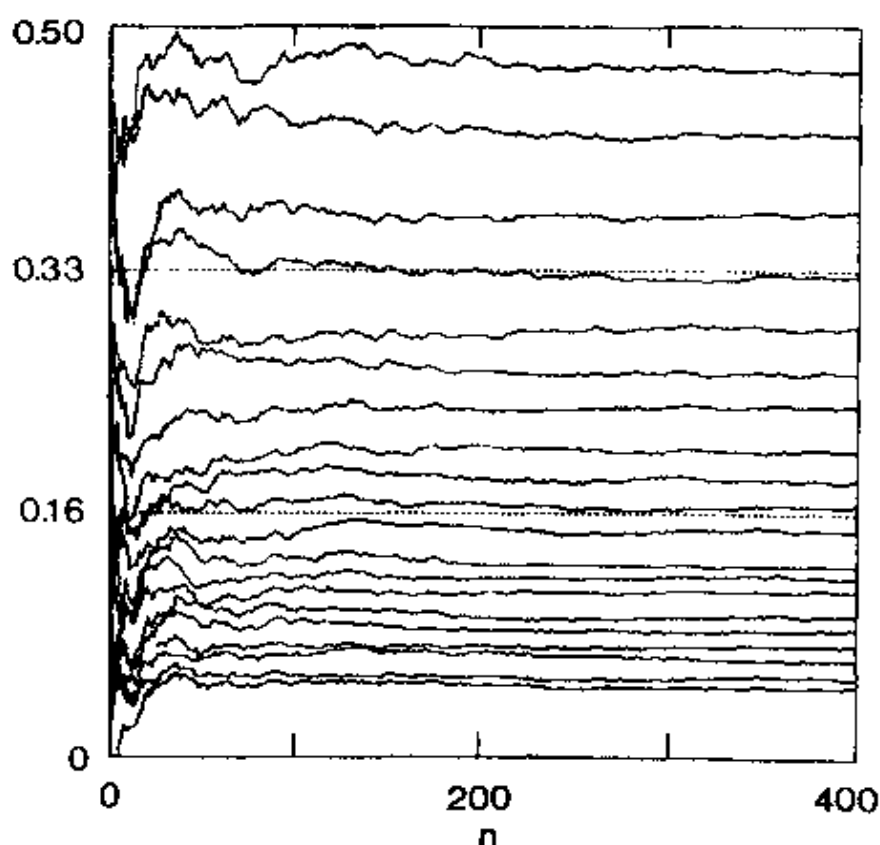


图3 对于JT32的前20个Lyapunov指数的估计值，
横坐标 n 是迭代次数

不能完全进行定量处理，也比在降低维数的所谓“玩具模型”上进行研究放心得多。

现在还不清楚随着计算机功能的增長，这两种方法间的分歧是增加还是减小。

四、结论

在现代气象学的早期，气象学已经对非线性理论的发展作出非常重要的贡献。但是，气象学家大概最近还从数学家那里学习如何处理他们的大气动力学模型。

处理大气方程组的本质非线性的方法并不是唯一的。可以分为两种情况：一方面是，大的气象中心工作的，实际上是全体气象预报人员和大多数数值气象学家，致力于利用观测结果和日益增长的计算机功能来尽可能详细地监视和表述大气的流动，尽管在理论上还不能驾驭所收集到的巨大数量的信息。另一个极端

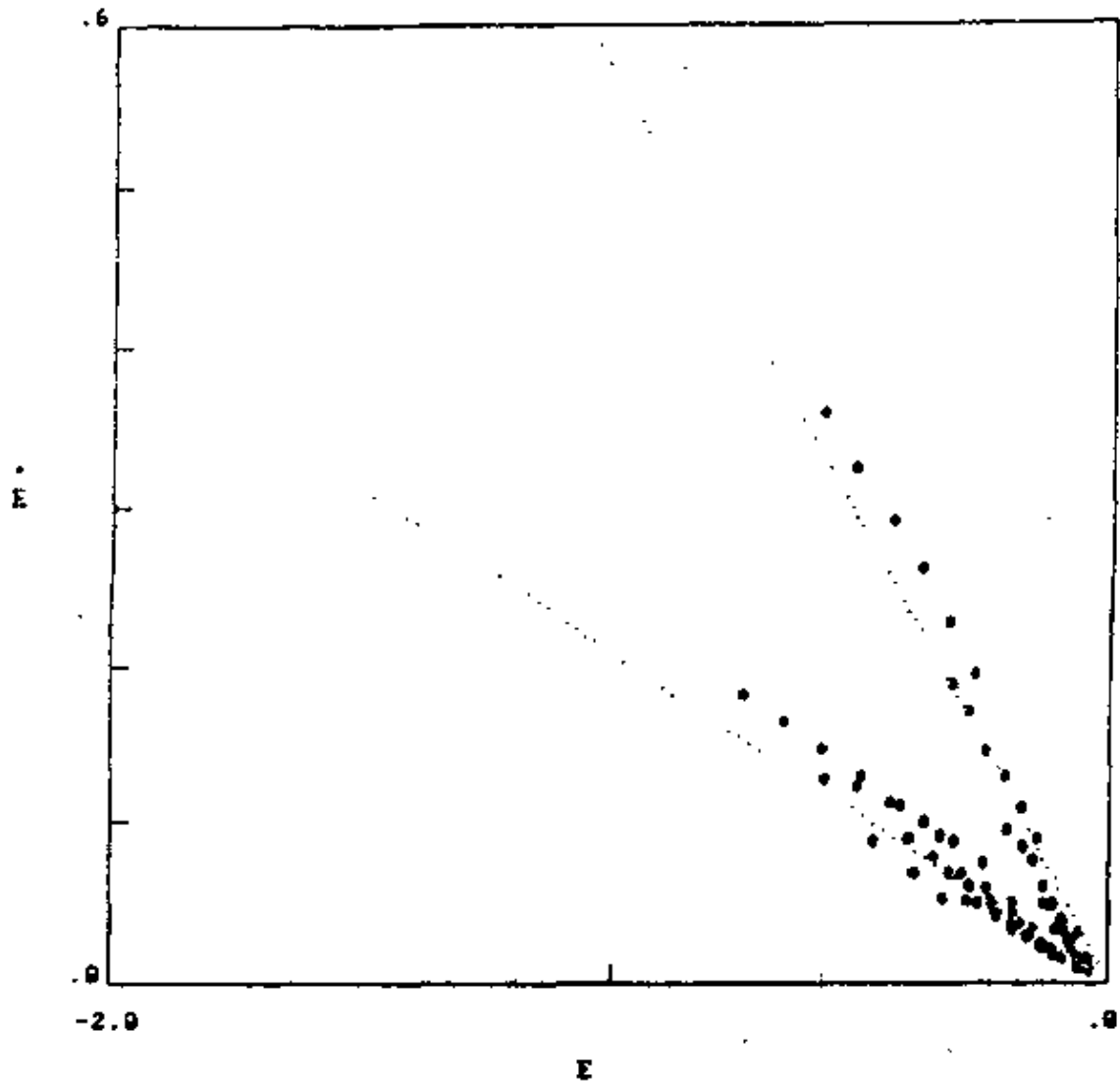


图4 对我们的模型的两组试验 ($\theta E = 9$ 及 $\theta E = 6$) 增长率 ($\dot{E}$) 与误差 (E) 的关系。两条虚线的倾角系数分别为 $\alpha = 0.565$ 及 $\alpha = 0.207$, 它们是各次试验的第一 Lyapunov 指数

是, 少数科学家工作在小的研究中心, 研究大大简化了的大气环流模型。从最近研究结果来判断, 两方面都面临基本困难: 第一组的困难在于他们的研究大部分细节与动力学无关。第二组是由于描述大气动力学的模型所要求的最小维数已超过目前所能处理的最高维数。

可能得到的结论是: 尽管从历史上说气象学与混沌理论有很密切的联系, 但目前混沌理论对气象学的影响局限于理论领域, 而该领域对整个学科的影响还是有限的。

参考文献

- [1] Richardson, L. F. 1922. *Weather Prediction by Numerical Processes*. Cambridge University Press, pp. 236.
- [2] Charney, J. G., R. Fjortoft, and J. Von Neumann. 1950. "Numerical Integration of the Barotropic Vorticity Equations." *Tellus* 2: 237 - 254.
- [3] Charney, J. G. 1959. "On the Theory of the General Circulation of the Atmosphere." In *Rossby Memorial Volume*, 178 - 193, Rockefeller Institute Press.
- [4] Lorenz, E. N. 1955. "Available Potential Energy and the Maintenance of the General Circulation." *Tellus* 7: 157 - 167.
- [5] Lorenz, E. N. 1963. "Deterministic Nonperiodic Flow." *J. Atmos. Sci.* 20: 130 - 141.
- [6] Malguzzi, P., A. Trevisan, and A. Speranza. 1990. "Statistics and Predictability for an Intermediate Dimensionality Model of the Baroclinic Jet." *Annales Geoph.* 8: 128 - 143.
- [7] Saltzman, B. 1962. "Finite Amplitude Free Convection as an Initial Value Problem." *J. Atmos. Sci.* 19: 239 - 341.
- [8] Speranza, A., and P. Malguzzi. 1988. "The statistical Properties of a Zonal Jet in a Baroclinic Atmosphere: A Semilinear Approach. Part I: Quasi-geostrophic, Two-Layer Model Atmosphere." *J. Atmos. Sci.* 45: 3046 - 3061.
- [9] Trevisan, A. 1993. "Impact of Transient Error Growth on Global Average Predictability Measures." *J. Atmos. Sci.* 50: 1016 - 1028.

V. I. Keilis – Borok

摘 要

地球表面厚度从几千米到几百千米的刚性外壳（即岩石圈）由许多块体组成，块体之间的相对运动很大一部分是由地震活动实现的。线度达几万千米的构造板块是最大一级的块体，它们被继续划分为尺度逐步减小的不同层次的块体，直到岩石颗粒的等级。块体的运动表现为地震活动，每年全球范围记录下的地震大概有 10^6 次，其中约 10^2 次是破坏性的。

块体间的摩擦力和内聚力——因而块体间的相对运动——受控于许多过程，这些过程导致时间尺度大到以年为单位的不稳定性，而且是与地震预报有关联的。把这些机制合起来考虑，就可以把岩石圈设想为一个很可能是（虽然不是绝对肯定）以确定性混沌为特征的非线性耗散系统。地震的可预报性的希望在于对这个系统的整体的、充分平均的行为的研究。

许多这样的系统在进入主要不稳定期之前，对激发的响应都呈增强趋势。类似的现象也表现在强震发生前的前兆性地震活动图像

中。这就使得具有以下特点的地震中期预报成为可能：精确度以年和 10^2 千米计；不漏报率达 80 % 左右；各类前兆警报总共波及所考虑的空间 - 时间的 10 % ~ 20 %。

前兆性地震活动图像的全球相似性已经对大约 10^6 的能量范围和广泛多样的构造环境建立起来。

一、非线性动力学和多震断层

岩石圈的各块体被一些经历破裂因而强度降低的边界线所分割。这些边界区因其在层次结构中的等级不同而被冠以不同的名称。于是，宽达 10^2 千米的“断层带”分割出大陆规模的构造板块；1 ~ 10 千米宽的“断层”分割出构造板块内部的大型块体如山区和平原；直到层次结构的低端，分界面分割了岩石颗粒。

除了层次结构中最低的等级外，边界区都具有相似的分层结构的特征：即它们可以被次级的边界区分割为更小尺度的块体。边界区沿着层次结构并穿越层次结构相互联系。尽管不同层次的边界区有明显的不同，但它们在控制块体间克服摩擦力及内聚力而产生的相对运动方面起着相似的作用。

这些摩擦力及内聚力反过来又被主要集中在边界区内的多种过程所控制：

——岩石与流体的化学和物理相互作用，这些流体通过边界区迁徙，而且常常是在边界区中产生的；

——在不断变化的环境（包括压力、温度和应力）中，岩石的相变和岩石化学的变化；

——破裂、弯曲、粘性流动和疲劳，等等。

即使是岩石圈的最简单的单元——单个的岩石颗粒——也不能视为单纯的力学单元。特别是它可以同时充当一个物质的点；一个结晶聚合体；一个能量、体积或流体的源或吸收体。它的本体及表面都参与着十分不同的过程。

以下用两个实例来说明岩石圈内不稳定性机制的多样性（取自^[9,10]）。第一个例子是 Rhebinder 效应或应力腐蚀^[5]。

一些固体在与某种具有表面活性的液体接触后，强度会降低。依据格里菲斯准则，固体的强度与其表面张力的平方根 $\sqrt{\mu}$ 成正比。液体减少了固体的表面张力 μ ，从而降低了固体的强度。这时，固体在远低于通常强度的应力作用下，便会产生裂纹，液体会渗入裂纹，而裂纹又随液滴向内推进而不断增长。若干年前，人们就认识到在岩石圈的普通成分中存在着这样的固-液组合，例如玄武岩和硫磺溶液。当它们相遇时，伴随硫磺溶液的渗入，玄武岩内部会充满许多网格状的裂纹，从而使其有效强度立刻降低 10 倍，并最终降低 10^5 倍。

每一点上的裂纹方向依赖于应力场，要么与主张应力垂直，要么在另一种机制下与主剪应力相切。岩石圈内的应力场是极其复杂多变的，然而，裂隙集中的软弱区可以只有少数几种类型，它们可以用奇异点理论来确定^[5]。图 1 中展示了几个例子，图中的细线代表裂纹的轨迹线。粗线把具有不同裂纹轨迹图样的区域分开。

如果像图 1 中箭头所示的那样，有流体从一个源流出，它将在阴影区集中，这里的物质的强度将下降。流体源的微小位移都将导致这种疲劳区的几何形状发生显著的整体性的改变；疲劳区的形态会变得与原来大相径庭，虽然这种变化不是随意的。

因此，Rhebinder 效应给岩石圈动力学带来了很强的、特殊的不稳定性，这种不稳定性受应力场和流体的地球化学性质控制。用这种效应可以很容易地解释所有已知的强震发生前的前兆性地震活动图像。由于基元奇异点足够复杂多样，也许任何一种地震活动图像都能用这种方法来解释。不过，这种效应并不是边界区控制岩石圈动力学的惟一机制。

第二个例子。另一种可以与 Rhebinder 效应相比的机制是更为常见的流体通过孔隙或裂纹沿压力梯度方向的渗透^[2]。如果我们把边界区当作一个多孔层来考虑，则当某处的边界上的剪应

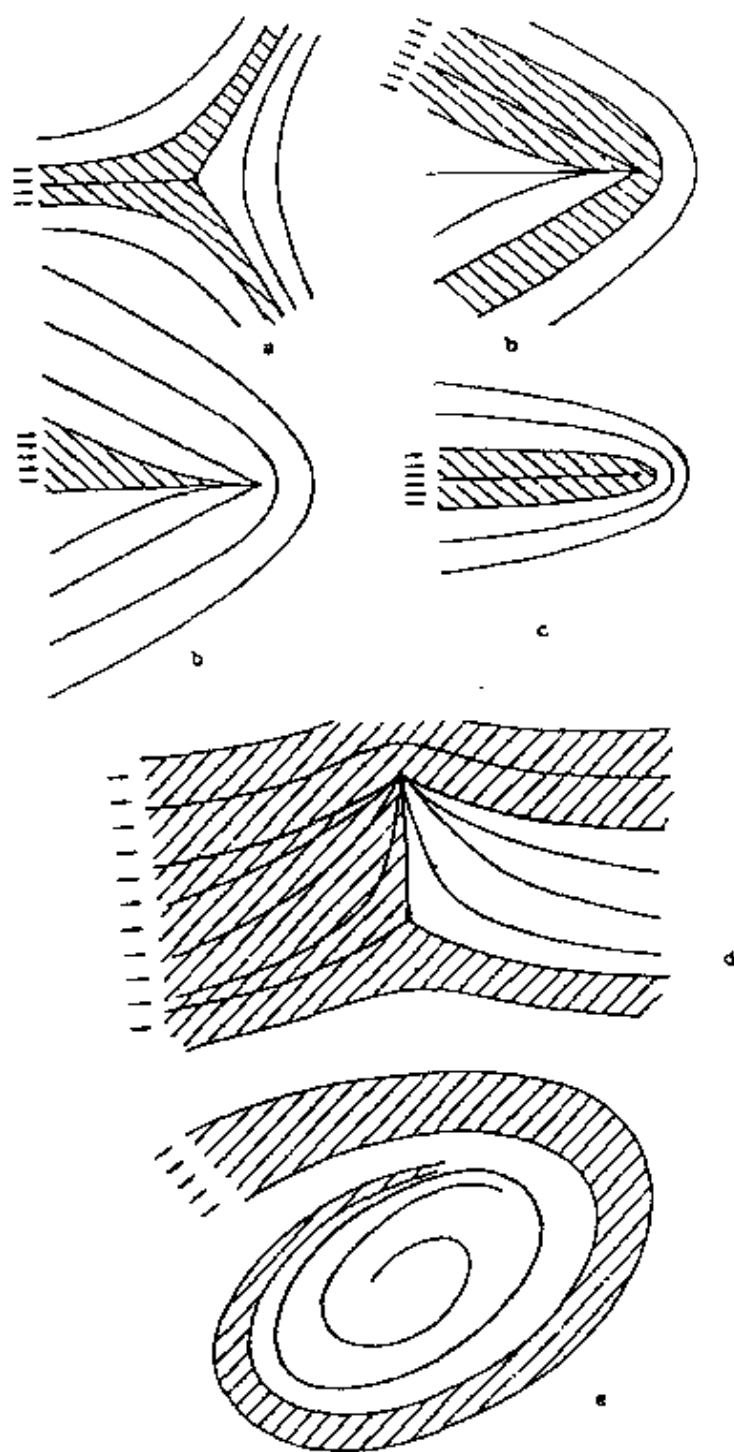


图1 应力腐蚀导致的疲劳区的几何形态。表面活性液体的源的位置用箭头表示。阴影部分为软弱区。图中的a、b、c对应于不同类型的主应力场的奇异点；d对应于两个a图中所示的那种类型的奇异点；e图对应于一个环或“极限环”

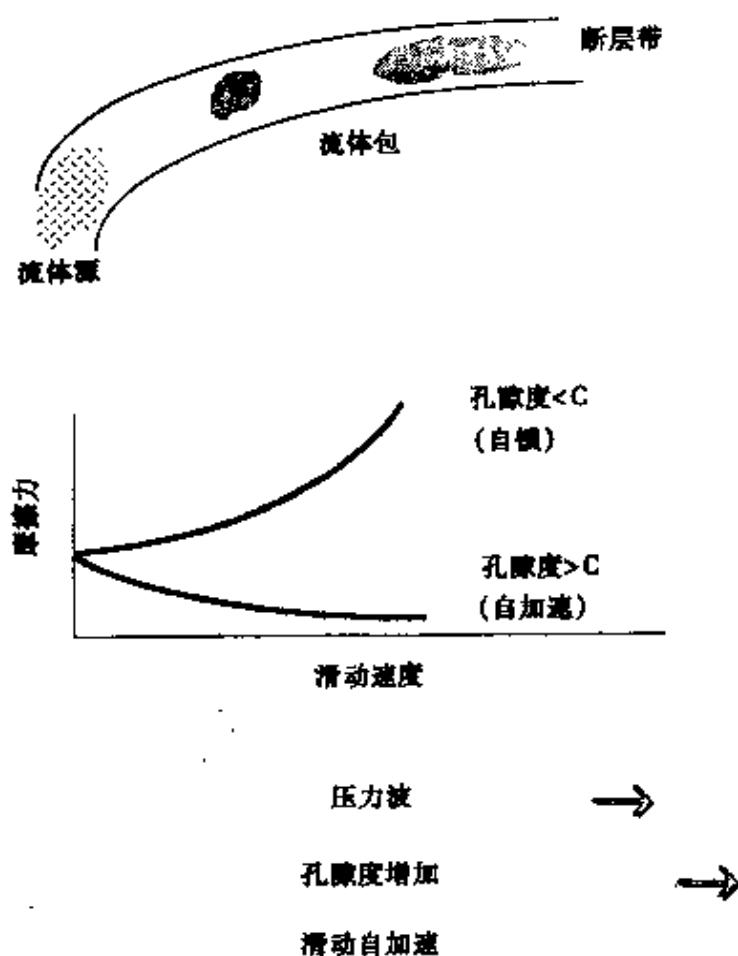


图2 由于流体渗透造成的断层带的不稳定性。(图上)把断层带简化为一个多孔层模型,在不可渗透的刚性块体之间有一些残留的流体包。(图下)不稳定性的机制(取自[2])

力超过摩擦力时,滑动就开始了。进一步的发展显示出很强的不稳定性,用图2表示。若孔隙度低于临界值,则滑动一旦开始便会增大摩擦力,因而自动减速。这会造成蠕滑或慢地震。但是如果孔隙度超过临界阈值,则滑动会减少摩擦力并自动加速。孔隙度可因流体的渗入而增加到超过临界阈值。这样一来,又是仅仅作作为流体渗入的结果,不稳定性便会即刻增加,而不断发生的微小滑动将自动加速、增长及合并。

岩石圈内的各种引发不稳定性的过程中,挑不出哪一种能作为近似计算用的“占优势的过程”。这些过程的复杂多样提示我们需要寻找一个综合的、一般化的描述——即把岩石圈看作一个

非线性耗散系统。此系统的基本方程尚不知道，所以对它们的研究仍处于现象学和模型化的特别有争议的“方程前”状态。

二、模型化

模型化的最重要的结果是使我们理解到，地震发生的各种基本规律性可以用非线性系统的普遍的、一般化的性质来解释，而无须涉及那些与岩石圈的内在因素有关的特殊过程。

首先产生于理论物理学和天体物理学的细胞自动机 (cellular automaton) 型模型^[1,3,4,7,8,11~14]是由许多点单元排布而成的网格组成，点单元之间通过一条相对简单的定律相互作用。早在1967年就有人把这类模型首次引入地震研究^[3]。

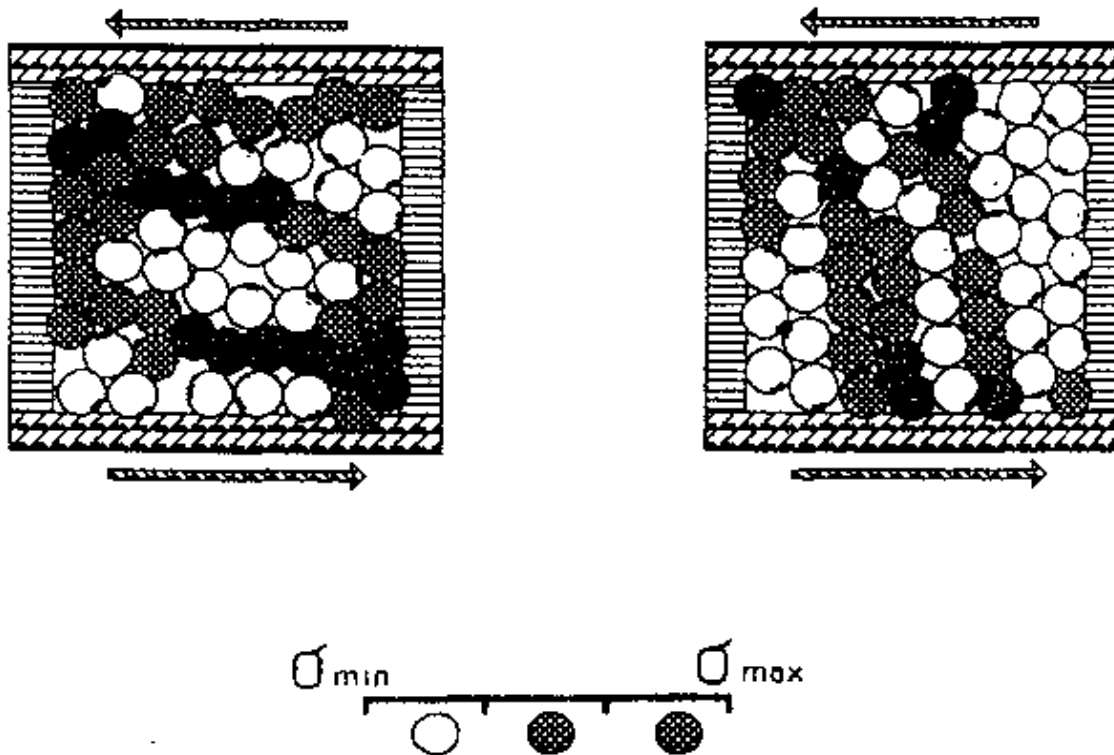


图3 一个简单模型中，相互作用着的各块体自组织为一些链状结构 (取自 [14])

图3所示是这类模型的一种。它展示了组分单元的微小位移是怎样通过自组织而形成一次强烈地震的。单元体是一些可以移动和转动的弹性圆盘，它们受到总体的压力而聚合在一起。当两个圆盘间的剪应力超过摩擦力时，滑动便开始并释放出能量。照

这样，一个单元体的滑动会触发另一个单元体的滑动。圆盘的集合体明确地表现出整体的行为特征。图3中受应力最大（颜色最深）的圆盘自组为一些线性构造，并最终发生失稳，这就触发该模型中“强烈地震”的发生。

这类模型重现了地震活动性的若干本质特征，包括基本的古登堡定律

$$dN \sim E^{-\gamma} dE$$

这里 dN 表示单位时间在能量间隔 dE 内的平均地震次数。此定律表现为幂函数形式而不是指数函数形式的事实，表明系统处于亚临界状态。由它还可导出其他一些重要推论如自相似和分形等。

用一个异常简单的层次结构模型实现了一个重要的转折——一个未知的规律性的发现^[12]。人们先是注意到此模型得出的一种前兆性地震活动图像——具体说就是 $dN(dE)$ 曲线在它的高能端的一个朝上的转弯，继而在观测中得到证实。细胞自动机模型的经验启发我们把岩石圈的多震地区看作一个非线性系统，它持续地处于接近临界状态；而且，巨大的能量释放也不能给它带来稳定性（“自组织临界性”^[1]）。

以确定性混沌或相变（特别是由渗透作用产生的相变）为特征的解析模型（例如 [10] 的第一部分）已被用来为不稳定性及其向混沌转变的方式的分类建立起定量的判据。但直到现在，它与现象学的关联依然还有限。尽管如此，为了了解地震发生过程中其他一些规律性，需要建立一类考虑到岩石圈块体几何形态及其相互作用流变学的模型，这些模型使我们能够对那些中期预报算法的正确性进行检验^[10]。

用这些模型使我们现在能去探索许多关键性的问题，包括：岩石圈内部参量和外部（“可直接观测的”）参量间的联系；描写系统的短期动力学基本特征的最小限度的参量集；以及不稳定性的类型或向混沌状态转变的类型。

三、预报

地震预报问题就是一步一步不断缩小可能会发生强震的时-空范围的过程。本文谈及的精确度以年和 10^2 千米计的中期预报是其中的一个步骤。

因为地震产生于由一系列多震断层所组成的非线性系统，所以它的可预报性是有限的。地震预报的最佳希望存在于下面两个相反的方向。

——一是希望强震不是断层系统内部一个突发的瞬间的跃变，而是一个时间上稍微延长的向混沌转变的过程的一部分。在这种情况下，这个向混沌转变的过程的开端便可用作短期预报的先兆，尽管它实质上是已经发生的地震的一个主要的部分。这种情况的一个众所周知的例子是，洛伦兹吸引子在从一个分支到另一个分支的随机跃迁前的轨线的弯曲。

——另一个希望在于，一个非线性系统在经过平滑或平均后变得有可能进行预报。对一个层次结构系统来说，不同程度的平均将给出不同时段的预报——平均的程度越强，预期地震的时段及空间范围就越大。这对中期和长期时段的地震预报都是适合的。

地震发源于深度为几千米至几百千米因而不可能进行直接观测的地下。于是，在地震预报的现象学探索中，岩石圈一直被看作是一个黑盒子，我们只能从外部观测它发出的信息资料。特别是，它产生的地震活动构成了迄今为止时间最长、最趋完整的一套适用资料。依照古登堡定律，绝大多数地震是低能量的。当我们在寻找刚出现的强震的征兆时，应该分析整个地震流的时-空变化。

某一特定地震的发生，不能同整个岩石圈的动力学状态完全孤立开来。但这里我们把问题进行了简化，即只分析确定区域内发生的地震活动。迄今提出的绝大多数前兆性地震活动图像^[10,15]都可解释成“对激发的响应增加”这同一现象的不同表

达形式，这是许多非线性系统在接近不稳定状态时典型的性质。

激发的明显来源是（不稳定状态）引起的地震。对它们的响应的增加可以表现为下列量值的增加：

- 地震丛；
- 各地震间相互作用的距离；
- 地震流的强度；
- 地震流在时间和空间分布上的不规则性。

这些各自不同正式定义的多种现象，共同构成了迄今提出的前兆性地震活动图像的绝大部分。对平均的需要启示我们，这些定义是鲁棒的（robust），相互不独立的，并且涉及大的时间和空间尺度。当足够多的上述现象被观测到时，就可以断定一场强震已经临近。文献[10]叙述了这种判断的算法及其应用。

文献[10]所描述的研究工作中罗列了支持“世界范围地震活动图像的相似性假说”的证据，特别是给出了该预报的算法的标准化定义，从而使人们可以在全球的不同地区对它们进行统一的检验（图4）。

——环太平洋地震活动带内：从加利福尼亚、内华达到南美洲，以及从堪察加到台湾；

——阿尔卑斯地震活动带内：包括帕米尔和天山山脉，高加索山脉，外贝加尔地区和斯塔诺夫山脉，科佩特和厄尔布鲁士山脉，以及东喀尔巴阡山脉（Vrancea，中等震源深度）；

——中等的和低的地震活动区内：例如阿巴拉契亚山脉北部和布拉班特-阿登山脉；

——诱发性地震活动地区：例如印度戈伊纳水库。

总计约80%的强震发生前存在一个概率增加时间（TIP），同时约有80%的TIP被其后发生的强震所证实。强震中，有6次事先做了TIP的诊断，包括1988年亚美尼亚地震和1989年加利福尼亚，洛马-普列雷塔地震。图5示出后者的预报过程（取自[6]）。

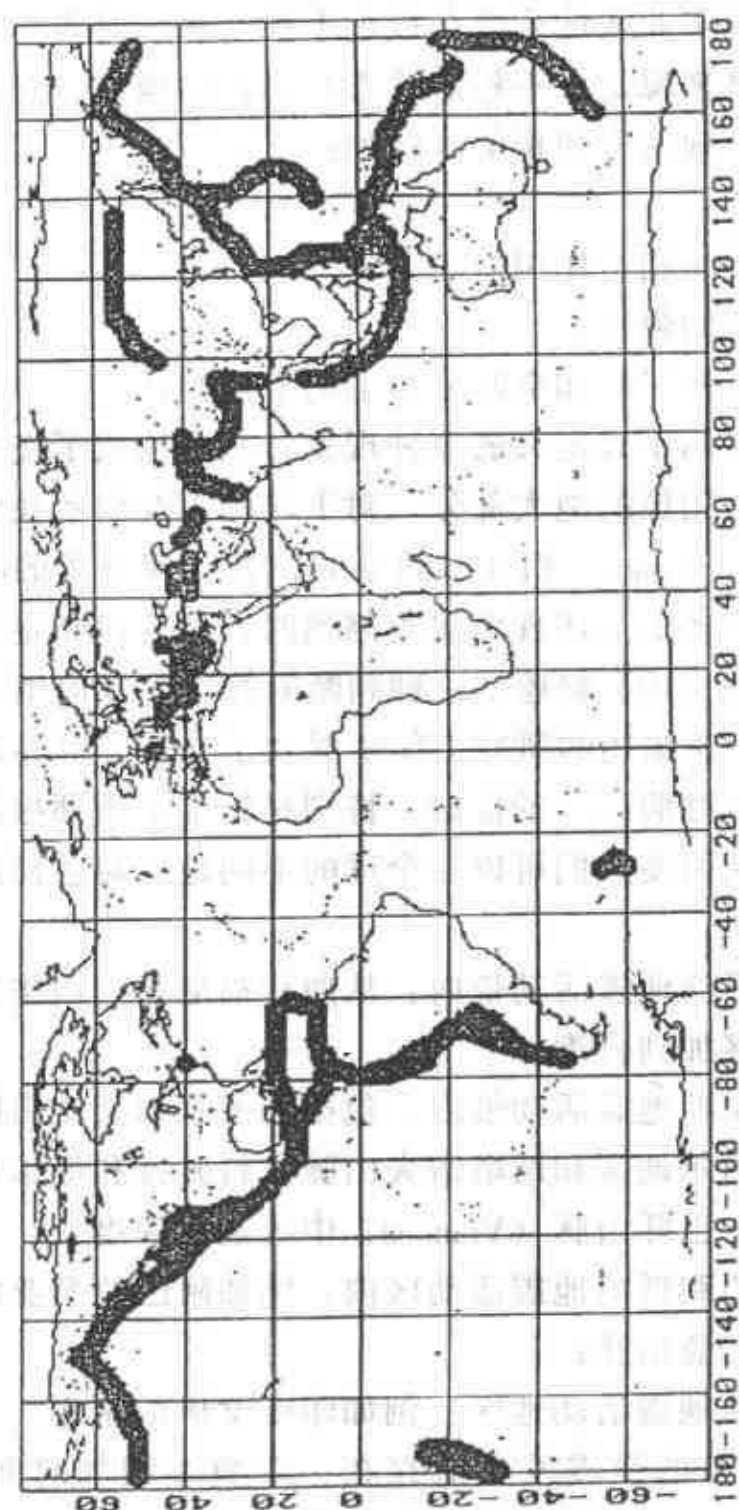


图 4 中期前兆性地震活动图像的全球相似性

四、结论

非线性动力学，特别是混沌的思想到底给对地震的认识及对地震预报的理解带来了什么呢？在目前地震预报的发展过程中的

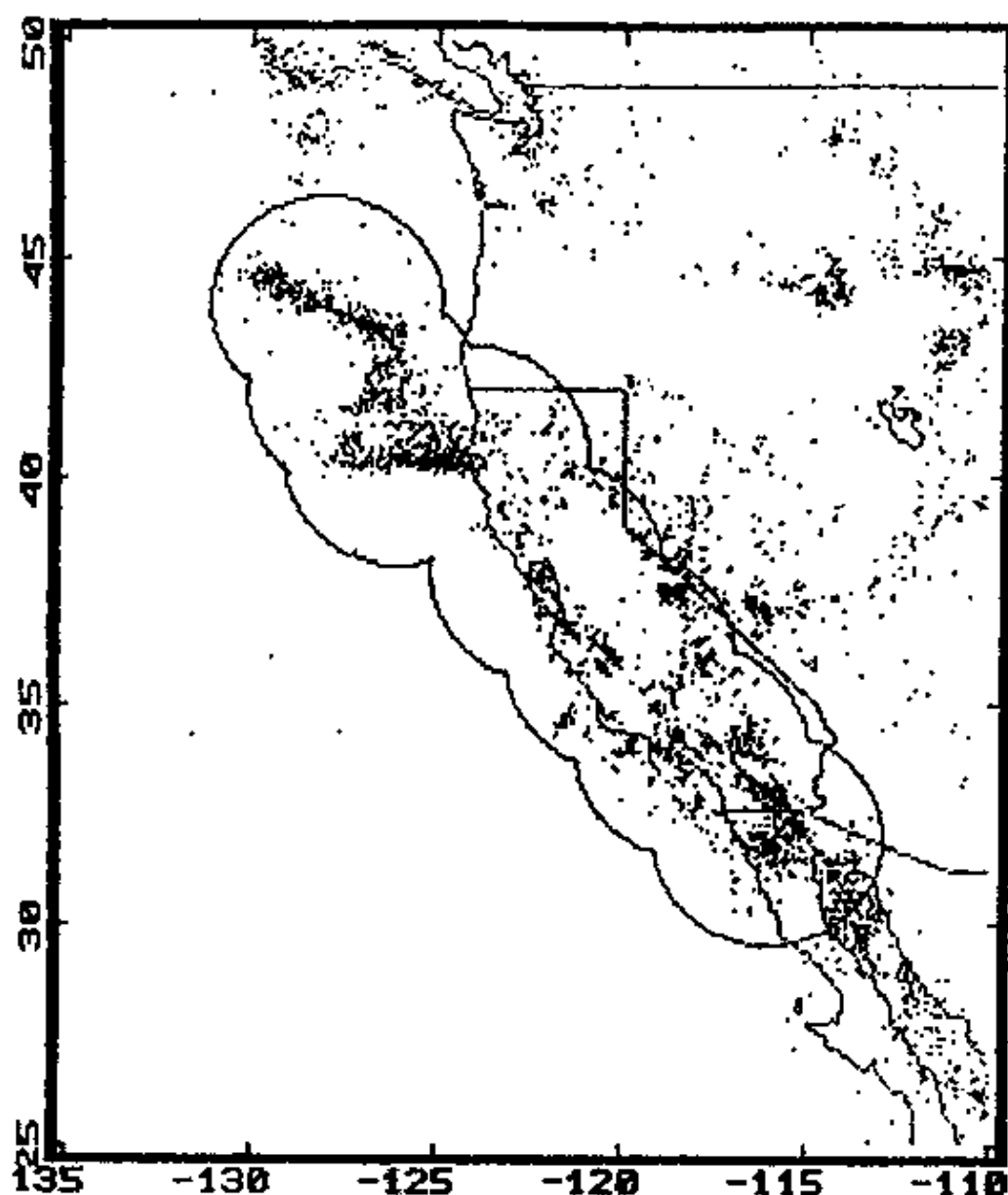


图5 加利福尼亚，洛马-普列雷塔地震的预报^[6]。研究区域由圆圈的包线标出

“方程前”阶段，我们需要小心谨慎，避免浅薄，避免无效地引用诱人的混沌词汇。但事实上，像混沌、相变、自组织、相似性等非线性动力学的概念即使在目前阶段也是有重大意义的。

以上述这些概念为基础的下列新的研究方向，已经在对当前岩石圈动力学和地震预报的理解上取得了重大成果：

——从对大尺度现象的总体平均开始，逐步向细节扩展的新的分析方法。

——通过不只局限于岩石圈，而是非线性系统普遍具有的特征，对主要现象进行解释。

——在宽广的能量范围和新构造环境内认识它（岩石圈）的结构和动力学的局部相似性。

这些研究方向为两种截然相反而至今占主导地位的倾向提供了一个重要的二中选一的方法。

——第一种倾向是首先集中注意在“本质的细节”上，期望以后能把它们结合成一幅“总体的图像”。

——第二种倾向是集中注意在不同区域之间的差异而不是相似性，集中注意各类特殊的机制而不是它们的集合体。

综合的方法有时反映了那种“以为人们可以通过研究非线性系统的组成部分来了解其整体”的错觉。

借助于上述这些新方向的研究，人们对岩石圈的认识已经得到加强，对数据库进行了整理，并出现了可重现的地震预报方法。从对地震预报日益增长的紧迫需要来看，这一切并非来得太快，甚至在这些新概念发展成完整的理论之前，靠它们的力量就能够实现这一切。这个事实说明此次“混沌对科学和社会的冲击讨论会”的召开是很及时的。

参 考 文 献

- [1] Bak P., Tang C., and Wiesenfeld S., 1988. "Self-organized Criticality." *Phys. Rev.* A38 (1): 364 - 374.
- [2] Barenblatt, G. I. et al. 1983 "Filtration Model of Earthquakes' Sequence." *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 269: 4 (in Russian).
- [3] Burridge, R., and Knopoff L., 1967. "Model and Theoretical Seismicity." *Bull Seism. Soc. Am.*, 57: 341 - 371.
- [4] Carlson, J. M., and Langer, J. S., 1989. "Mechanical Model of an Earthquake Fault." *Phys. Rev.* A40 (11): 6470 - 6484.
- [5] Gabriellov, A. M., and Keilis-Borok, V. I. 1983. "Patterns of Stress Cor-

- rosion: Geometry of the Principal Stresses." *PAGEOPH*, 121 (3): 477 - 494.
- [6] Healy, J. H. Report to NEPEC on Evaluation of Prediction of the Loma Prieta 1989 Earthquake made by the Algorithm M8 (11 January 1990).
 - [7] Ito, K., and Matsuzaki, M., 1989. "Earthquakes as Self-Organized Critical Phenomena." *JGR*, 95 (B5): 6853 - 6860.
 - [8] Kadanoff, L. P., Nagel, S. R., Wu Lei, and Zhou Sumin, 1989. "S and Universality in Avalanches." *Phys. Rev. A* 39 (12): 6524 - 6573.
 - [9] Keilis-Borok, V. I., 1990. "The Lithosphere of Earth as Nonlinear System with Implications for Earthquake Prediction." *Review of Geophysics*, 28 (1): 19 - 34.
 - [10] Keilis-Borok, V. I., ed. 1990. "Intermediate-term Earthquake Prediction: Models, Algorithms, Worldwide Tests." *Phys. Earth and Planet. Inter.*, Special issue, 61 (1 - 2).
 - [11] Levi, B. G., "Are Fractures Fractal or Quakes Chaotic?" *Physics Today*, November, 17 - 19.
 - [12] Narkunskaya, G. S., and Shnirman, M. G., 1990. "Hierarchical Model of Defect Development and Seismicity." *Phys. Earth and Planet. Inter.*, special issue, 61: 29 - 36.
 - [13] Ogata Y., 1988. "Statistical Models for Earthquake Occurrences and Residual Analysis for Point Processes." *J. Amer. Stat. Ass.*, 83 (401), applications.
 - [14] Ptsarenko, V. F., Primakov, I. M., and Shnirman, M. G., 1990. "Deformation of an Array of Interacting Movable Elements." *Phys. Earth and Planet. Inter.*, special issue, 61: 8 - 18.
 - [15] Wyss, M., and Habermann, R. E. 1988. "Precursory Seismic Quiescence: Past, Present, Future." *PAGEOPH*, 126 (2 - 4): 279 - 318.

Steven R. Bishop

一、引言

无可争辩，现今数学发展最令人兴奋的是发现了许多自然系统中的混沌和分形特性。现在我们认识到混沌是工程动力学的一部分，它已在满足牛顿运动定律的机械和结构系统中被观察到，这些结构包括机器操作，结构振动和运载工具及其他附属结构的响应。牛顿的动力学不仅适用于固体系统，而且适用于流体系统，这样能涉及混沌行为的相关问题被大大扩展了。即使是确定性的，与混沌系统相伴随的运动，在要求某一特解精确地再现的意义上说，是不规则的，不可预测的。混沌运动能导致本来认为无论如何是安全和确定的系统的失灵。无论是稳定状态混沌、混沌瞬变、还是不稳定混沌模式，都为工程系统的响应和安全（Lighthill 1986, Thompson 1988, Lichtenberg 和 Lieberman 1983）增加了非常真实的不确定因素。继 Ruelle 和 Takens（1971）的早期工作之后，很多工作仍然是继续识别混沌动力学的各个方面，并在流体力学（Moore 和 Weiss 1990）以及天体力学（Wisdom 等人，1984）方面作出了有意义的工作。这些新发现被用于传统结构和普通工程的较早的实例有（仅列举几个与作者有关的）：海上设备设计，翻船预防（Virgin 和 Bishop 1988, McRobie 和 Thompson 1990），梁的失败，建筑火灾以及烧毁预测设计。

为了对混沌在工程中的作用进行评价，必须牢固树立下列观点：

——混沌是对由确定系统产生的不规则运动的一种特殊类型的技术描述。

——混沌展示了从相邻状态产生指数发散，并由于初始条件的细微差别导致不可预测性。

——混沌在非线性和相维数至少为 3 时才能呈现。

——混沌是一个长期现象，需要对耗散系统连续地输入能量。

——混沌是工程动力学的典型组成部分，它已在由牛顿运动定律所控制的机械和结构系统中被发现。

——混沌处于有序结构内，在日常感觉中它不是混沌的。

近几年，对混沌动力学的研究已经经历了快速的发展，并存在很多已发现混沌运动现象的研究领域，无论是在物理系统还是在数学模型中，在此我们列举几个有特殊意义的领域：

——船舶摇摆导致的倾覆。

——曲屈梁的振动。

——船舶对碰垫的撞击。

——齿轮箱发出的格格声。

——活动连接的系船塔的摆动。

——点阵式打印机动力学。

——发电机中的粘 - 滑摩擦振动。

——电缆的涡流谐振。

该清单并不意味着详尽无遗，而只是给出了应用范围的一小部分，迄今这些问题是工程师们在新的或已有的设计中面临而正在考虑的，动力系统理论的绝大部分，主要用于识别和回避混沌，而不是利用混沌。或许接受混沌可被有效利用的一个领域是化学混合，但是在主流工程领域，正继续进行识别方法的研究，从中我们可以利用混沌力量。

二、几何理论在应用力学中的作用

尽管非线性已有不同形式多种多样的应用，混沌的出现或利

用不可能不引起争论，但是有必要给出某些解释，说明来自作者研究过的各种系统的混沌在工程中的含义。为了研究混沌系统及其实现过程，几何理论所扮演的角色是更有意义的（Wiggins 1990）。

像其他领域一样，在工程领域中，对于复杂的数学模型经常并不真正有用，而来自系统的惟一信息是它的响应。为了从实验和实际数据中获取尽可能多的信息，现在的重点在于利用时序分析（Covsdagli 等，1990）来评价非线性系统。这些系统的响应的记录通常是间断的，而不是连续的，因而使重现图像的研究复杂化，这些图像是在离散时间上表示演变过程。不管怎样，暂时我们将集中精力到由偏微分方程描述的系统，这些方程控制连续时间的演化，模拟工程系统行为，虽然重现图像可由微分方程的离散来采样获得。下面我们将仅限于非保守系统，它可能与天体力学和粒子物理学有很大关系，并讨论在工程领域存在的宏观世界，在该系统中，能量的耗散使得系统趋于稳态，即一个吸引子。例如，图 1 给出了梁在曲屈载荷下被激励的典型情况。随后的运动就图中给定的参数而言是混沌的，并用具有三次非线性恢复力的 Duffing 方程的响应来描述是恰当的。该图显示了两种短暂的时间历史，并都快速地形成稳态混沌运动。长期持久的运动可以通过规则间隔时间快速采样，在相平面中表示出来。本文以强迫周期的倍数进行采样（Poincare 采样）。混沌运动吸引附近的瞬态过程，因此画在图 1 右下边角上的类型就是表征混沌运动的混沌吸引子；Yoshisule Ueda（该主题的早期创始人之一）已经画出一个极好的该吸引子的图案，该吸引子捕获 10 000 个点，每个点与一个强迫循环相对应。

在结构工程或离岸机械中，建筑物、烟囱、桥梁、船舶等的动力学模拟，在一定环境条件下可以将载荷用周期函数近似表示。首先很多研究工作是在这样系统的真实模型上进行的，而混沌解经常仅出现在窄的参数范围内。为说明这一观点，图 2 给出了一个半潜状态的离岸平台的研究结果。这些平台部分浸没地漂

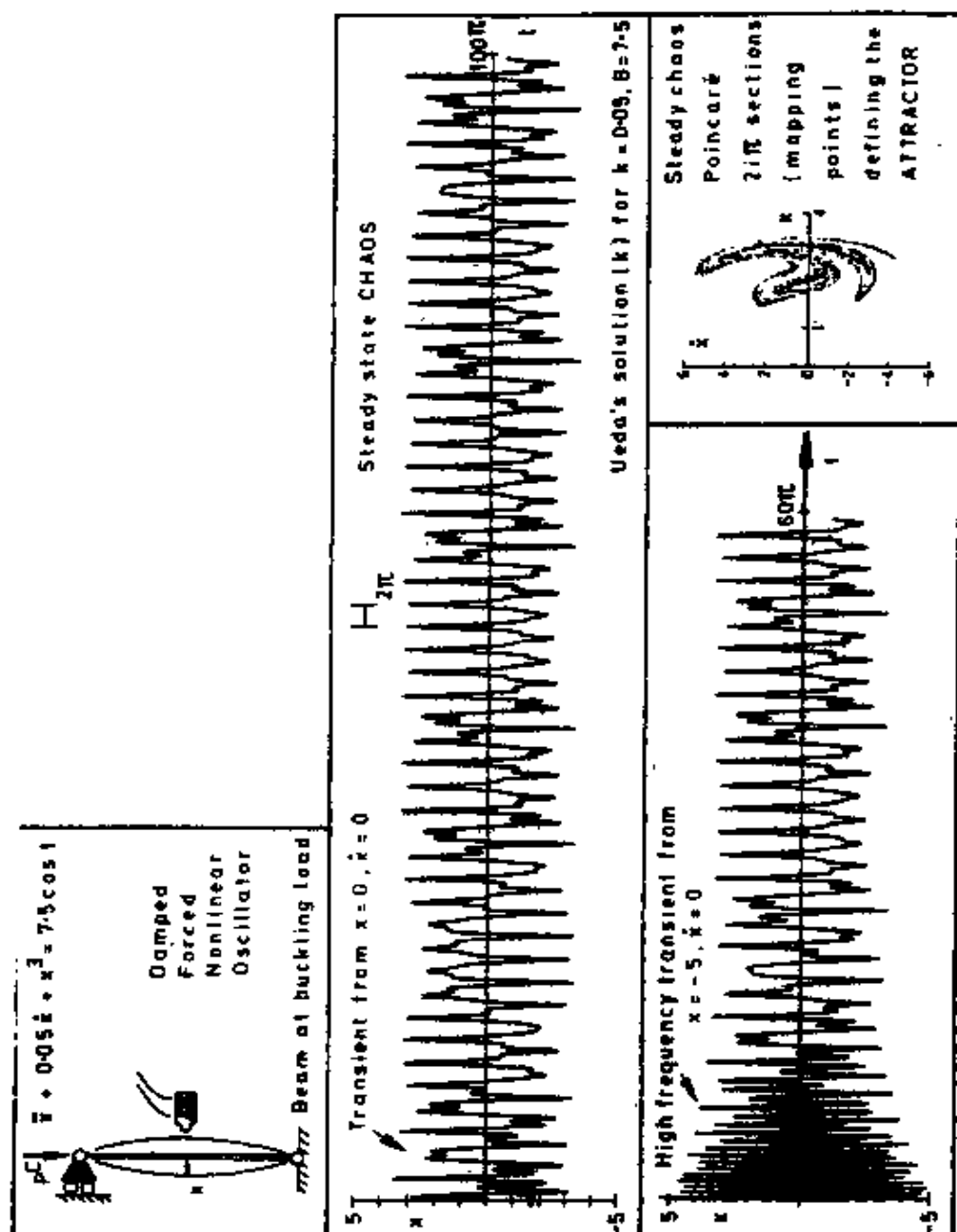


图1 屈服梁的损伤强迫非线性振动表现出两个分离的轨线,该线瞬间衰退后形成永久稳态混沌,长期轨线以强迫周期的倍数采样给出一点集:混沌吸引子

浮在海水中,由巨大链条系泊在海床上;当波浪作用而导致平台的(向前)颠簸运动时,链条要产生一恢复力。在巨浪中最大位移幅值随波浪周期变化的轨迹图显示出很多非线性特征。强迫周期的2、3和4倍的次谐波解与基本(线性)解是共存的。指数 $n=3$ 解的谐波存在导致海上平台混沌响应的分叉的倍周期序列,但仅仅在参数空间的夹窄窗口内出现(Bishop和Virgin1987)。在本研究中,几乎所有的非线性解,包括混沌运动,都因张力的存在而导致链条的破坏,这对忽视非线性行为的设计者来说,是值

得重视的。

还有一个值得一提的观点是混沌区域也经常与接近初始共振的激振频率相联系，该区域正是工程师们企图避开的。这个观点在图 3 中作出了展示，该图研究了船舶在规则横浪中的摇摆响应 (Virgin 1987)。这种情况下的恢复力已由静水试验进行估算，并产生一个柔型恢复力 $H(x)$ ，通常称为 GZ 曲线。混沌区发生在 0.8 和 1.0 之间的标准化频率上，因此或许在一些横摇摆角上已经引起某些相关联的破坏（可能是卸货状态）。

考虑到上述实例确实存在，Ueda 已经收集了 Duffing 型三次非线性偏微分方程的响应（没有线性刚性项），指出大区间的混沌解，如图 4 所示 (Ueda 1980)。我们也已经看到，混沌运动能够与次谐波解相联系，而远离共振。

通过分析自由悬吊的限制在单平面内运动的钟摆，可发现平面运动的单摆可以显示非线性动力学效应，包括混沌。摆的悬挂点沿垂直方向正弦驱动，摆的运动方程以角位移 θ 为参数可表示为：

$$\ddot{\theta} + 2\xi\dot{\theta} + (1 + p\cos\omega t)\sin\theta = 1 \quad (1)$$

式中点表示对时间坐标 t 的导数， ξ 表示阻尼率， $p\cos\omega t$ 项对应于周期为 $T = 2\pi/\omega$ 的强迫项。角度 θ 从最低位置开始量起。对该方程进行数值模拟 (Capecchi 和 Bishop 1994; Bishop 和 Clifford 1994)，其结果显示出与实验研究很接近 (Leven 等 1985)。对于低的激励频率，钟摆垂吊在稳定的垂直位置。当频率变化，该悬吊位置变成不稳定，就开始了两边摆动。对于其他强迫频率值的幅值，能够出现混沌运动，即摆动、纯转动或翻滚。其中翻滚运动更容易观察到，因为他们在无序的左右移动的过程中要翻转，同时伴随着围绕悬吊位置的振荡。在这实例中，混沌很容易确定，甚至在不可避免存在的机器噪声中也能确定存在混沌。图 4 给出了这样一种混沌吸引子。

一种观察动态过程的方法是考虑由恢复力积分计算得到的控制势能函数，它要产生一个势井 (well shape)。例如，用此方法，

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + f(x) = a \sin \omega t$$

$$m = 45011 \times 10^3 \text{ kg}$$

$$b = 383 \text{ kN/(m/s)}$$

$$a = 15000 \text{ kN}$$

$$\omega = 2\pi/T$$

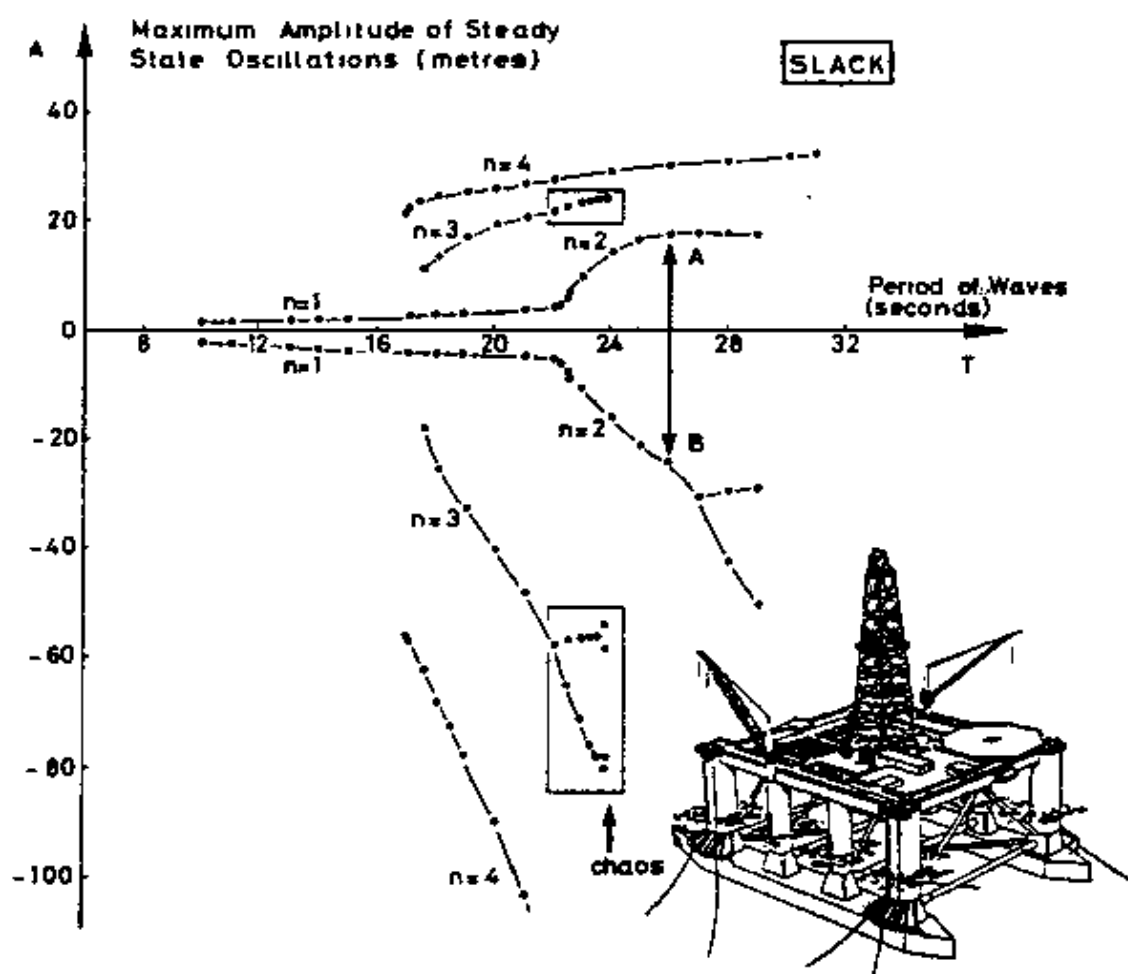
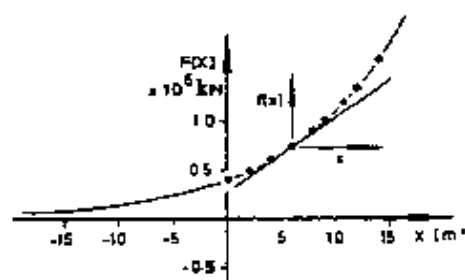


图2 共振响应曲线，给出了半浸没海上平台波涛振动最大幅值。上图给出了非线性恢复力的形式，那时混沌解的狭窄区间出现在次谐波解的末尾，其周期为载荷的3倍

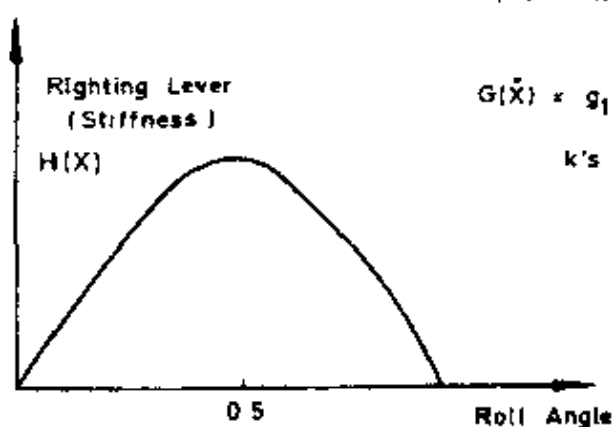
船舶的翻倾运动等同于在势井内小粒子的振荡，而倾覆对应于从势井逃出。不同的船形将产生势井形状的变化，可能导致控制势

$$\ddot{X} + G(\dot{X}) + H(X) = \beta + \alpha \omega^2 \sin \omega t$$

$$H(X) = \omega_0^2 X \left[1 + \dots + k_{n-1} X^{(2n-2)} \right]$$

$$G(\dot{X}) = g_1 \dot{X} + g_2 \dot{X}^3$$

k's and g's from stillwater tests



X Relative roll angle

β Static bias term

α Wave - slope amplitude

ω Wave frequency

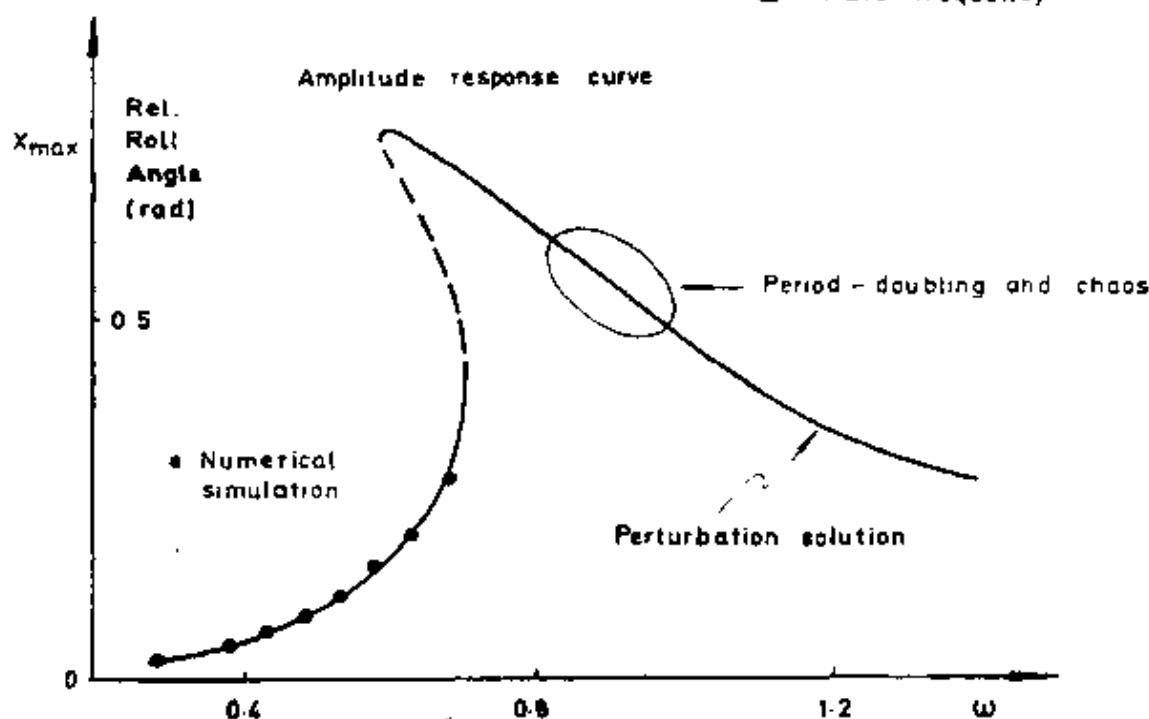


图3 在规则横浪中船舶的横摇响应。上图给出非线性恢复力。下图给出当强迫频率变化时具有混沌区域的响应幅值，混沌区域与初始共振接近

能的恢复力有不只一个势井图像，如图5所示。海上平台波浪运动和船舶翻倾这样两个早期的实例都展示了单一势井，在该势井内混沌通常很容易确定，且只出现在参数空间的窄小窗口内。横跨势井的混沌是更为普通；驱动钟摆的例子，当转动角无限增加时，它具有无限的势井数量。



图4 由响应的位移和速度频闪观测采样产生的、参数激励的单摆混沌吸引子

此外，工程师们宁愿通过短时突发激励形成的瞬变运动来量化确定系统的完整性，而不愿关注长期的混沌稳定解，该解产生的混沌吸引子能够推断系统的维数和状态。在大多数工程动力学问题中规则加载不会长期维持不变，这样系统模型必须经常适时修正。地震工程师们采取了稍微不同的方法并计算瞬时响应频谱，但是，为了对付复杂的困难问题，工程师们经常避开瞬态，即使确实是动态，他们也仅用静态公式来考虑。一般情况下，由激励变化引起的系统变化是严重的，不能写成确定性模型的简单摄动。这样，重点应从吸引子转移到系统显示的瞬态动力学特性。

因此，混沌新理论最初似乎对工程师开发新的设计帮助不大。然而几何非线性动力学的拓扑学方法仍然得到了应用，并能解释分叉行为的机理，例如，通过符号和耳垂动力学的运用，为工程师提供一种新的见识（Clifford 和 Bishop 1994）。如果让我们更好地理解物理问题，应能提出新的方法，该方法允许我们去观察一些特殊系统的动态演化过程。

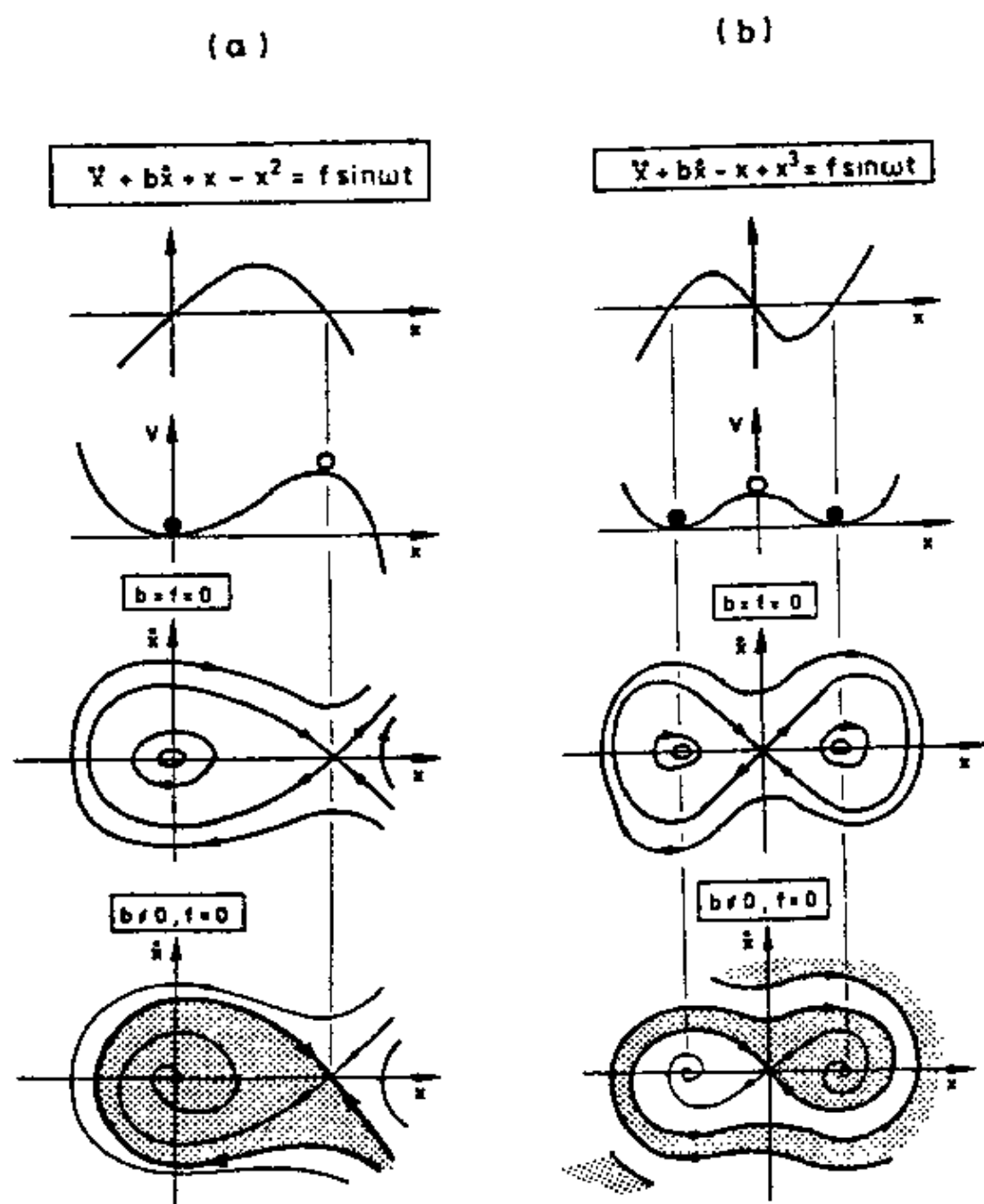


图 5 两种不同形式的恢复力 $f(x)$ 和势能函数 $V(x)$ 的示意图。当小球在 $V(x)$ 函数的势井内摆动运动 (马鞍点由白球标注) 时能观察到解。对于无阻尼和有阻尼自治系统 ($f=0$)，相图显示轨线的构成方式

三、瞬态破坏

设计一新结构或系统时，为了防止毁坏，工程师必须首先对

特殊系统可能的破坏模式进行评估。只有这样做了，该设计才能被采纳，在所有可预见的运行期内这些破坏模式才能避免。因此除了计算长期行为外，要弄清特殊的破坏途径，我们还必须对瞬态动力学进行研究。为说明这一点，我们又回到翻船问题，这样，所遇到的势井的普通的形式能让我们应用随后的技术于其他更广泛的领域中。

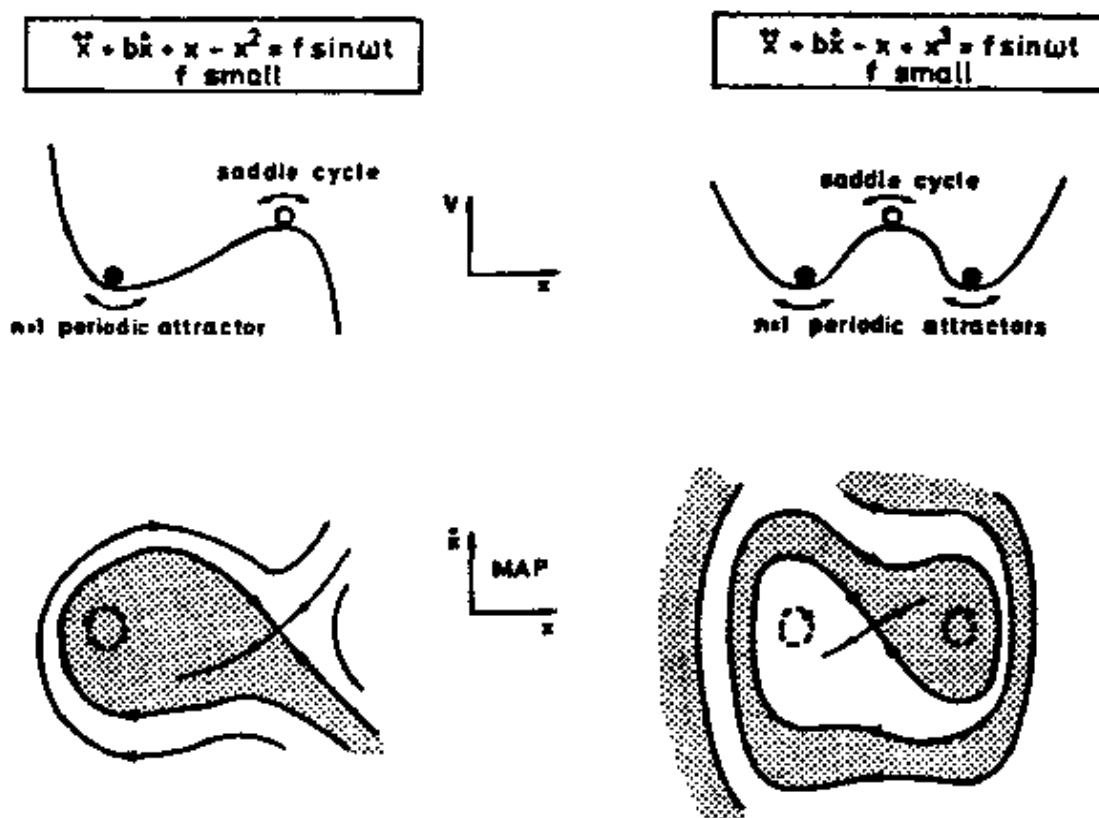


图6 具有单势井双势井势能函数的驱动系统的相图示意图。现在吸引平衡点是周期性的，除此以外对于小的激励值盆域与图5中的类似（与时间无关）

20世纪70年代在加拿大，在并不认为是特别危险的情况下，几艘渔船翻倾在西海岸。为了说明这些不寻常的事件，要求提供一份确定在当时情况下普通设计的稳定性的报告（见 Miller 等人 1986）。利用一特殊船形，在考虑了波衍射理论、作用于船体的流体力等因素，计算了船体6个自由度运动的完整的动力分析，并计及了非线性时间历程。3种不同的翻船机理相应于其报

告的重点部分。后者特别引人注目。因为很少或没有即将翻船的警告，图 6 显示了计算机模拟的输出结果，在时间 $t = 95$ 秒，波峰正好在船中，直到 $t = 103$ 秒船翻。船体的横摇、纵摇和左右摇摆的位移曲线也在该图中给出，并没有显示出即将发生灾难的预先警告。

Nayfeh (1988) 以及 de Kat 和 Paulling (1989) 的研究建立了翻船的最初机理，原因之一是在巨浪中的参数共振所引起的横摆。当然，新的见解不断地应用到复杂的船舶运动模拟方式，最近对在横浪中单自由度船舶横摇模型的研究重点在于怎样应用新的动力系统理论来定性观察长期的和瞬态的行为 (Mcrobje 和 Thompson 1990)。

四、混沌瞬变的影响

船舶的横摇运动可以运用牛顿定律，并按照基于船形的实验结果或计算结果得到的信息来加以描述。对于相似性质的船，这些恢复曲线具有相似的形状，为了考查问题的类型，一个有效的方法是用最简单而实用的形式进行近似化，以允许快速的数值积分计算解法。该方法为 Thompson (1989) 采用，用正则形给出的结果为：

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + x - x^2 = F \cos \omega t \quad (2)$$

该方程不仅是船舶翻倾的原型方程，而且更重要的，它是机械系统接近彻底失效所遇到的一般形式 (Thomson 1982; Thompson 和 Bishop 1988)。针对某一海况范围对该方程进行数值积分，以确定来自特定初始条件的瞬态运动产生的一个稳定状态的振荡是否是稳定，或者是否发生倾覆。与逃逸方程正则形式相似，船舶翻倾与粒子从势井中逃逸是一致的。

对于特定波浪，导致不同解的初始条件（用位移和速度表示）可以确定，并集中绘制形成吸引盆域。盆域可以是光滑而简单的，共存的吸引子解的盆域能够形成复杂整体图案，并且盆域可能变成分形的，它在不同放大倍数尺度上具有精细结构。

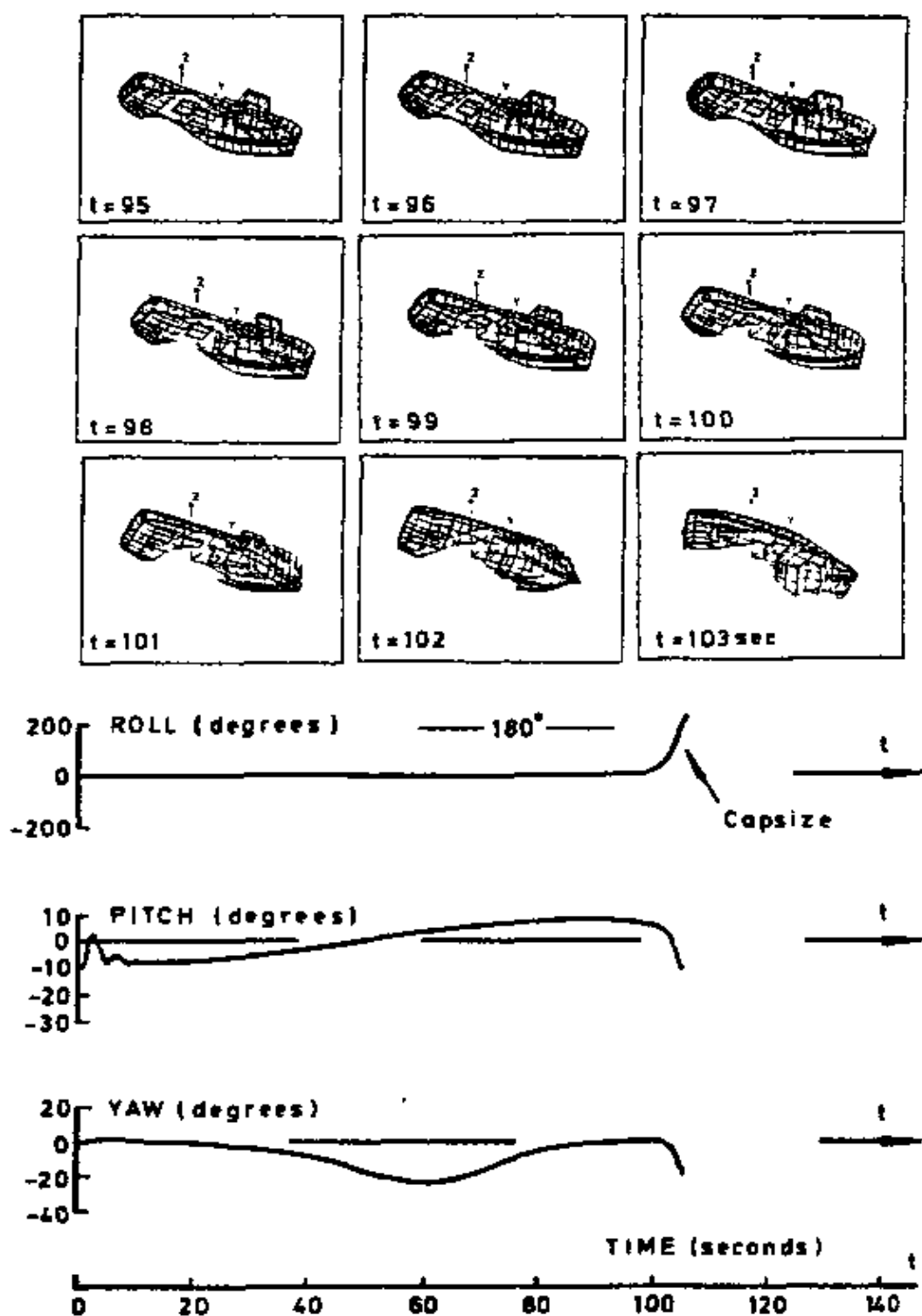


图7 由于在波峰上失去稳定的渔船翻倾的模拟以及横摇、纵摇和横荡随时间的响应轨迹

很可能就像在所有的工程问题那样，当企图解决像船舶运动这样的问题时，海洋环境是如此地复杂以至于不能准确及时地确

定某一位置船舶的精确条件，这样，模拟计算的初始条件不可能是已知的，并且由关注简单轨迹变为通过考查由所有解的集合组成的吸引盆域来评价稳定性，由此找出共同的吸引子解。在这个例子中，函数 F 的非零值对应于不同波高，但恒定频率的波，能确定稳定谐振的路径（Alexander 1989；Parker 和 Chua 1989）。由于在平衡路径或整体分叉时都可能发生分叉，因此在势井内的各种稳态吸引子就可能出现或消失。在这些事件的每一次中，吸引盆域将改变形状，甚至一起消失。一种称为同宿缠绕（Guckenheimer 和 Holmes 1986）的现象，产生一种复杂的盆域，其边界是分形的，在该意义上越靠近边界上点的研究，将导致越来越精细的尺度细节要求。图 8，图 9 和图 10 给出了 3 种随 F 值增加的盆域界限，而其他变量固定不变。所有在盆域内的运动轨线都收敛到稳定状态，并且吸引盆域是光顺的。在中间的图中有两个共存谐调解，其盆域缠绕在一起。这些解不会导致破坏，在这个意义上它们是安全的。由于那些在缠绕以前通常直接处于吸引盆内的，并且导致稳定、安全解的点，现在发现它们自己处于某一分形图之内并导致翻倾，即使不是直接如此，该全体事件的结果也是惹人注目的。如果给定靠近边界的初始条件，要用有限精度来确定解是衰退到稳态还是不稳定是不可能的。因此边界的分形性质给系统增加了真正不确定的因素。

分形盆域可能发生在不是混沌的系统中。在各种参数方面，它们可能是产生混沌的预兆，但是仅当持续解是周期性的时候，它们才可能存在，如图 7 所示。无论怎样它们所暗示的就是混沌瞬态的表现。在向吸引子解（也可在势井内或是在无限域内）移动之前，初值在分形域内出发的系统将停留在该系统内一段相当长的时间周期，所有这些图能够采用高效的算法来计算，该算法是基于由 Hsu（1987）论述的单元对单元映射技术，并且伴有 Foale 和 Thompson（1991）总结的新技术，它原是研究混沌系统提出的。

盆域分形特性的细节问题是很有意义的。在一定载荷值下，

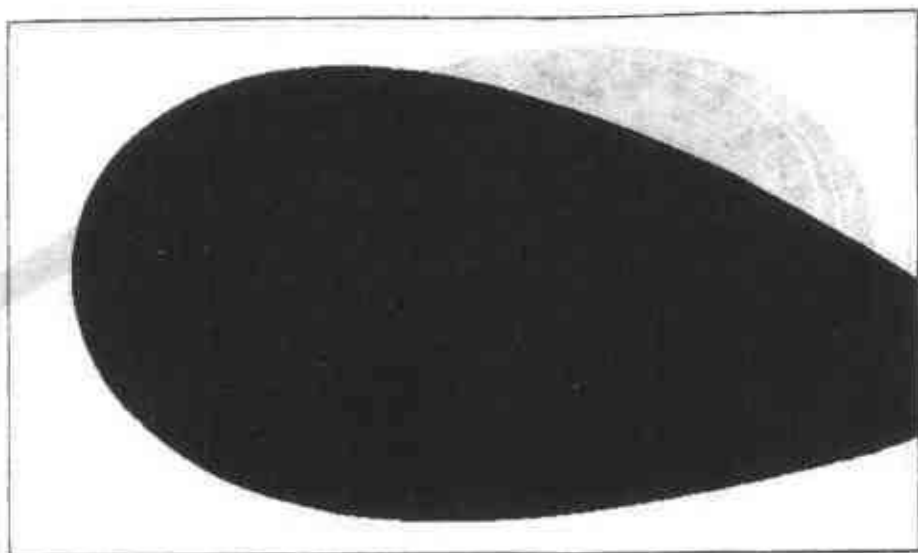


图 8 具有光滑盆域的逃逸方程的位移 - 速度显示轨迹的单元图。在盆域内凹凸不平的差异是由于离散过程的数值计算误差造成的，该离散过程可通过选择更好的网格来改进（来源于：Allan McRobie）

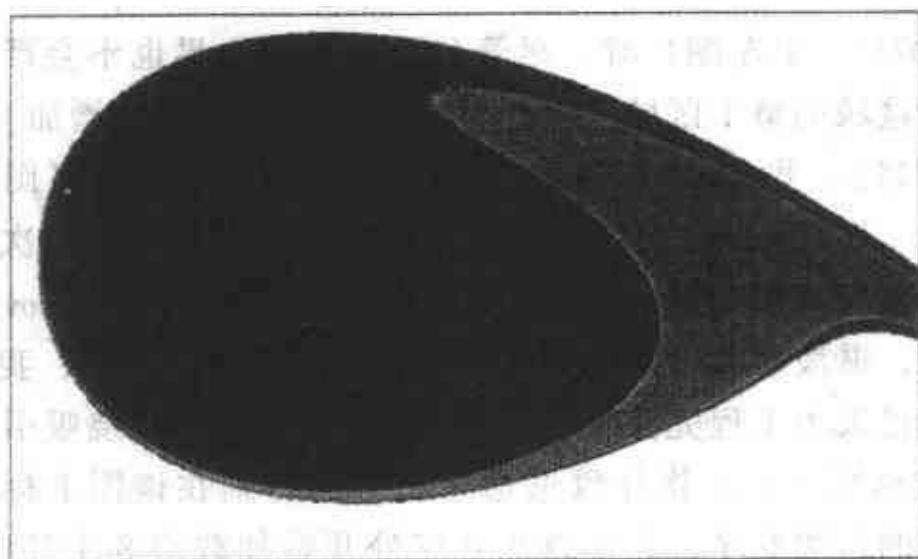


图 9 两个对抗的吸引子解的相图，其盆域都是光滑的。在这种情况下，两个导致周期运动的面积之和产生一个安全盆域（来源于：Allan McRobie）

盆域内的点能够发现，随着系统的演化，它发现自己在其中一个分形舌头之内，并将导致失效。对于工程师们而言，这些瞬变混沌现象的存在是十分重要的，他们的发展在确定结构/设计的完整性方面是有意义的。图 8 给出了 4 种不同激励幅值系统的方程

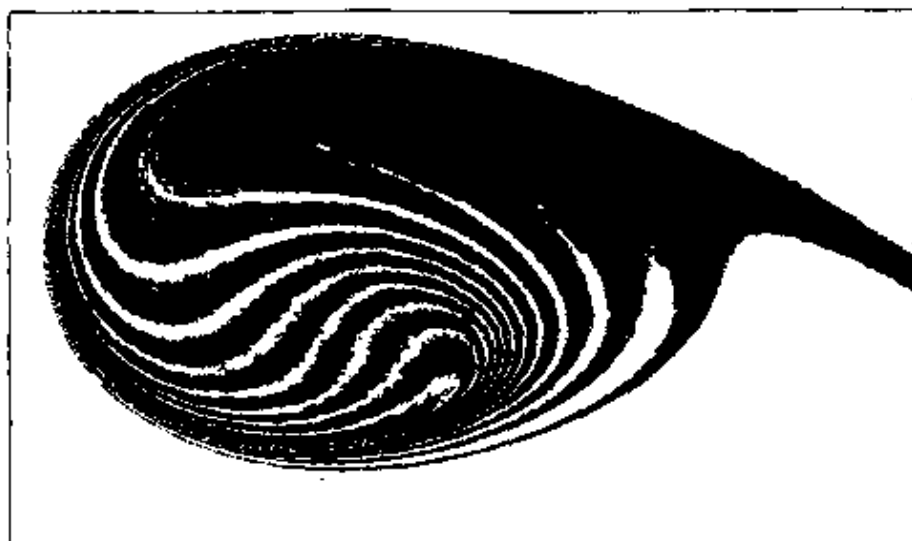
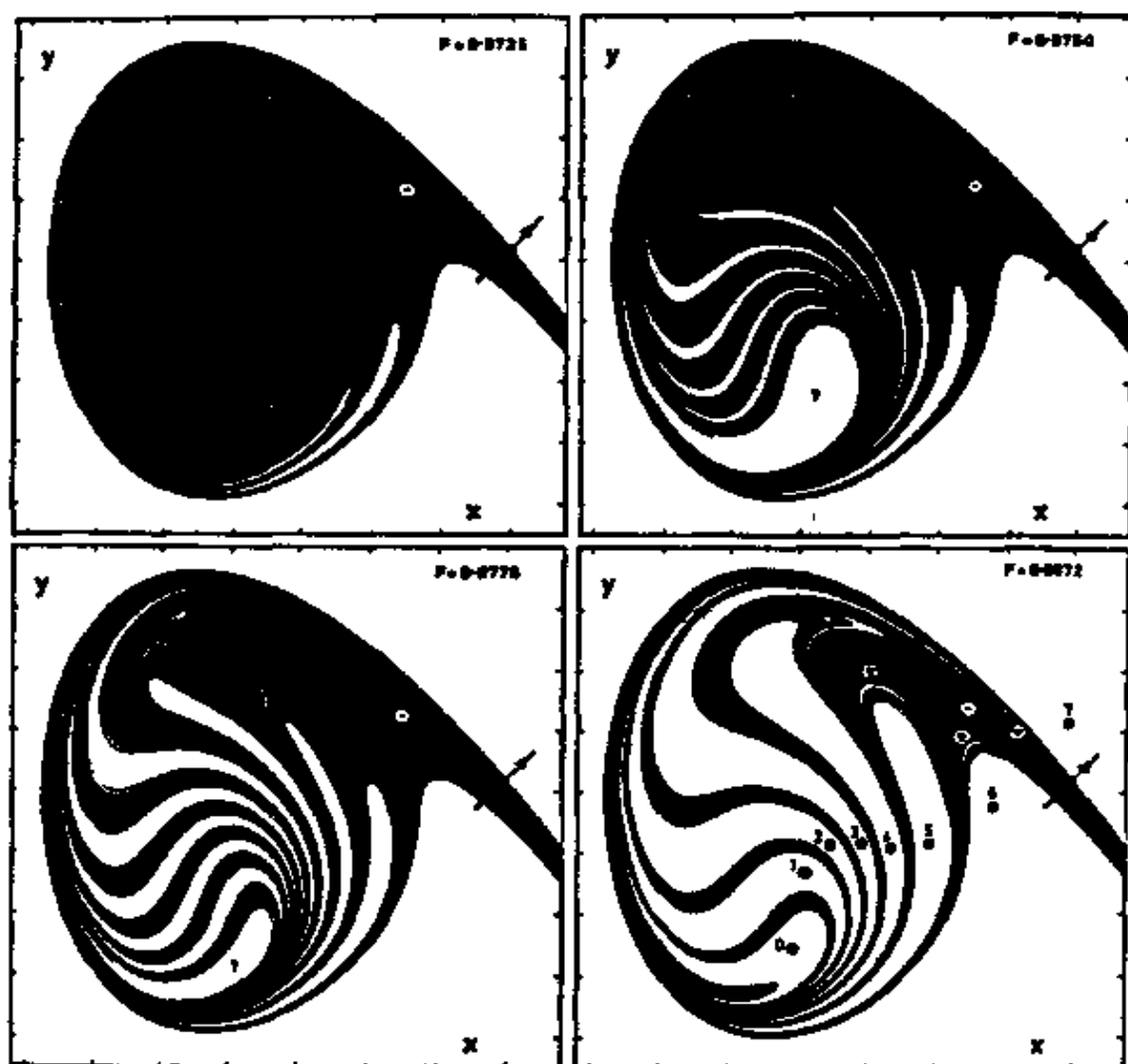


图 10 一个分形盆域。在边界附近点的任何细节展现了盆域的行程（舌形），该盆域导致安全、稳定的运动，并夹杂有导致失效的区域（来源于：Allan McRobie）

(2) 的初始条件范围 ($x, y = \dot{x}$) (也可见 Thompson1989)。在 $F = 0.0725$ (上左图) 时，尽管分形，盆域边界也不会严重地影响吸引盆域的整个区域，在此用黑色表示。当 F 值增加 (0.0750 和 0.0775)，我们发现盆域被侵蚀，并在最后一幅图 ($F = 0.0872$) 上，盆域已明显减小。这最后一幅也包括三阶次谐波共存解现象所增加的复杂性。在这最终图像上，就 Lyapunov 经典意义而言，谐波解对于无限小扰动仍然是稳定的。不过，我们认为这个解已失去工程完整性，即这些点可能位于围绕吸引子的有限 n 维球域之上，将导致逃逸。我们也看到在该图上标明了单一轨迹的逃逸顺序，它导致从 0 点处开始加载的 8 个环内逃逸。从标注 5 点开始的轨迹在 3 个波内消失。我们不仅已将注意力从静态分析和 Lyapunov 稳定性转移到动力学和工程完整性，现在已经明确可以制定基于瞬变动力学的设计准则。

如果演化参数连续地被消除，盆域被侵蚀的速度是非常明显的，该侵蚀过程可以通过绘制盆域面积来定量描述。当波高变化时盆域出现稳态条件，意味着系统的完整性。图 9 显示了当盆域衰退系统完整性的突然消失，进一步研究已表明这将是动力系统



Parameters: $\beta=0.1$ $\omega=0.85$ $\varphi=180^\circ$ $-0.8 < x < 1.2$ $-0.9 < y < 0.8$
 Attractors: $n=1 \dots \oplus$; $n=3 \dots \ominus$
 Escape sequence: $0 \rightarrow 7 \rightarrow \text{escape}$.

图 11 吸引盆域的衰退，来自模拟船舶翻倾的逃逸方程的同宿缠绕。谐波吸引子的位置由内部有 + 号的白色圆圈表示，而次谐波解为里而有一颗星（右下图）。待探索部分由问号标注，虽然现在已知道这些面积将包含更精细的细节。在右下图给出了 8 波后导致翻倾的结果

中的现象（例如见 Soliman 和 Thompson 1991 或 Lansbury 和 Thompson 1990）。很显然，任何工程设计应基于这种完整性消失的概念，而不是经典的分析，经典分析将只预测稳定性的最终消失。

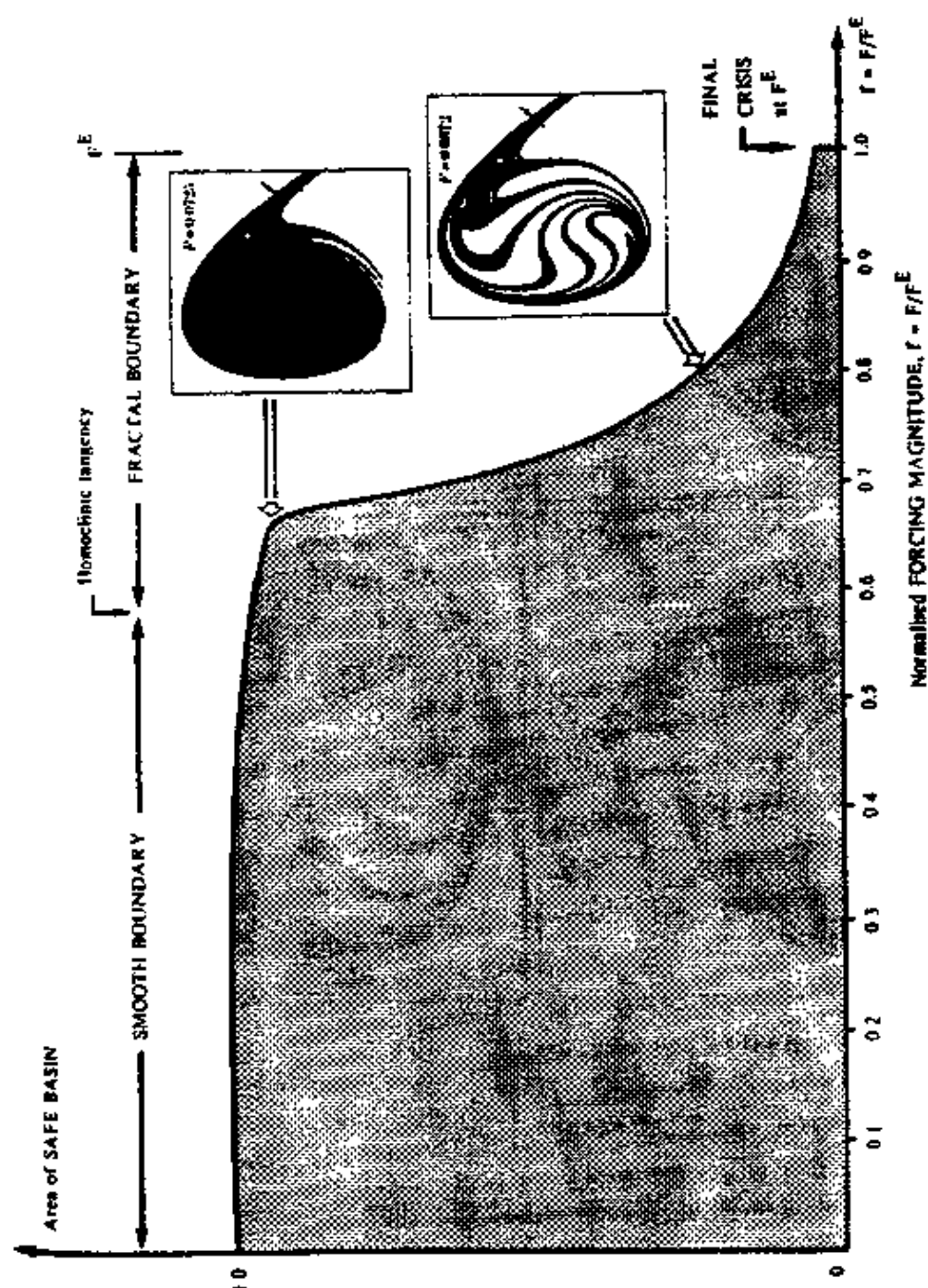


图 12 在分形衰退过程中安全盆面积随无量纲激励幅值的变化曲线,同宿缠绕预示着在工程完善方面的损失的突然开始

五、结论

混沌是工程动力学的典型组成部分,广泛存在于形形色色的问题中。存在耗散时,要产生混沌吸引子,必须持续输入能量。激励的规则性要求限制了大量真实的数学上的混沌系统。尽管为研究混沌而发展的技术仍然在应用,但大多数系统必须用随机过程来描述,它们没有这种潜在长期确定性。在发展单一势井的问

题上,混沌常常出现在参数空间的窄小窗口内,而在两个或更多势井之间的混沌是更普通的。混沌瞬变使自己能与动力工程系统紧密相连,相应的分形盆域与导致完整性的消失有直接的工程关联。

~~~~~  
致 谢  
~~~~~

作者愿对过去和现在 UCL 同事们所给予的帮助和忠告表示感谢。

参 考 文 献

- [1] Alexander, N. A. (1989). Computational Algorithms for the Global Stability Analysis of Driven Oscillators. Ph. D. Thesis, University of London.
- [2] Bishop, S. R., and Clifford, M. J. (1994). "Non-rotating Periodic Orbits in the Parametrically Excited Pendulum." *European Journal of Mechanics, A/Solids* 13 (4): 581 - 587.
- [3] Bishop, S. R., and Virgin, L. N. (1987). "The Onset of Chaotic Motions of a Moored Demi-submersible." *Proc. Sixth Int. Offshore Mech and Arctic Eng. Symp.*, II : 319 - 323.
- [4] Capecchi, D., and Bishop, S. R. (1994). "Periodic Oscillations and Attracting Basins for a Parametrically Excited Pendulum." *Dynamics and Stability of Systems* 9 (2): 123 - 143.
- [5] Casdagli, M., des Jardin, D., Ewbank, S., Farmer, J. D., Gibson, J., Theiler, J., and Hunter, N. (1992). "Nonlinear Modelling of Chaotic Time Series." In *Applied Chaos*, eds. J. H. Kim and J. Stringer. Wiley.
- [6] Clifford, M. J., and Bishop, S. R. (1994). "Bifurcational Precedences for Parametric Escape from a Symmetric Potential Well." *International J. Bifurcation and Chaos* 4 (3): 623 - 630.
- [7] Foale, S., and Thompson, J. M. T. (1991). "Geometrical Concepts and Computational Techniques of Nonlinear Dynamics." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 89: 381 - 394.
- [8] Guckenheimer, J., and Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dy-*

namical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Springer-Verlag, New York, Berlin, and Heidelberg.

- [9] Hsu, C. S. (1987) *Cell to Cell Mapping: A Method of Global Analysis for Nonlinear Systems*. Springer Verlag.
- [10] de Kat, J. O., and Paulling, J. R. (1989). "The Simulation of Ship Motions and Capsizing in Severe Seas." *Trans. SNAME*. 97: 139 – 168.
- [11] Lansbury, A. N., and Thompson, J. M. T. (1990). "Incursive Fractals: A Robust Mechanism of Basin Erosion Preceding the Optimal Escape from a Potential well." *Phys. Lett. A*150 (8, 9): 355 – 361.
- [12] Leven, R. W., Pompe, B., Wilke, C., and Koch, B. P. (1985). "Experiments on Periodic and Chaotic Motions of a Forced Pendulum." *Physica D*16: 371 – 384.
- [13] Lichtenberg, A. J., and Lieberman, M. A. (1983). *Regular and Stochastic Motion* Springer – Verlag, New York.
- [14] Lighthill, J. (1986). "The Recently Recognised Failure of Predictability in Newtonian Dynamics." *Proc. Roy. Soc. Lond.* A407: 35 – 50.
- [15] McRobie, F. A., and Thompson, J. M. T. (1990). "Chaos, Catastrophes and Engineering." *New Scientist*, 9 June, 41 – 46, also appears in *The New Scientist Guide Chaos*, ed. N. Hall, Penguin, 1991.
- [16] Miller, D. R., Tam, G., Rainey, R. C. T., and Ritch, R. (1986). "Investigation of the Use of Modern Ship Motions Prediction Models in Identifying Ships with a Larger than Acceptable Risk of Dynamic Capsize." *Arctec Canada Ltd. Report No. TP407E*, for the Transportation Development Centre of the Canadian Government.
- [17] Moore, D. R., and Weiss N. O. (1990). "Dynamics of Double Convection." *Phil Trans. R. Soc. Lond.* A332: 121 – 134.
- [18] Nayfeh, A. H. (1988). "On the Undesirable Roll Characteristics of Ships in Regular Seas." *Journal of Ship Research*. 3: 36 – 46.
- [19] Parker, T. S., and Chua L. O. (1989). *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer-Verlag.
- [20] Ruelle, D., and Takens, F. (1971). "On the Nature of Turbulence." *Comm. Math Phys.* 20: 167 – 192; 23: 343 – 344.
- [21] Shaw, S. W., and Wiggins, S. (1988). "Chaotic Dynamics of a Whirling

- Pendulum." *Physica* D31: 191 – 211.
- [22] Soliman, M. S., and Thompson, J. M. T. (1991). "Transient and Steady State Analysis of Capsize Phenomena." *Appl. Ocean Res.* 13: 82 – 92.
 - [23] Thompson, J. M. T. (1982). *Instabilities and Catastrophes in Science and Engineering*. Wiley, Chichester.
 - [24] Thompson, J. M. T. (1988). "The Principia and Contemporary Mechanics: Chaotic Dynamics and the New Unpredictability." *Notes and Records of the Royal Society*. 42: 97 – 122.
 - [25] Thompson, J. M. T. (1989). "Chaotic Phenomena Triggering Escape from a potential well." *Proc. Roy. Soc. Lond.* A421: 195 – 225.
 - [26] Thompson, J. M. T., and Bishop, S. R. (1988). "From Newton to Chaos." *Phys. Bull.* 39: 232 – 234.
 - [27] Ueda, Y. (1980). "Steady Motions Exhibited by Duffing's Equation: A Picture Book of Regular and Chaotic Motions." In *New Approaches to Nonlinear Problems in Dynamics*, P. J. Holmes, ed., 311 – 322. SIAM: Philadelphia.
 - [28] Virgin, L. N. (1987). "The Nonlinear Rolling Response of a Vessel Including Chaotic Motions Leading to Capsize in Regular Seas." *Appl. Ocean Res.* 9 (2): 89 – 95.
 - [29] Virgin, L. N., and Bishop, S. R. (1988). "Complex Dynamics and Chaotic Responses in the Time Domain Simulations of a Floating Structure." *Ocean Engng.* 15 (1): 71 – 90.
 - [30] Wiggins, S. (1990). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer – Verlag, New York.
 - [31] Wisdom, J., Peale, S. J., and Mignard, F. (1984). "The Chaotic Rotation of Hyperion." *Icarus* 58: 137 – 152.

Michele Boldrin

一、引言

要对混沌动力学对经济学各个领域已有的影响作出一个确切的评价，首先要求对动态经济理论发展过程的主要模式有个深入的理解。事实上，市场机制具有内在的不稳定性的观念在研究经济波动现象中经常只起着非常小的作用，而在过去的 25 年中，这种观念上的变化也只是或多或少的有一点。

因而，在商业周期均衡理论和对总量波动的计量经济建模中，起主导作用的方法是假设稳态均衡是确定性的并且内在稳定的，因而在没有连续外生冲击时，经济系统将会趋向一个稳态的增长路径。而波动的存在和它们显著的时间上的持久性则归因于这种或那种外生冲击的到来，最经常的是技术或偏好的冲击，或政府政策的随机性变化。然而，新近的研究表明一个有趣的反复，即假设总量的波动和其他复杂的动态经济现象可能具有内生行为，即使在没有随机“冲击”的情形下仍能持续下去。甚至不用给出关于宏观经济波动能够被解释为纯粹确定性的这种极端性的难以置信的观点，在产生我们观察到的总量波动的规模中，外生冲击可能只起着相对较小的作用，但必须认定是重要的。

内生商业循环假设并不完全是新的。事实上，最早的商业循环模型主要是这种类型，包括主要的一些商业循环模型，如约翰·希克斯、尼古拉斯·科尔达以及理查德·古德温等人所提出的。在所有这些模型中，稳态增长路径是局部动态失稳的，但偏离最终会被限制在“顶部与底部”之间。比如，导致向上变化的生产

要素的短缺，以及由于投资出现负增长所致的技术性的限制。从数学观点看，这些早期的模型都等价于一个自治的范登·堡尔振荡：它们被限制在平面动力学的情形下，因而，最复杂的情形也只能是极限环而已（这就是著名的庞开莱－本狄克森定理——译著注）。

在 50 年代后期，这种建模方法逐渐失去吸引力，取而代之的是斯勒茨基－费希尔－汀伯格的外生随机性“脉冲”的方法，它通过经济系统的线性“传播机制”而被转换为具有振荡的特征。

导致人们对早期内生循环假设支持下降的主要原因与这类早期模型的不恰当的行为基础有关。而从许多具有完全预期行为最优化基础上获得的许多简单均衡模型的稳定性结论——尤其是令人鼓舞的最优增长模型的“大道定理”，毫无疑问地导致许多经济学家认为内生循环模型不仅是缺乏明显的行为最优化基础，而且它假设必定与最优行为不一致。而消除这种长期的偏见可能是近期非线性经济动力学研究所取得的一个最重要的成就。

最近 15 年的理论研究表明甚至是非常标准的广为接受的跨时经济均衡的模型也能产生内在的波动和混沌，没有任何一个经济理论或模型能够不被修正。并且至少有一点似乎被经济学家广为接受，即混沌动力学正在市场经济理论中兴起。

尽管如此，所取得的进展也是十分有限的。下面我将简要介绍，在经验性研究方面大量的工作并没有足够证据证明经济的时间序列可以由低维的混沌动力系统产生。甚至经济学家也没有能够用经验性的相关参数值证明在这些经济模型中出现混沌，尤其是在可测量的经济学统计量相应的时间序列上。我本人的观点是这种成果不可能在近期内出现，对此我将在第四节作进一步介绍。

我将沿着以下的思路组织这篇稿件。在第二节，讨论那些我认为是在经济模型和经济学数据集中最强的“混沌障碍”因素。在接下来的一节中包括了一个已经在经济学和金融数据中为发现

混沌动力学证据所做的经验性工作的一个简要回顾。因为本人不是这方面的专家，因而这种处理可能会相对粗糙，感兴趣的读者可以自己去看一些引证的论文。在第4节，将从理论上关注完全竞争模型，尤其是其中的最优增长路径。最后一节简要总结一下本人对未来在非线性动力系统研究方面所应该做的一些工作的看法。

二、经济学中混沌的障碍

起初有人会认为证明经济模型被混沌过程驱使的动态演化是一个相当容易的工作，因为实际的经济表明存在较强的不可预测性的运动以及某些行为随时间推移而不断重现。无论它的精确形式如何，似乎显然的是描述现实经济系统运动规律的映射必须是高维的，而且必定是非线性的。

但是，为什么经济学家声称在资本主义经济系统中并没有发现存在混沌的迹象？我将努力说明这种对经济学中应用混沌理论的消极影响并不是思路狭窄的结果，而是在其背后存在诸多原因。

我们从经验方面入手。在第三节中指出，许多学者研究了大量经历非线性动力系统的时间序列变量，而只发现了极少的支持混沌存在的证据。他们所用的工具包括从相关维数分析到计算李雅普诺夫指数、重构相空间的吸引子、估算显式的非线性参数模型等。但没有发现具有说服力的或有用的证据。

我们面临的第一个问题是这些数据集本身的内在特性。大部分总量数据序列是非平稳的。国民生产总值（GNP）、消费、投资、进出口、政府支出等等，都存在某种时间趋势。它们是否随时间变化，是否具有非线性，没有一个明确证据。在任何用非线性动力系统技术研究自19世纪以来的宏观经济数据的场合都得首先把它们化成均值平稳的时间序列，而这本身将会破坏数据结构。因为我们不知道，它们真正的趋势（如果有的话）是什么？事实上必须引入某些分解定理，以便应用非时变的算子。在非线

性计量经济中这不是主要问题，只要随机过程满足沃尔德分解定理的应用条件，它们可以被放心地处理。而在此情形却不一样，如果系统不具备可分的线性趋势，那么去掉时变特性将会导致数据集性质的改变，进而破坏了真实的数据结构。

均值平稳性并不是经济数据中所不具备的惟一的重要性质，例如，在许多金融市场的时间序列研究中，通常的做法是将战后划分成以6~8年为时段的时期，并将每一时期做为不同总体中的样本。这种流行方式的理由是不同时间的样本方差具有很强的非平稳统计性质，这种现象与货币政策的变化以及政府操作金融市场的制度性安排的变化联系在一起。

以我们的观点看，第二个问题更具有本质性：足够的关于均值方差非平稳性的证据表明，我们几乎没有理由相信存在任何描述经济系统演化的时间不变的映射。经济政治制度和政治环境、市场结构、技术、规则、国际关系体系等的变化必然会影响到系统的运动规律，当然也会影响非总体的微观层次。这方面的例证是占绝对优势的。而当人们争论存在的某些仍然无法解释的宏观层次上的不变性时，将会使我们感到不安。正如我将指出，几乎不可能将一个简单的一维或二维混沌动力系统总是转化成能够重现在总体系统上的这些运动，而这些总体系统似乎呈现出某些经验上可证实的时间上的持续性。

对于所有的数据集，无论平稳与否，还存在第三个困难。这就是它们的质量以及这些年来收集测量手段的不一致性。经济数据不是实验室实验的结果，它们来自或多或少的大样本的调查，并且由统计技术推算得到。某些样本是十分可靠的，比如那些有关金融价格的数据，另一些则不然，比如工业生产或就业（至少在欧洲）。并且，那些关于什么是实际上可测量的同一个定义在抽样期间也经常变化。而时间序列则用统计方法逆推重构，数据中所能引入的噪声量很难量化，但它可以很大。

下一个困难来自（动力系统）的维数。试图用一维或二维映射解释所观察到的总量产出，资本存量或投资等的运动是显然不

可能的。这并不仅仅是量上的，而且是质上的。二次函数对于反映经济时间序列的相关统计性质显然是过于僵硬，并且自相矛盾。直觉上似乎很明显，如果经济系统是被某些非线性动力系统所驱动，那么它必然具有较多的自由度，也就是，如果它确实存在，那么对我们来说，无论是用解析或数值方法都是难以处理的，因而并无多大用处。显然，可以使用某些近似或简化形式以确保我们研究那些限制在很小相关特征空间上的运动，这已经是许多经济学家赖以开展研究工作的基本直觉。必须承认在这方面，我们并未稳操胜券。

这给我们带来了在经济学建模中研究混沌的理论障碍，这些障碍主要来自以下三个方面：收益递减，个体理性和市场完备性。要给出它们如何作用的完全描述是十分困难的。但我将试图给出一个启发性的例子。

我们从这样一个基本原理出发：经济个体（消费者，工人，企业等）会采取最大化个体回报的行为而不论这些行为如何难以定义，并且对于周边环境的变化作出理性的反映。现在加入这样一个假设：支付（收益）可以由相应区域凹的函数表示，即使是存在一些导致某些人想要抛弃这些假设的特例时，这个假设也很难被拒绝。从消费越来越多的某种物品中所获得的附加的快乐逐渐减少，就如同边际生产力递减一样。显然这在一开始并非是如此，但却渐近为真。最后，我们引进这样一个事实，真实的人类，似乎不会给将来很大的贴现因子（事实上利率很少高于10%）。并且在事实上，他们考虑到了自己现在行为对将来的影响，概括起来，一旦可能的话经济人愿意选择正规的重复性的行为，并且会避免持续的在消费、工作、及投资方面的振荡和巨变。换言之，存在基本的经济力量阻止内生复杂的动力系统的产生，如果不存在外部不规律的冲击的话。

我在上文中已强调了“一旦可能”这句话，因为它指出了另一个值得我们关注的关键性的障碍因素。对那些试图平滑自己的消费、工作、投资行为的个体建模所用的方法，经济学家主要是

将其置于一些他可以用于在不同“自然状态”下转换消费收入的市场中，这些市场从最广泛意义上讲是资产市场。不同类型的资产市场在不同时间转换财富与收入，同时使结果的偶发性建立在对不确定的总体事件的认识上。这种市场愈多、则有愈多的个人可以平滑他们的消费水平。尤其是，假如存在一个在未来任何时间任何可能的自然状态下都开放的市场，我们就称市场是完备的。在这种情形下，个体理性的力量以及递减的收益，将会阻止内生的振荡。完备市场的假设是在宏观和金融的有关文献中，更一般地说在动态建模中使用最多的一个。这并不是因为它被认为是真实的，而是因为：（1）它是一个做出预测的有力工具；（2）即使明显地真实的市场是远非完备时，但究竟是哪一些因素缺少，原因何在仍然是不清楚的。

其他经济学家可能会在我所讨论的这些因素中再加入一些其他的障碍性因素，这就是现在很普遍的关于经济人“理性”预期的假设，这在确定性环境下被认为是具有完全的预见。我并不完全确信这是一个主要的障碍因素。首先，没有人会觉得建立在一群傻瓜重复犯同样预见性错误之上的内生波动理论有任何进步意义。其次，认为抛弃完全预期假设会使混沌更有可能出现也未必正确。事实上，在这条假设被其他形式的规则所替代时，所获得的混合结果以及这些替代规则的任意性反而使争论变得彻底地难以确定，即使引进学习行为也无济于事。因为这取决于所选择的学习规则的类型它们是否具有极限环，是否稳定等等，这些都是不确定的。

总之，在经济学中引入混沌时，存在的这些令人悲观的障碍因素促使我对最基本的（并广泛使用的）动态经济模型著作做一个直觉上的叙述。这有助于理解为什么市场完备性以及理性预期行为假设起着关键性的作用。

让我们从一个不最大化收益，而是简单地随大流的非理性个人开始。在理查德·H·戴（1982）的一篇重要的文献中，他考虑了一个部门的新古典增长模型。它的资本积累的动态方程有如

下形式

$$k_{t+1} = s(k_t)f(k_t)/(1 + \lambda) = h(k_t) \quad (1)$$

此处 s 是储蓄函数, f 是生产函数, $\lambda > 0$ 是外生的人口增长率。这是索罗增长模型的离散版本。索罗模型是宏观经济学、发展经济学、金融学等研究领域的一块基石。在此离散形式的索罗模型中, 假设一个给定的外生储蓄率以及一个新古典的、凹的生产函数, 决定了映射 $h(k_t)$, 它是单调增长的, 而且具有惟一的内部稳定态 $k^* = h(k^*)$, 因此, 在这种情形下振荡是不可能出现的。

索罗模型的困难在于它不是一个最优化模型, 亦即, 总的储蓄函数不是从跨时优化中得到, 为证明我们的观点, 可以随意取一个合理的 $s(k_t)$ 的形式, 一个典型的索罗模型的不变的储蓄率和柯布 - 道格拉斯形式的生产函数 f , 方程 (1) 变为

$$k_{t+1} = \sigma B k_t^\beta / (1 + \lambda) \quad (2)$$

这是单调的, 因而稳定的。戴的第一个修正是关于生产函数的, 他引入一个“污染效应”, 得到:

$$k_{t+1} = \sigma b K_t^\beta (m - k_t)^{\gamma} / (1 + \lambda) \quad (3)$$

它在某个参数域内会出现 3 周期。回到柯布 - 道格拉斯形式, 并且使用一个变化的储蓄率戴得到:

$$k_{t+1} = a / (1 + \lambda) k_t [1 - (b / \beta B) k_t^{1-\beta}] \quad (4)$$

这里利率 $r = \beta y / k$ 。这个方程同样在可行的参数域内会出现混沌。

戴的例子表明一个十分简单的行为假设和模型结构能产生一个非常复杂的动力系统。然而, 有人会问, 是否这种行为假设、事实与给定环境下的最优化行为相一致? 例如, 不变的储蓄率假设经常用于早期的描述性的增长模型, 并且事实上可以从跨时效用函数最优化 (在一定的假设下, 如对数效用函数) 中得到, 但是当使用 (3) 中类型的生产函数时, 它就会变得不可信: 为什么一个效用最大化个人会储蓄到资本边际回报为负的点? 如果他能以更少的资本获得同样的生产水平。显然他不会这样做, 这暗示了 (在给定技术假设下) 一个类型 (3) 的策略函数, 在卡斯

(1965) 类型的最优增长模型中, 从来不可能出现。

虽然看上去不明显, 但戴的可变储蓄率和单调生产函数与跨时效用最大化是不一致的。这一点是田德切特和 Nishimura (1983) 等人指出的, 他们的观点如下: 令 $y_t = f(k_t)$ 为时间 t 的总产出, 它是资本存量的函数, 当跨时的市场完备时 (即在 $t = 0$ 时, 存在一个在未来 $t = 1, 2, \dots$ 任何时候开放的市场), 消费者和生产者, 只是简单地面临一个无限期界的动态优化问题, 即选择如何划分每一期的消费与未来投资, 以最大化 $\sum_{t=0}^{\infty} u(c_t) \delta^t$, 此处 u 是凹的效用函数, δ 是时间贴现因子, $\delta \in (0, 1)$, k_0 作为初始条件给定。即使生产函数不是凹的, 最优的规划解为 $\{k_0, k_1, k_2, \dots\}$ 也可表示为一个策略函数 $k_{t+1} = \tau(k_t)$, 它是单调的。为证明这一点, 应用动态规划技术, 定义价值函数 $W(k)$ 如下:

$$\begin{aligned} W(k_t) &= \max [u(c_t) + \delta W(k_{t+1})] \\ \text{s.t. to: } c_t + k_{t+1} &= f(k_t) \end{aligned} \quad (5)$$

经济人在每一个时期面临同样问题, 策略函数 $\tau(k_t)$ 有惟一的解函数, 单调性可以在 (c_t, k_{t+1}) 平面上从约束中得到, 这是一条斜率为 -1 的直线, 函数 $u(c_t) + \delta W(k_{t+1})$ 的水平曲线是凸的 (因为 u 和 W 是凹的), 假设 $k_{t+1} > k_t$, 便有 $f(k_{t+1}) > f(k_t)$ 。最优选择 $k_{t+2} = \tau(k_{t+1})$ 在切点上, 且必然比最优选择 $k_{t+1} = \tau(k_t)$ 要大, 因为 u 和 W 是单调增长的。

函数 τ 因而是单调不减的, 这样引出的动力系统不会有极限环或混沌。经济上的预测是, 这种社会经济会渐近地收敛到某个稳定态, 当 f 是凹时, 定态是惟一的。

三、经验性的研究

这一节只作简略的介绍, 读者可以认为是一个评论性的文献介绍。关于细节可以参阅近期 Brock 和 Dechert (1991), LeBaron (1989, 1991) 和 Scheinkman (1990) 等人的文献。

对于经济数据中存在的非线性只是近 10 年才引起严重关注,

至少我没有发现更早系统性的调研工作。解决问题的方法主要有两种：其一是统计方面的，主要是时间序列分析；另一个是由奇异吸引子理论所引出的。我在此集中讨论第二种分法，但也会引证一篇与第一种方法相关的文章。

商业循环似乎具有不对称性。扩张时期既长又慢，收缩时既陡又快。论述这个问题的著作实例有 Blatt (1980), Falk (1986), Neftci (1984) 以及 Neftci 和 McNevin (1986)，存在这些不对称性的事实似乎成为人们最强有力的理由来相信某些非线性机制在解释商业周期时是有用的，但另一方面，它几乎与混沌动力学本身没有任何关系。

金融数据，尤其是股票的回报，当给出一个线性自回归方程时，其残差的方差显示出非平稳性。调查这些非平稳性的来源使人们注意到状态变量的残差的方差和残差本身存在的非线性依赖关系，这导致了一系列时间序列模型，如 ARCH（异方差下的自回归）和 GARCH（广义的 ARCH）。部分相关的研究文献包括：Bollerslev (1986, 1988), Engle (1982), Hinich (1982), Hinich 和 Patterson (1985), White 和 Domowitz (1984)。

第二种方法是使用非线性动力系统理论对给定的时间序列作随机或确定性解释的统计检验。这里给出的基本工具是相关维数，Grassberger 和 Procaccia (1983)，以及更一般地是对那些非线性动力系统的吸引子的拓扑不变量的测量，能惟一地大量观测中重构出来 (Takens 1983)。对这些方法的一个杰出的运用可以参见 Eckmann 和 Ruelle (1985)。

必须强调经济学家的工作已经对这种方法论作出了重要的理论贡献。最重要的是获得了相关维数估计和渐近分布特征的统计基础。Brock 和 Dechert (1988), Brock 等人 (1988), Brock 等人 (1989) 等已经开发出非参数检验方法，用于相关维数上以检验时间序列是独立同分布的 (H_0 假设)，或是包括一套确定性解释的备选方法 (H_1)。关于 BDS 检验的附加特征，尤其是其小样本性质，以及维数的计算同样已由 Ramsey 等人 (1988), Ramsey 和

Yuan (1989), Hsieh 和 LeBaron (1988) 等人给出。这些重要的贡献不应该被忘记。

而这些方法在实际时间序列分析中的运用却是具有不同的结果, 典型的方法步骤如下:

1. 提供平稳的数据集以及最好的 ARIMA 模型与之相拟合, 对于残差在不同嵌入层次上的相关系数作出估算 (见 Brock 1986)。

2. 相关系数的估算值被用于建立不同的统计检验上, 首先在 BDS 统计量上以检验 ARIMA 过程的残差是否确实是独立同分布。另一个有用的工具是“混合诊断”, 由 Scheinkman 和 LeBaron (1989a) 引入。

3. 从同样数据集中估算李雅普诺夫指数, 以便检验对初始条件的敏感性。由于缺乏关于这些统计量的开创性理论, 如何解释从这些统计量中得到的数值特征尚不清楚。

4. 最后人们将通过几何方法重构, 至少是吸引子部分重构。

要从经济学中发现步骤 1 中所陈述的低维数的估计值并不困难。但只有很少的数据能够同时通过第二步和第三步检验, 并且几乎找不到接近可推导出几何上可以解释的吸引子的形状的数据, 下面给出了大多数不成功的尝试。

Brock 和 Sayers (1988) 考查了从美国国民收入账户中获得的数据, 以及不同的就业数据, 所有这些数据都无法通过第二步。Frank 和 Stengos (1988) 考查了不同的贵金属价格, 以及加拿大国民收入账户, 同样没有低维数混沌的有力证据。Scheinkman 和 LeBaron (1988b) 回顾了某些已由 Brock 和 Sayers 等人检查过的数据, 并且算出一个较小的正的李雅普诺夫指数, 但没有发现其他确定性混沌存在的证据。

最后, Scheinkman 和 LeBaron (1989a) 估计了 1226 组自 1960 年以来每周在 CRSP 上加权的美国股票收益指数的观察值。他们估算出的维数估计值约为 6, 同其他维数测算一样。他们的数据通过了第二步检验, 甚至是在从拟合时间序列的 GARCH 模型所

获的残差，即假设独立同分布的残差被渐近拒绝的情况下。一个正的中度的李雅普诺夫指数由两位作者联合 David Ruelle，和 Jean Pierre Eckmann 以及其他人所估计出，但无法对吸引子作出重构。而当所有这些结果令人信服地指出存在着由 GARCH 模型算出的股票收益附加结构时，人们才能很谨慎地解释为这是存在混沌的正面证据。这些由两位作者共同提供的观点，出于不同的原因被提出来。由于缺乏任何开创性的理论使得无法对李雅普诺夫指数正的估计值作出确切的解释。维数估计方法看上去十分有用，但同时不得不受到怀疑，因为存在由 Ramsey (1990) 和 Yuan (1990) 所指出的这种估计上的严重缺陷，以及由 Ramsey, Sayers 和 Rothman (1988) 等人从不同数据集中给出的对照结果。最后，我无法回避在此文中所提及的由 Ruelle (1990) 所提出的简单的理论结果，尤其是在解释这种估计结果时更要加倍小心。在文章中，Ruelle 导出了一个相关维数的界限，等于 $2\log_{10} N$ ，此处 N 是数据集的大小。在较高的嵌入维数中出现饱和时（由于样本是有限的），则可得出估计值为 $2\log_{10} N$ ，甚至在标的的数据并非由混沌过程产生的情况下，而估算出 $2\log_{10} (1226)$ 约为 6.2。

四、理论研究

正如我在前面所指出的，这个领域的中心工作是提供一个与基本经济原理相适应的混沌动力学模型。着手解决的要点是对我在第二节所提到过的简单增长模型的推广。进一步的研究工作旨在证明它所展示的简单的动力学特性仅仅是由于一个部门假设所造成的，在这个层次上的批判是正确的。实际上这类批判太多了，事实上已经证明任何一种动力系统与一般的 n 部门的最优增长模型是一致的。在这方面花些时间讨论是值得的，因为它将提供给非经济学的读者一种经济学家如何作研究工作的一种方法上的感受。

这里是一个对于一般模型的非常粗糙的描述（更详细的叙述见 Boldrin 和 Montrucchio 1991, ch. 2）。

在每一期 $t = 0, 1, 2, \dots$ 代表性个人的消费向量为 $c_t \in \mathfrak{R}^m$, 相应的效用函数为 $u(c_t)$, 是增的, 凹的平滑函数, 所有的自然状态完全由股票的回报向量 $x_t \in \mathfrak{R}_+^n$, 以及可行集, $F \subset \mathfrak{R}_+^{2n} \times \mathfrak{R}^m$ 所组成的点阵所确定。当日的股票, 当日的消费, 明日的股票是技术上相容的, 即 F 中的一个点为 (x_t, c_t, x_{t+1}) 。现定义:

$$V(x, y) = \max_c [u(c); \text{s.to: } (x, c, y) \in F].$$

令 $D \subset \mathfrak{R}_+^{2n}$ 是 F 在 CS 坐标上的投影, 则 V 是短期或即时回报的函数, 它将给出在时刻 t , 当日状态为 x , 并且我们选择的明日状态为 y 时, 所取得的最大的效用。显见, 最大化折现和

$$\sum_{t=0}^{\infty} u(c_t) \delta^t \quad \text{s.to: } (x_t, c_t, x_{t+1}) \in F \quad \text{等价于最大化}$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} V(x_t, x_{t+1}) \delta^t \quad \text{s.to: } (x_t, x_{t+1}) \in D$$

参数 δ 表示未来的效用折现到现在的值, 取值在 $[0, 1)$ 上。

以下关于 V 和 D 的假设可以从对 u 和 F 的基本假设中导出:

(A.1) $V: D \rightarrow \mathfrak{R}$ 是严格凹的且光滑的, $V(x, y)$ 对 x 是增的, 对 y 是减的。

(A.2) $D \subset X \times X \subset \mathfrak{R}_+^{2n}$ 是凸的, 紧的, 并且有非空内部, X 同样是凸的, 紧的, 具有非空内部。

则我们所面对的最优化问题等价于以下的动态规划:

$$W(x) = \max [V(x, y) + \delta W(y); \text{s.to: } (x, y) \in D]. \quad (6)$$

(6) 式的解是一个映射 $\tau_\delta: X \rightarrow X$, 描述了最优的状态序列 $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ 关于 X 的动态系统 $x_{t+1} = \tau_\delta(x_t)$, 由 τ_δ 导致的时间演化包含所有关于我们经济模型的动态行为的相关信息。

下面的问题是: 什么是对动态系统 τ_δ 的渐近行为的预测? 面在该系统中一个稳态经济在竞争均衡和完全预期下会不会收敛? 第一个答案是 (详情见 McKenzie 1986):

大道定理 (离散时间): 在假设 A.1 和假设 A.2 之下, 加上 V 的光滑性, 存在一个值 $\bar{\delta} < 1$, 对所有的 $\delta \in [\bar{\delta}, 1)$ (6) 式的解函数 τ_δ 具有惟一的、全局吸收的不动点 $x^* = \tau_\delta(x^*)$ 。

但是大道性质并不是故事的结局，当 δ 小于 $\bar{\delta}$ 时，对给定的 V 和 D ，由 τ_δ 可以导出许多更复杂的动力系统，我们将使用两部门模型来说明。对于更一般的情形的详细分析，参见 Boldrin 和 Montrucchio (1986)，以及 Montrucchio (1990) 对连续时间类型的讨论。

下面是对两部门经济的一个简单描述。细节请看 Boldrin (1989)，以及 Boldrin 和 Deneckere (1990) 等人的文章。假定存在两种物品（资本物品和消费物品）和惟一的代表性个人，点阵 (w_t, r_t, q_t) 表示在 t 时刻工资率，总的资本租金，以及资本价格。它们以消费品为单位，消费品的价格在所有时间都固定为 1，并假定完全预期。

在每期，消费者赋予 1 单位的劳动时间，这是他在当前工资水平下无弹性地供给的，并赋予总量为 k_t 的资本存量，这是从前期的消费 - 储蓄决策中决定的，而且消费者将资本无弹性地供给生产部门，因而他的预算约束为：

$$c_t + q_t[k_{t+1} - \mu k_t] = r_t k_t + w_t$$

此处 $(1 - \mu)$ 为资本折旧率，给定初始资本量 k_0 ，消费者的问题是选择一个消费序列 $\{c_t\}$ 和总储蓄 $\{k_{t+1} - \mu k_t\}$ 以最大化在每一期预算约束下的全寿命期消费流的折现值。

物品由两种工业部门生产，我们总结为两种生产函数： $y^1 = F^1(k^1, l^1)$ ， $y^2 = F^2(k^2, l^2)$ 。

此处上标 1 代表消费部门，上标 2 代表资本物品部门， k^i ， $i = 1, 2$ 是资本和劳动力的总量。企业的价格序列 $\{w_t, r_t, q_t\}$ 为给定。于是他们的最优决策问题变为选择一组生产要素——需求序列 $\{k_t^i, l_t^i\}$ 以最大化未来利润流的折现值。整个经济的生产可能性函数为：

$$\begin{aligned} T(k_t, y_t) &= \max F^1(l^1, k^1) & (T) \\ \text{s.t.} &: F^2(l^2, k^2) \geq y \\ & l^1 + l^2 \leq 1, k^1 + k^2 \leq x \\ & l^1, k^1, l^2, k^2 \geq 0 \end{aligned}$$

竞争均衡序列 $\{c_t, y_t, q_t, r_t, w_t, l_t^i, k_t^i\}_{t=0}^{\infty}$ 可以从最优资本序列 $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$ 作下列最优化问题中得到,

$$W(k_0) = \max \sum_{t=0}^{\infty} V(k_t, k_{t+1}) \delta^t$$

$$\text{s. to: } (k_t, k_{t+1}) \in D$$

$$V(k_t, k_{t+1}) = T(k_t, k_{t+1} - \mu k_t)$$

使用以下关系式, 它们是由定义的均衡条件得到,

$$c_t = V(k_t, k_{t+1}) \quad (7a)$$

$$y_t = k_{t+1} - \mu k_t \quad (7b)$$

$$q_t = \delta W^1(k_{t+1}) = -V_2(k_t, k_{t+1}) \quad (7c)$$

$$r_t = V_1(k_t, k_{t+1}) \quad (7d)$$

$$w_t = V(k_t, k_{t+1}) + q_t(k_{t+1} - \mu k_t) - r_t k_t \quad (7e)$$

$$l_t^i = l^i(k_t, k_{t+1} - \mu k_t), i = 1, 2 \quad (7f)$$

$$k_t^i = k^i(k_t, k_{t+1} - \mu k_t), i = 1, 2. \quad (7g)$$

令 $\tau_\delta(\cdot): [0, \bar{k}] \rightarrow [0, \bar{k}]$ 为与 $W(\cdot)$ 相关的政策函数, 我们将证明, 任何给定 C^2 函数 $\theta: X \rightarrow X$, X 是实直线上的一闭区间, 我们可以找到一个两部门经济以及贴现率 $0 < \delta < 1$, 在此, θ 为最优的政策函数 τ_δ , 这里应用由 Boldrin 和 Montrucchio (1986) 所证明的一个一般性定理的结论。

命题 1: 给定可行集 $D \subset X \times X$, X 是 $\Re$ 上的闭区间, 令 $\theta \in C^2(X, X)$ 由 $(\theta) \subset D$ 表示, 则存在一个短期回报函数 $V: D \rightarrow \Re$, 连续且严格凹, 和一折现因子 $\delta^* \in (0, 1)$, 例如 $\theta = \tau_{\delta^*}$, τ_{δ^*} 是与给定的 (D, V, δ^*) 相关的最优政策函数, 进而, $V(x, y)$ 对 x 是增的, 对 y 是减的, 并且我们可以发现两个生产函数 F^1 和 F^2 , 满足 (T1) 和 (T2)。

证明 (简要): 令 $\theta: X \rightarrow X$ 给定, 考虑以下效用函数: $U(x, y) = -(1/2)(y - \theta(x))^2 - (L/2)x^2 + mx$

L 和 m 是两个正实数, 对于 $L > 0$ 足够大时, $U(\cdot)$ 是对 x 和 y 严格凹的, 同样, $\max_y U(x, y) = U(x, \theta(x)) = W(x)$ 。定义

W 为相应的价值函数, 通过简单的运算可得短期回报函数 $V(x, y) = U(x, y) - \delta W(y)$ 为:

$$V(x, y) = -(1/2)(y - \theta(x))^2 - (L/2)x^2 + mx(\delta L/2)y^2 - \delta my.$$

恰当选择 L , m 和 δ , 使 V 是严格凹的且对 x 和 y 是单调的, 易见这一点总是可行的, 而且可以估计出 δ^* 和 L^* 的上界。

现在, 为找到生产函数 F^1 和 F^2 , 采取如下方法:

设资本折旧率 $(1 - \mu) = 1$, 则 $k_{t+1} = y = F^2(l^2, k^2)$ 。

选择 F^2 如下: $y = \min[1 - l^1, (x - k^1)/\gamma]$, $\gamma \in [0, 1]$ 将在以后给出定义这样选择的 F^2 显然满足 (T_1) , (T_2) 。为了找到 $F^1(l^1, k^1)$ 不断地将 $y = 1 - l^1$ 和 $x = ry + k^1 = \gamma(1 - l^1) + k^1$ 代入 $V(x, y)$ 中然后检验是否存在一个参数值使其成为新古典生产函数。证毕。

这种间接方法并不是可以从标准增长模型中证明混沌动力系统存在的惟一方式。在以上我们证明的命题中, 通过一对给定的生产函数和效用函数, 同样可以直接地证明所得出的动力系统 τ_δ 是混沌的。此处的技术性困难主要在于函数 τ_δ 不能直接计算, 必须借助于变分法重建它的量化特性。由 Boldrin 和 De-neckere (1990) 所研究过的典型例子如下:

例: 令 $V(k_t, k_{t+1}) = [a(k_t - rk_{t+1})^\alpha + (1 - a)(1 - k_{t+1})^\alpha]^{1/\alpha}$, 这可以从 $u(c) = c$, F^1 为柯布 - 道格拉斯以及选择与证明中相同的 F^2 得到。复杂的动力系统当 $\delta \in [r/(1 - 2\alpha), (a + r)(1 - \alpha)]$ 时会出现, 而此时政策函数 τ_δ 是一个具有两周期的环。当 δ 取值在 $\delta^- = r/(1 - 2\alpha)$ 和 $\delta^+ = \frac{a + r}{1 - \alpha}$ 的邻域内, 这些环当 $\delta \in (\delta^-, \delta^+)$ 时是局部稳定的。在其他地方则不稳定。读者应当注意到, 对于给定的 $\delta < 1$, 总是有可能分别选取 $\alpha \in [0, (1 - \gamma)/2]$ 和 $\gamma \in (0, 1)$, 使得 $\frac{\gamma}{1 - 2\alpha} = \delta$, 这意味着在每个折贴水平上, 我们总可以找到某些技术, 使得两部门模型和第二节所述的类型一样, 但是存在借贷约束。

下面给出一些附加的结论。作者假设偏离完备性市场，迫使投资者和企业家从资本存量的当前回报中部分融资，这会破坏均衡序列的单调性，因为它不能确保总的资本回报 $r = kf'(k)$ 会如同 $f(k)$ 一样随着 k 增加而增加。当生产要素不能被较容易地替代时，总回报将会递减，因为资本存量水平较高时投资水平会减缓。Woodford 已经通过一个简单的例子证明混沌的政策函数将会出现。

Woodford 通过加入借贷约束得到混沌解，其折贴率与观察到的利率是一致的。但他的例子仍然未能成功地提供一个商业周期振荡的可信的模型，因为除了不易参数化外，另外得出的资本存量与总回报的巨大收缩结论是从来未被发现过的。

其他作者也已试图在基本的增长模型中引入不同的外部效应以期得到内生混沌振荡的例子。这些例子的共同特点是，混沌动力系统只有在低的折现水平下才可能出现。但所有这些模型都过于抽象和不完备，并且没有一个是作了参数化的努力。在此将这些模型列举如下：Boldrin 和 Rustichini (1991)，Denekere 和 Judd (1988)，Dutta 和 Sudaram (1989)，Fukuda (1991)，Matsuyama (1990)，Shleifer (1986) 等。

最后，我们不能不提到由 Benhabib 和 Day (1982) 在 OLG 框架下所做的工作。他们结论纯粹是理论性的：他们在较高的抽象程度和不太现实的可跨代消费/储蓄行为的模型中证明了混沌存在的可能性。由 Benhabib 和 Day，以及后来由 Grandmont (1985) 所研究过的 OLG 模型比经验性研究所使用的无限期界模型适用性较差：没有生产和资本存量，每一期时间持续约 25 年，并且存在一大堆的均衡点迫使人们小心选择。而在 Reichlin (1986, 1987) 的文章中也存在某些类似问题——即使引入生产函数和资本积累会使模型的应用性稍强些。在任何场合下我都不赞同这些结论。

五、结论

非线性动力学，尤其是混沌理论的出现，给经济学带来了令人振奋的促进。尤其是它提供给我们一种所需的分析工具，以思考由市场行为而不是由超自然或随机力所驱使的经济的内生振荡现象。它促使我们回顾所熟知的经济和金融时间序列，以及对这些正当的统计解释提出疑问。即使这并未带来任何经验上与我们所理解的经济学和金融数据相关的混沌理论的证据，它也为许多研究非线性经济机制的分析家们打开了视野。

在理论方面显示出了相似的特征，虽然它尚未成熟，但经济模型非线性性质的研究却可能提出对所观察到的经济波动的洞见。在我们使用过的这些模型中，我一直试图指出在确定要素配置决策，投资活动等等中，跨部门替代效应（由不同部门不同的利润所导致），以及跨时替代效应的重要性。其他作者已经强调了市场不完备性效应以及在对策论中所考虑的策略行为可以作为动态失稳的相应来源。

虽然我仍然怀疑一个综合以上问题的大模型是否可能出现，我还是确信在这些方向上不间断的研究工作将会揭开在所观察到的市场不稳定性背后的其他重要经济因素。是否能够证明混沌理论是一个有力的工具用来经验性地分析那些可检验的经济现象，目前尚不能确定。

参考文献

- [1] Benhabib, J., and Day, R. (1982) "A Characterization of Erratic Dynamics in the Overlapping Generations Model." *Journal of Economic Dynamics and Control*, 4: 37 - 55.
- [2] Benhabib, J., and Nishimura, K. (1979a) "The Hopf Bifurcation and the Existence and Stability of Closed Orbits in Multisector Models of optimal Economic Growth." *Journal of Economic Theory*, 21: 421 - 444.

- [3] Benhabib, J., and Nishimura, K. (1985) "Competitive Equilibrium Cycles." *Journal of Economic Theory*. 35: 284 – 306.
- [4] Benhabib, J., and Rustichini, A. (1990) "Equilibrium Cycling with Small Discounting: A Note." *Journal of Economic Theory*. 52: 423 – 432.
- [5] Blatt, J. M. (1980) "On the Frish Model of Business Cycles." *Oxford Economic Papers*. 32: 467 – 479.
- [6] Boldrin, M. (1989) "Paths of Optimal Accumulation in Two-Sector Models." In: Barnett, W., Geweke, J. and Shell, K., eds. *Economic complexity: Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearities*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [7] Boldrin, M., and Deneckere, T. (1990) "Sources of Complex Dynamics in Two-Sector Growth Models." *Journal of Economic Dynamics and Control*. 14: 627 – 653.
- [8] Boldrin, M., and Montrucchio, L. (1984) "The Emergence of Dynamic Complexities in Models of Optimal Growth: The Role of Impatience." Paper presented at the International Conference on Non-Linear Economic Dynamics, 17 – 20 June 1985, Paris; working paper, no. 7, Rochester Center for Economic Research, October 1986.
- [9] Boldrin, M., and Montrucchio, L. (1985) "Cyclic and Chaotic Behavior in Intertemporal Optimization Models." In: Avula, X. J. R., Leitmann, G., Nete, C. F. Jr., and Rodin, E. Y., eds. *Mathematical Modelling in Science and Technology*. Proceedings of the 5th ICMM International Conference, Berkeley, USA, July, Pergamon Press, London, 1987.
- [10] Boldrin, M., and Montrucchio, L. (1986) "On the Indeterminacy of Capital Accumulation Paths." *Journal of Economic Theory*. 40: 26 – 39.
- [11] Boldrin, M., and Montrucchio, L. (1991) *Dynamic Complexities in Competitive Equilibrium*. Oxford: Oxford University Press.
- [12] Boldrin, M., and Rustichini, A. (1991) "Indeterminacy of Equilibria in Models with Infinitely Lived Agents and External Effects." Mimeo, Northwestern University, May 1991.
- [13] Boldrin, M., and Woodford, M. (1990) "Equilibrium Models Displaying Endogenous Fluctuations and Chaos: A Survey." *Journal of Monetary Economics*. 25: 189 – 222

- [14] Bollerslev, T. (1986) "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity." *Journal of Econometrics*. 31: 207 - 327.
- [15] Bollerslev, T. (1988) "On the Correlation Structure for the Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic Process." *Journal of Time Series Analysis*. 9: 121 - 132.
- [16] Brock, W. A. (1986) "Distinguishing Random and Deterministic Systems: Abridged Version." *Journal of Economic Theory*. 40: 168 - 195.
- [17] Brock, W. A., and Dechert, D. W. (1988) "Theorems on Distinguishing Deterministic from Random Systems." In: Barnett et al., eds. *Dynamic Econometric Modelling*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [18] Brock, W. A., and Dechert, D. W. (1991) "Nonlinear Dynamical Systems and Chaos in Economics." In: Hildenbrand, W., and Sonnenschein, H., eds. *Handbook of Mathematical Economics*. vol. 4. New York, Berlin: Springer-Verlag.
- [19] Brock, W. A., Dechert, D. W., and Scheinkman, J. (1988) "A Test for Independence Based on the Correlation Dimension." Mimeo, Univ. of Wisconsin, Madison; Univ. of Houston; Univ. of Chicago.
- [20] Brock, W. A., Dechert, D. W., LeBaron, B., and Scheinkman, J. (1989) "A Test for Independence Based on the Correlation Dimension." Mimeo, Univ. of Wisconsin, Madison; Univ. of Houston; Univ. of Chicago.
- [21] Brock, W. A., and Sayers, C. (1988) "In the Business Cycle Characterized by Deterministic Chaos?" *Journal of Monetary Economics*. 22: 71 - 90.
- [22] Cass, D. (1965) "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation." *Review of Economic Studies*. 32: 233 - 240.
- [23] Dana, R. A., and Montrucchio, L. (1986) "Dynamic Complexities in Duopoly Game." *Journal of Economic Theory*. 40: 40 - 56.
- [24] Day, R. (1982) "Irregular Growth Cycles." *American Economic Review*. 72: 406 - 414.
- [25] Dechert, D. W., and Nishimura, K. (1983) "A Complete Characterization of Optimal Growth Paths in an Aggregated Model with a Non-Concave Production Function." *Journal of Economic Theory*. 31: 322 - 354.
- [26] Deneckere, R., and Judd, K. (1988) "Cyclic and Chaotic Behavior in a

- Dynamic General Equilibrium Model with Implications for Fiscal Policy." Mimeo, Northwestern University.
- [27] Deneckere, R., and Pelikan, S. (1986) "Competitive Chaos." *Journal of Economic Theory*. 40: 13 – 25.
 - [28] Dutta, P., and Sundaram, R. (1990) "How Different Can Strategic Models Be?" ROCER, working paper, no. 242, University of Rochester.
 - [29] Eckmann, J. P., and Ruelle, D. (1985) "Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors." *Review of Modern Physics*. 57: 617 – 656.
 - [30] Engle, R. (1982) "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U. K. Inflation." *Econometrica*. 50: 987 – 1007.
 - [31] Falk, B. (1986) "Further Evidence on the Asymmetric Behavior of Economic Time Series over the Business Cycle." *Journal of Political Economy*. 94: 1096 – 1109.
 - [32] Frank, M., and Stengos, T. (1988) "Some Evidence Concerning Macroeconomic Chaos." *Journal of Monetary Economics*. 22: 423 – 438.
 - [33] Fukuda, S. I. (1991) "The Emergence of Equilibrium Cycles in a Monetary Economy with a Separable Utility Function," working papers, nos. 90 – 93, Yokohama National University.
 - [34] Gallant, A., and White, H. (1988) *A Unified Theory of Estimation and Inference for Nonlinear Dynamic Models*. Oxford: Basil Blackwell.
 - [35] Goodwin, Richard M. (1982), *Essays in Economic Dynamics*. London: Macmillan.
 - [36] Grandmont, J. M. (1985) "On Endogenous Competitive Business Cycles." *Econometrica*. 53: 995 – 1045.
 - [37] Grassberger, P., and Procaccia, I. (1983) "Characterization of Strange Attractor." *Physical Review Letters*. 50 (5): 346 – 349.
 - [38] Hinich, M. (1982) "Testing for Gaussianity and Linearity of a Stationary Time Series." *Journal of Time Series Analysis*. 3: 169 – 176.
 - [39] Hinich, M., and Patterson, D. (1985) "Evidence of Nonlinearity in Stock Returns." *Journal of Business and Economics Statistics*, January, 69 – 77.
 - [40] Hsieh, D., and LeBaron, B. (1988) "Small Sample Properties of the BDS Statistic." Mimeo, Graduate School of Business, University of Chicago.
 - [41] LeBaron, B. (1989) "Nonlinear Puzzles in Stock Returns." Mimeo, Univer-

sity of Wisconsin at Madison.

- [42] LeBaron, B. (1991) "Econometria Nonlineal del Chaos: Resultados Empiricos." *Cuadernos Economicos*. 47: 311 - 354.
- [43] Matsuyama, K. (1990) "Endogenous Price Fluctuations in an Optimizing Model of a Monetary Economy." *Econometrica*.
- [44] McKenzie, L. W. (1986) "Optimal Economic Growth, Turnpike Theorems and Comparative Dynamics." In: K. J. Arrow and M. Intriligator, eds. *Handbook of Mathematical Economics*, vol. III. Amsterdam: North Holland.
- [45] Montrucchio, L. (1990) "Dynamical Systems that Solve Continuous Time Concave Optimization Problems: Anything Goes." Mimeo, University of Torino, Italy.
- [46] Neftci, S. (1984) "Are Economic Time Series Asymmetric over the Business Cycle?" *Journal of Political Economy*. 92: 307 - 328.
- [47] Neftci, S., and McNevin, B. (1986) "Some Evidence on the Non - Linearity of Economic Time Series: 1890 - 1981." C. V. Starr Center for Applied Economics, New York University.
- [48] Ramsey, J., Sayers, C., and Rothman, P. (1988) "The Statistical Properties of Dimension Calculations Using Small Data Sets: Some Economic Applications." *International Economic Review*.
- [49] Ramsey, J., and Yuan, H. J. (1989) "Bias and Error Bars in Dimension Calculations and Their Evaluations in Some Simple Models." *Physics Letters*. A134: 287 - 297.
- [50] Ramsey, J., and Yuan, J. (1990) "The Statistical Properties of Dimension Calculations Using Small Data Sets." *Nonlinearity*. 3: 355 - 376.
- [51] Reichlin, P. (1986) "Equilibrium Cycles in an OLG Model with Production." *Journal of Economic Theory*. 40: 89 - 102.
- [52] Reichlin, P. (1987) "Endogenous Fluctuations in a Two - Sector OLG Economy," working paper, no. 87/264, European University Institute, Firenze.
- [53] Ruelle, D. (1990) "Deterministic Chaos: The Science and the Fiction," (The 1989 Claude Bernard Lecture). *Proc. R. Soc. Lond.* A427: 241 - 248.
- [54] Scheinkman, J. (1990) "Nonlinearities in Economic Dynamics." *Economic Journal*, October.

- [55] Scheinkman, J., and LeBaron, B. (1989a) "Nonlinear Dynamics and Stock Returns." *Journal of Business*. 62: 311 - 337.
- [56] Scheinkman, J., and LeBaron, B. (1989b) "Nonlinear Dynamics and GNP Data." In: Barnett, W., Geweke, J., and Shell, K. eds. *Economic Complexity: Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearities*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [57] Shleifer, A. (1986) "Implementation Cycles." *Journal of Political Economy*. 94: 1163 - 1190.
- [58] Tadens, F (1983) "Distinguishing Deterministic and Random Systems." In: Borenblatt, G. et al. eds. *Nonlinear Dynamics and Turbulence*. Boston: Pitman.
- [59] White, H., and Domowitz, I. (1984) "Nonlinear Regression with Dependent Observations." *Econometrica*. 52: 143 - 161.
- [60] Woodford, M. (1989) "Imperfect Financial Intermediation and Complex Dynamics." In: Barnett, W., Geweke, J., and Shell, K. eds. *Economic Complexity: Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearities*. Cambridge: Cambridge University Press.

Renate Mayntz

过去数十年以来，自然科学的注意力已逐渐地转到那些不服从传统的线性和可逆性物理世界观的分析的现象上，也就是远离平衡态系统的行为和非线性引起的不连续的过程。在认识到许多现实过程的随机性质之后，对非线性过程的注意意味着更进一步地远离了传统的机械世界观。非线性系统显示出许多在自然界中能够广泛观察得到的行为。他们的状态能不连续变化而产生阶段性的跳跃，即状态突然变化，如同磁铁或超导现象。在这种不连续的过程中，阈限和临界群现象常常起着决定性的作用。一个因变量最初对一个自变量的连续变化根本没有或者仅仅有很小的反应。但是超出某一给定值，它会产生突然而强烈的反应。这时便存在这种临界或阈限现象。阈限也可定义为临界群，例如特定的粒子数在反应之前就存在了，但另一种类的阈限也存在。从有序到无序及可逆趋向中都会出现阶段性的转变。非线性系统的这一行为可能完全变成无规则的——或“混沌的”——假若所给参量的数值在一定的范围内变动。另一方面，非线性系统也可以自发地从无序变到有序，一种远离平衡的固定的状态；这就叫做耗散结构或者自组织。此外，以非线性动力学为特征的系统可能显示出那种特有的不可逆性，即滞后现象（阶段性跳跃的路径依赖），一种用分岔来表示的特殊的不确定性：即一轨道可从不同方向经过的那一分岔点。非线性动力学分析由于新数学方法的发展而增加，如托姆（René Thom）的灾变理论，通过用现代 EDP 算法¹，使得发现并形成（确定的）混沌现象有了可能。

“混沌理论”现已应用于狭义和更为广义的范围，对此狭义的解释正好与确定性的混沌（及其应用）的数学理论相吻合，因此也就与非线性系统中从有序到无序的阶段性跳跃的先决条件相吻合。从广义的解释来看，混沌理论可能是指不连续过程，或从有序到混沌或从混沌（或无序）到有序的转变；这也就包括了自组织这一现象。有时，混沌理论似乎有更为广义的意义，即涉及到整个非平衡系统非线性动力学领域的研究。本文采用“混沌理论”的第二种解释。我将关注不连续过程，或在两个方向上的阶段性转变——从有序到混沌，从混沌到有序。不管怎样，我偏向于使用自组织或非线性动力学概念，除非牵涉到从有序到混沌的阶段性转变，“混沌理论”最为狭义的意义。

下面的争论可以概述为以下几点：

1. 非线性动力学的自然科学理论没有必要使社会科学家的注意力转到有序的突然分裂和系统分解现象上来。

2. 非线性动力学的自然科学理论和模型在建立形式模型的尝试和实际理论化方面已经对社会学造成了撞击。

3. 非线性动力学的自然科学理论潜在的联系在于对作为微观层次过程结果的宏观层次的不连续变化有更好的了解的希望。

4. 社会现实的特性严格地限制非线性动力学的自然科学模型的潜在应用。

一、

显而易见人类社会呈现出非线性非平衡系统的所有特性：由于复杂的互相依赖性、可逆过程、滞后现象、阶段性转变以及临界群现象等许多原因而造成的不可预见性。甚至社会学家们试图建立和估量两种现象之间的偶尔联系，比如在特殊的社会条件和特殊的行为之间，他们已经发现了一些随机规则具有很少深入高层次范围的相互关系的价值。至于混沌现象，社会理论已开始（暗含的）假设由于人类意志的存在，无序是一种有前提的自然状态，其结果必然涉及到社会有序的出现。这符合社会学出现之

前的社会哲学。因此，霍布斯（Hobbes）解释说国家是作为一种抑制混沌战争以反对自然状态的手段而形成的。随后，社会学家杜克汉姆（Emile Durkheim）发现社会有序的基础在于有良心的集体，而马克思·韦伯（Max Weber）则认为社会因素产生社会规律是由于传统、价值以及兴趣——不需求助于与自然和生物有关的心理的概念，比如固有的、天生的反应倾向。

此外，社会有序被看作是靠不住的，不仅是在社会学方面而且在从古至今的实践中。转变或者常常从有序到无序的突然转变在社会生活中是无处不在的。在时间记忆的长河里，人类不可能没有看到社会有序永远处于崩溃的危险之中。迅速而激进的有序状态的丧失呈现于社会现实的多个层面——从婚姻的解体到公司倒闭直至政治制度的毁灭。与逐渐的变化相对比，社会有序的突然坍塌是动乱的产物。社会进程变得无规律的，传统的行为规范也无法执行，潜在力量变得暴露无遗，群体行为王朝时期，社会内部的行为往往受到规范的控制；而在这种动乱的状态当中，未来的发展则是无法把握而只能屈从于偶然事件的影响。这种社会有序的不安全感不仅促使人们去尝试控制无序和动乱。社会不连续的无处不在的经验也意味着牛顿机械论世界观从来就不是社会现实图景能接受的模型。

主要从事于社会有序问题研究的社会学家的确指出，他们通常将精力集中于对稳定的社会状态的预见上。然而他们也已研究了诸多的有序状况崩溃的事件。在宏观或社会层面上，革命暴动已吸引了社会学家们的注意——他们的训练，社会学理论历史性地以法国革命为基础，这是绝大多数第一代社会学家详细研究的事件。近年来，政治学家们研究了民主政权的崩溃（Linz 1978）。单纯的社会不连续，即某一特定的变量的不规则变化或者突然的爆发是多种多样集体行为的研究对象——恐慌，政治运动的群众动员，社会运动以及暴乱的爆发（见 Tilly 1978）。在社会的中观水平上，在大型社会技术系统作用下的组织的瓦解，人为的灾难以及灾祸性的分裂已经受到分析（例子见 Turner 1978；Perrow

1984)。不过有关这一现象的有影响的文献是定性的，研究这类事件的原因以及在此之下的基本的社会机理。因此非线性系统不连续过程的广义自然科学模型能够用来描述被提到的同样的社会过程，这是一个开放性的问题。

二、

在现代科学的发展中，牛顿机械论的权威范式最初受到了经典热力学的挑战，这一学说引进了基本的不可逆过程的概念。动力学非平衡系统理论反过来取代了经典热力学。这第二次范式的革命是从许多不同方法最初独立的发展开始的，其中包括非线性动力学数学——灾变理论以及决定性的混沌。在自然科学方面的这些理论进展已经增强了物理理论与社会学的潜在联系。

在社会学中引入自然科学有悠久的传统。常见的做法是把社会描绘成有机体，这种有机的相似促使斯宾塞（Herbert Spencer）去分析社会的差异。由此，有关结构和社会系统发展的社会学理论延续至今。迄今为止，物理相似对社会学的影响已日趋减弱。当社会学作为一门新的学科发展时，会偶尔参考一下“社会物理学”，但是可逆和线性的机械世界观限制了物理学和社会学的潜在联系。这种状况由于一般系统论、控制论、信息论的兴起而得到改观。在社会学领域，特别是帕森斯（Talcott Parsons）的系统理论反映出了这些影响。自然科学对非线性动力学系统越来越浓厚的兴趣已经极大地激起了引进物理学的新浪潮。这些影响是双重的，一方面数学被用来分析和描绘非线性不连续过程已经影响到社会学努力正式建立社会过程模型；另一方面，自然非平衡系统行为实质理论已经刺激了社会科学理论的发展。

建立社会过程形式的尤其是数学的模型的种种努力，由于分析方法的有效性而大受鼓舞，除了任何一种实质的自然科学理论的影响之外。因此，19世纪50～60年代，数学图表理论和马可夫（Markov）的以高度转换可能性为特征的数学理论极大地鼓舞了社会科学家（如 Harary 1959），人们也试图发展完全不受自然

科学理论影响的不连续过程的形式模型，最简单的情形是，不连续的社会进程牵涉到了单一状态变量的不规则变化，其或许会突然增强或跌落，或者呈现出没有任何明显样式的“混沌”变化。有许多发展不连续的社会特征——犯罪率，每年注册的集体犯罪案件的数量，离婚率以及罢工的频率。然而，不管怎样，科学家们把更多的兴趣放在发展以定性的方式解释犯罪、离婚以及暴力的出现的理论上，而不是去建立造成这些波动的形式模型。相反，形式模型已运用于各种各样的群体行为上（McPhee 1963）。以群体行为为特征的扩散过程可能是连续的也可能是非连续的。连续的扩散模型特别适用于各种革新的传播，而非连续的扩散进程则象征着流行病，社会和政治动员，骚乱和恐慌的发展（纵览见 Mayntz 1988）。在这些过程中，一些特殊行为的影响（扔石头、逃跑等）不规则的变化，显示出突然的发生、增强，或者是突然的停止。种种相应的建立模型的尝试并不依赖于自然科学理论的影响。

近来借助数学灾变理论建立不连续社会过程模型的努力不再确切了。经过托姆（1972）的发展和泽曼（Zeeman）（1977）的完善，这个理论将为处理一个或多个参数的延续变化导致行为（或结果）的突然变化的情况提供数学手段。特别是灾变理论涉及到平稳函数特性的分类。在一个给定的参数值不同的函数族里，每一个函数都有其独特的特征（最小、最大值，鞍点）并能相应地分类，对某些类型的函数来说，随着一种或多种参数值增值的变化，已经观察到一个族里的函数可以从一类“跳”到另一类；因此从特性上来说他们是非连续的（即数字和单一的特征）。

显而易见，灾变理论在社会学中的运用已经注意到了即使一点细微的干扰都将引起社会或经济系统的瞬息的、激烈的变化甚至坍塌。事实上在灾变理论发表后人们就试图马上把它应用到社会科学中去。然而很显然数学上的灾变只是表明了与日常所说的灾变的表面上的相似性——即给人们带来直接或间接影响的产生了严重后果的系统的崩溃。尤为重要的是，有人认为，托姆的灾

变理论的数学形式化有助于我们了解社会灾变的起因，实际上这是错误的。在能够使用这一数学理论之前，必须作出许多技巧很强的、麻烦的假设，使其能转变成真实现象及其内在联系的性质。灾变理论的有效性取决于将精确的实验意义运用到对照物和行为变量及其相互作用之中的可能性。在尝试着将灾变理论应用于社会和经济现象中，这常常是不可能的，以致这种模型的转变仍然停留在单纯的分析上，而且就基本的因果理论来说这种分析完全是纯理论的——曾被苏斯曼（Sussman）和查勒（Zahler）（1978）严厉指责过的实践。一些作者曾强调灾变理论只不过是分析和表示一种特殊数学函数的数学方法，已经得到公认的托姆的拓扑学模型仅仅被当作一种说明的方法加以运用（例如 Bühl 1984）。然而，其他人则使用图解（拓扑的）描述，这是托姆曾用来描述参数值可变的一族数学函数的特异面的一种方法，通过将某些特殊的实验计划不仅直接用之于参数维度，也用之于几何平面的所有维数——尽管托姆理论中几何平面并不直接显示一个基本函数中状态变量的变化，而仅仅显示一族函数中某一范畴特性的变化。一个例子就是弗雷（Brian R. Flay）（1978），他用姿态变化的术语阐明了托姆的几何模型。尝试这一应用的结果不亚于总水平或结果变量的隐含曲线设置，其没有解释现实中为何以及在什么阈限位置通过和发生阶段性的转变。

这绝不意味着灾变理论不适用于社会尤其不适用于经济现象，假如系统变量和参数以及它们的联系的形式模型能够赋以严格的经验意义的话。这也就预示了与控制 and 行为变量经验相联的实质性理论的存在，这能转变成定性模型。因此，赞恩（Zahn）（1979）已经尝试着将灾变理论应用于经济现象，像金融市场的不稳定性以及消费者行为的不连续性，但同时他也强调基于现存的经验知识超出这一模型的模糊说明性地运用，所以这样做有一定的难度。卡斯迪（Casti）（1982）则成功地建立起了在一定时间内一个地区的家庭单位增长率变化的形式模式，一个包括两个（经验解释）参数的数学等式。他能精确解释由于参数值的特殊

结合增长率的发展，即左右它的数学函数将转入非平衡状态，要么是突然增长，要么是突然跌落。在第二种运用中，卡斯迪采用军事行为作为行为的输出变量；在此并不导致平衡状态的函数代表了爆发战争的冲突。

到目前为止，决定论的混沌理论不常运用于典型的社会过程。混沌，即一个状态变量不规则的非典型的变化已经正式地被解释为非控制的或随机的外来干扰的结果或者是非线性系统中极其复杂性（多变量和参数）的结果。对社会不规范性的这两种解释似乎毫无疑问地在社会学的论述中占统治地位。从根本上来说，通过使用电脑来解答非线性方程，已经发现如果在一个相对简单的非线性系统中参数值变到一定的范围时（Schuster 1987）就可以出现不规则的（混沌的）行为。如果没有随机外部事件介入，而是存在着一个合适的方程集合产生进展的话，这些过程是确定不变的²。

社会科学家试图运用混沌理论的例子之一是阿尔巴哈（Albach）（1988），他曾将其运用于建立濒临破产或倒闭的“死”公司的模型。在这一模型中，实际的周转被假定依赖于研究强度和所要求的增长率。阿尔巴哈指出随着研究率和增长率的特殊的结合，公司的经济发展将导致要么是不断地增长，要么是持续的萎缩，以不同种类的减少振动的方式——对结合值的小范围来说——在复杂的混沌运动之中，最终经过了破产极限。随着这种决定性的变量持续的、不断增长的变化，代表公司的数学系统将经过从一段时期持续的振动到不规则运动混沌的方式。对社会科学家来说，了解这类决定性的混沌系统的属性，尤其是混沌现象在何处将导致系统的崩溃或战争将是极其重要的（Grossmann 1989）。不过，许多显而易见的社会过程可以建立产生焦点状态变量混沌变化的非线性系统模型，这一点尚值得疑问；我们将在后面谈到这一点。

除了从有序或模仿的运动到无序或混沌运动的不连续变化的自然科学（和数学的）理论之外，已经发展起来的能分析非线性

不平衡态系统的自组织现象的数学也已被用来模仿社会进程。这种联系哈肯 (Haken) 的协同学尤为重要 (Haken 1978)。维德里希 (Weidlich), 一位物理学家, 比如就致力于对迁徙作形式分析 (Weidlich 和 Haag 1988, 也可见 Weidlich, Haag 1983); 事实上, 人文地理所研究的空间结构的发展似乎服从这种分析。另一个例子就是吉尔勒 (Gierer) 的工作, 他将经济不平衡的发展处理成一个社会系统中自发产生的结构模型 (Gierer 1981)。埃德曼 (Erdmann) 和弗里奇 (Fritsch) (1989) 也已建立起政治观点形成和选举行为的过程的模型。埃德曼明确将其研究与哈肯的协同学一般原则结合起来, 其处理多元素系统中的集合现象, 即系统中的元素通过相互作用产生意外的效果。协同学的这一“基本的行为公理”一般说来适用于许多社会现象, 在某些非线性系统数学原理的帮助下, 这些现象因而能得到研究并建立起模型, 哈肯曾运用这些原理形式地描述了极其广泛的自然现象 (Erdmann 1986)。

当不连续社会过程形式模型涉及到从有序到无序的阶段性转换或者是相反方向的转换时, 自发自组的自然科学理论已经对社会学理论产生了极大的影响。正如克劳恩等 (Krohn et al.) (1987) 指出, 自然科学中几个类似而又独立的研究发展已经并入了自组织范式。伊·普里高津 (Ilya Prigogine) 对此也作出了较大的贡献, 在耗散结构的指引下, 他对远离平衡态的物理、化学系统的自发有序过程进行了分析 (Prigogine 1980), 物理学家哈肯发现了类似的有序过程并提出了术语“协同学”来描述它们 (Haken 1978)。艾根 (Manfred Eigen) 也提出了超循环这一概念, 一种由联合的自动催化潜过程所组成的自动催化过程 (Eigen 和 Schuster 1979)。神经学科学家马图拉纳 (Maturana) 和瓦雷拉 (Varela) 最终将自我再生产看作是一种非平衡系统的自组织能够自我显现出来的形态 (Maturana 和 Varela 1975)。自组织的自然系统典型地由大量的元素组成; 他们都处于一种远离平衡状态。在自组织过程中 (自我构造或自我再生产), 系统消耗其能量, 但

这一过程所产生的必然有序是系统中各个因素之间相互作用和相互联系的结果。支配这一过程的方程本身是非线性的。

10 多年来，自组织范式鼓舞着社会学家们。这一范式的关键概念常常被用之于宏观或中间层次的社会现象上，即社会和组织，从字面上相似的形式上，强调其中的社会和自然现象的相似性。然而，这种理论转移很难产生新的见解。不管这种类似是直接得出或是在广泛的、隐喻的意义上被采用，这种尝试很难超越一种言辞上的“曲线设置”。

然而，社会学理论对使用自组织特别是自我再生产范式有着雄心勃勃的尝试。这些转换的尝试加入了社会学系统原理的传统，人们常常更多地能够在德国作者而不是美国作者之中看到。这种差别与这样一个事实有关，即在帕森斯之后美国的社会科学理论的焦点已经偏离了系统理论，而在德国由于卢曼（Niklas Luhmann）的工作，一个理论上抱负远大的社会学系统理论形式得到了发展（Luhmann 1984），并对主要的理论辩论和整个一代年轻的学者都产生了影响。这些学者们使用自组织特别是自我再生产的范式来分析法律系统或者是科学研究系统（如 Teubner 1989；Krohn 和 Ktippers 1989）。对自组织和自我再生产范式的种种应用经常遭到尖锐的批评。但是即使是批评者有时也发现这些范式是令人鼓舞的。

鉴于社会不连续性是熟知现象及其不求助于自然科学理论而被社会学广泛分析这一事实，我们可能要问从近年的理论转移的尝试中到底获得了什么。要回答这一问题，那么区分方法的转移，概念的转移和整个理论的转移是极其重要的。

严格地说，理论转移并没有发生，也没有认真地去尝试。严格意义上的理论转移假定两个不同地区的经验现象之间具有同构性，即元素及元素性质之间 1:1 的关系以及支配着两种不同现象领域的动力学之间的关系。然而对物理和社会领域之间到底是否存在着基本的同构性一直受到怀疑。事实上，由于人性的存在，社会科学再三强调其特殊性，这假定与他们的认识对象的本体论

特征有关。关于非线性动力学的自然科学理论，其物理、化学、生物的核心机制在社会中找不到精确的副本，这一点是显而易见的。但形式上的相似之处是可能存在的，如关于递归机制的重要性，或者是作用于不同时间尺度上的增强和阻滞微观过程的交互作用，为了获得对特殊的社会事件的说明力，这种形式的分析需要赋予实质性的意义。

在此，试图将自然过程的形式（数学）模型运用于社会现象是有它们的立足之地的。这些尝试尽管并没有为社会学提供新的实质性的见解，但是在详细地说明相互依赖性的精确性上收获是甚多的。同时对理论的建立也有一定的间接影响，因为试图从形式上模仿经验过程的想法使得社会学家们去完成有关基本的动力学机制的理论设想。

除了引入数学方法和模型之外，我们已经评述的转移的努力基本上分为两类：或者停留在言辞的类似上，或者是间接的或中间原理转移的实例，这一原理转移经过了自然科学理论的归纳和成功的再详述。这两种类型都被看作是概念的借入。

对自然科学理论仅仅在隐喻的意义上运用的例子有时也提出作为一种成熟的理论转移的要求。因此从非线性动力学的广义来看可能被认为是“混沌理论”的应用的这一相当大的部分仅仅是将社会科学理论中已经形成的部分翻译成自然科学理论中使用的概念的语言。像术语自组织、反馈、分岔、关键群、阶段性转移以及骚乱能在一般的描述意义上被应用，直到大量的社会现象。但是建立起来的与自然现象的相似性仍然是十分表面上的。结果只能是语义的革新，对我们的实际的知识并没有增加什么。

身为自然科学家的作者通常仅仅在隐喻的意义上使用自然科学的概念来描述社会现象，这并不足以为奇。例如，哈肯（1984）本人就引出了协同学和组织过程之间言辞上的相似性，这种相似性假定一定程度上熟悉组织现象但并没有增进我们关于它们的知识。但至少同样多的社会科学家，他们已经精通相应的自然科学理论，付出了同样多的努力得到了相同的结果。因

此，米歇尔里希（Michelitsch）（1987）用普里高津和哈肯的术语描述了一些基本的熟知的经济进程。对这个和更多相类似的情况来说，“应用”陈述并没有“错”，他们只不过是携带新信息。

就目前看来，社会科学家很少将自然科学概念作为一种纯理论转移在隐喻的意义上使用，他们已经对社会理论作出一些实质性的贡献。相反，我们在这里发现了间接的理论转换——如果自然科学实质性的引入全然发生的话。这种转换暗示了对先前经验的概括性的叙述（可能，但不必以数学的形式）进行社会学的再详述，即特殊领域的自然科学理论³。事实上，如果没有原始理论如此的概括，社会科学家可能很少想要借用自然科学；这就显示了对理论转换来说概括（普遍化）的重要性，在概括的过程中，暗示着抽出，原始理论重要的部分会失掉。在自组织理论中，一个典型的观念就是这些过程都发生在远离热力学的平衡态。耗散结构所假定的能量输入（原义的，物理意义上）也是同样的状态⁴。如上所述，也没有可能应用物理和化学系统中产生高层有序现象的机制，如将化学中的自动和交叉催化应用于社会系统，除了形式上的相似以外。然而，如果自组织范式被简化成几条基本原则，如可使用的终止和对外部扰乱敏感性的共存，通过内在的非线性动力学机制而产生的准稳定状态的出现，这些概念一旦运用于社会系统能产生良好的效果。

德鲁维（Druwe）（1988）曾圆满地描述了概括和再详述过程，尽管在社会科学家的著述中仍然常常是含蓄的⁵。这被认为是对自组织范式的运用。少数几个明确尝试的例子之一是海耶尔（Hejl）已经着手将马图拉纳的认知生物学理论移入自我参照系统的一般理论中，尽管海耶尔对此并没有取得更多的进展，但他声言这种理论可能为社会学提供新的理论基础（Hejl 1982）⁶。另一方面，卢曼通过指定已被概括的分析范式的社会学手段立即开始着手工作。例如自组织和自我再生系统的（相对）开放特征被卢曼再指定应用于信息输入或观察。克劳恩和库帕斯

(Küppers) (1989) 甚至强调若与生物系统相比, 社会系统这种信息开放特征是存在于它们特定的动力学基础之上的。同样重要的再详述涉及自我再生概念, 即卢曼所说的再现。这种转移的努力的潜在成效依赖于能牵涉到的精确的再详述——因此而建立起可信的理论。就社会学系统理论来说, 自我参照、可使用的终止等概念已经导致社会和社会于系统的新前景, 这在许多方面被认为不仅与实际经验和观察更相符合, 而且在说明方式上也使人更加满意。

三、

如果迄今将非线性非平衡态系统理论的基本概念应用于社会现象的合乎逻辑的尝试在自我再生概念上有其独特的参考价值, 自组织机制而不是过程导致从有序到混沌的话, 现在我们可能从一般条件上确认这样一个理论上的前景, 即混沌理论 (广义和狭义的) 对社会学来说是有效的。布尔 (Walter Buhl) (1990) 主张非线性动力学的自然科学理论与社会学的关联特别的依赖于将它们运用于分析不连续的社会变化——像波动、灾变和混沌, 正如他著作的副标题所述。根据布尔的理论, 近年来主要的社会学理论忽视了这些变化过程, 而宁可关注于社会有序, 社会分化以及模仿结构的变化等问题。正如我们在本文第一部分已经看到的, 如果我们考虑一下二战后宏观理论就会明白他的这种判断是正确的。但对大多数社会学工作来说这又不完全正确, 也不适用于像卡尔·马克思这样的正统理论家。然而, 我们确实缺乏一种不连续社会进程的综合的现代社会学理论来为种种特殊的事件提供一种一般的框架, 这些事件已经被社会学家们进行过分析——从骚动和暴乱到革命和其他形式的结构分裂。问题在于什么范围程度的一般的非线性动力学特别是混沌理论的自然科学模型将有助于这种社会学理论的发展。毫无疑问自然科学理论和非线性动力学的数学模型将有助于我们更好地了解, 或者至少从形式上更好地了解某种类型的社会不连续。但不管怎样, 不应忘记早先已经

说过的有成果的和失败的理论转换，在任何情况下需要的是纯社会学理论的发展，而不仅仅是对流行的“混沌”术语所存在的见解进行再说明。

除了具有指引社会学理论建立起作为各种形式的不连续过程基础的机制的能力外，对社会学来说，非线性动力学理论和模型还蕴含着成为更普遍意义上的理论的希望。这来源于在非线性动力学的统帅下所有的自然科学理论和数学模型具有相同之处的特征：他们都涉及宏观事件或微观过程的宏观式样的产生。由于涉及系统行为中的微观－宏观链，这些模式也有助于更好地了解层系问题。这种关系中的层系不是指垂直的控制关系，而是指不同层次之间的连续，在这种层系中较高层次的现象的性质不能归结为较低层次现象的性质的总和。在某种程度上，自然科学模型能够应用于社会现实，它们有助于解释微观－宏观联系，即在当代社会理论的创立中什么问题可能是最关键的、普遍的。在自组织范式事例中这种特殊的理论联系可能是最明显的，但是原则上对于从系统元素的不协调的（尽管是相互依赖的）微观行为产生宏观事件的所有非线性动力学模型来说它也是站得住脚的，不管这些宏观事件是趋向混沌的阶段性转变还是趋向新的远离平衡的静止状态。

自组织理论有助于阐明众所周知的微观－宏观联系的见解，得到其自然科学支持者的明确公认。他们都强调的观点是自组织产生系统宏观水平的特性，这被认为不能由元素的可测的属性来得出或解释。关于磁铁性和激光，哈肯举例说：“因此微观有序是宏观物质具有新的特征的原因”（Haken 1978）。拿铁来说，它具有磁性，拿激光来看，它产生特别密集的一束光。同样的，在贝纳德（Bénard）不稳定事例中，宏观性质是流体运动的样式，这显然不能直接从 H_2O 分子的性质上获得。因此，用哈肯的话说，“为了描述集合性的行为，与微观描述相比我们需要完全新的概念。”（Haken 1978），他引进了术语“有序参数”来指代这种宏观特性。一个有序参数代表了一种从微观相互作用中出现的

宏观特性⁷。当然元素的特性是重要的因为他们暗含了相互影响或被影响的能力，然而他们的相互作用才得以产生新的结构。显而易见，这些阐述也能够应用于社会系统的微观行为（个别行为）和宏观特性之间的联系。更好地了解系统要素的行为和相互作用对社会系统产生必然影响的希望可能是自组织范式吸引社会科学家们的的主要原因，它在非线性过程的数学模型转换上也起了举足轻重的作用。

尽管微观 - 宏观联系已经是社会学永恒的理论问题，这个问题在当今的社会学论述中似乎特别突出。这与今天宏观社会学中行动（或动作）理论的复兴有关。只要系统层次的结构变化通过功能规则，变化量或者技术的发展得以解释，宏观事件通过宏观变量得以说明，那么就没有必要回复到个别行为的微观层次。仅仅当尝试着通过微观行为来解释宏观事件时，正如谢林（Thomas Schelling）（1978）的有名的著作的标题所表明，我们才面临着联结微观和宏观的挑战。

大约 40 年之前，帕森斯（1951）做过这样的尝试：企图在一种原理上将社会行为的微观面与社会变化的宏观面相联系，但是他的系统水平的层系概念以及社会和个人系统之间相互渗透的概念比微观相互作用导致突发的宏观现象的产生更能说明微观事件的宏观决定性。尤为有关的是非故意的结果概念，通常被认为是社会学研究最合适的对象。前一辈的海耶克（Hayek）形成了这样一种观点：“如果社会现象显示出了无序除非它们是有意设计的，这将是……仅仅心理学的问题。只有在个别行为导致某种有序的出现，但这不是被人有意设计的时，就产生了需要进行理论研究的问题。”（Hayek 1955）。

社会学家们乐于通过参照个体的行为和相互作用来解释突发的宏观现象，他们采用经济学中有着悠久传统的透视法。因此，不足为奇，对社会学中微观 - 宏观问题的阐述的最明确的贡献，如果不是理论的解决方案的话，不是由系统理论家作出的，而是来自于那些发起者，他们不仅仅使用演员的透视法，而同时他们

又是使用合理选择途径的方法论的个人 (Lindenberg 1977; Boudon 1977)。这种透视法的采用也受到了特殊的超科学认知兴趣的激发——他们质问人们是否由于他自己的行为将无意中造成社会的毁灭。

四、

然而对于一般意义上的非线性动力学尤其是混沌理论的自然科学模型成功的转换来说存在一定的限制。这种限制是从物理和化学理论不再对社会领域有效这样一个基本前提作出的。特别是系统元素的时空不变的前提，和我们所处理的是多元系统即包含许多类似的元素的前提。当然有多种社会现象，他们出现不连续性的基本前提——从有序到混沌，从混沌到有序——是相似的，如果不是完全相同的话。当我们处理一定时空界限内大量人口或类似集团的集体行为时能发现这样的情况。他们的行为——一个人、家庭、公司——也许会受到文化或规范的调节和服从相互影响，但是他们的行为并不是被组织和有意协调的，同时也没有发生基本的革新。这样的社会情形的例子不仅在我们所处理的典型的集合行为中很难找到，而且在公共舆论形成和政治动员过程中，在各种式样的周期性变化中，在殖民结构的出现和由理想化的市场逻辑所支配的一般各种社会进程中都很难发现。在这样的情况之下，用一些相对简单的规则来描述各因素的行为可能是行得通的，而这些规则通过一段时期的考虑之后仍然是稳定的。

然而，即使在集体的社会行为情形中，可以得知无法控制的行为倾向的改变经过一段时间可导致一种特殊的宏观事件，如混沌现象。在这一点上，最初的模式就不再适应了。的确，在非线性的模式中，各个因素的行为受到相互的影响，同时也受到了他们自身也可能作出了贡献的系统先期已经达到的集合状态的影响。但是这并没有假定在这种模式中包含在诸如开始扩大或变得不规则的过程中的因素将通过有意控制相关系统的参数而起反应以避免这种情况的发生。然而这正是人们常常做的。他们能够预见

到未来系统的状态，估价他们，分析他们可能的原因，同时着手改变不良的未来状态的前提条件。正如冯·韦斯萨克（von Weizsäcker 1990：46）曾经明确主张的，在这些情况下，决定论的混沌数学理论所描述的不连续性在社会中被发现是不大可能的⁸。当市场运行、示威运动或群众运动显得失去控制或者当意外的殖民结构或者不平等被认为是不合理时，强有力的团体组织如中央银行、警察当局和政府就将介入其间阻止这些自发的行动。这在猛烈的外来扰乱（如自然灾害）和复杂的相互依赖的后果等事例中也同样有效。社会系统是复杂的，非线性的，但是他们部分是有组织的而不是无组织的复杂系统，即导致自组织进程和决定论混沌之类的系统⁹。

可以想象那些情形在当今社会中时有发生，这些情形可以应用有序和有序自发（非故意）产生的模型。那种集团团结一致的传统形式的瓦解和层系的削弱也许正好表明不是由层系或团结一致逻辑而是由市场逻辑所支配的情况正在增加。但是即便如此，它也无论如何只是社会现实的有限部分，这些部分是服从非线性动力学的自然科学模型的分析的。之所以基本上如此是由于人类有能力学习和有目的的组织起来追求共同的目标。无论好坏，不仅仅是亚当·斯密（Adam Smith）的无形的手控制了社会。组织起来和明确地表达共同目标的能力是与有意识地从经验中学习和战略性地运用这样的知识的能力密切相关的（不是局限于生物似的学习，即选择性的生存）。因此，不仅是个人，更重要的是当今高度组织化的社会中强有力的组织都介入并企图控制自发的进程，如果他们的后果不是令人满意的话。所以集体行为的自发过程永远受到控制并随时改变其方向。结果是只有少数的社会宏观事件才是真正的用非线性动力学的自然科学模型所分析的必然现象。我们也不能说那些非故意潜在的破坏性的宏观事件主要是由遵循有序崩溃的自然科学范式的过程所引起的。这些破坏性的事件正如那些有计划干涉的结果，即有意的犯错或带有社会圈套性质的战略性的相互依赖的情形的结果。

社会系统的崩溃因此很少是一种给定特别的初始条件的给定的非线性系统的失控的动力学的结果。用来解释社会系统崩溃的理论应该考虑到自发的发展和有计划的行为之间的相互冲突，考虑到有序的扰乱和对付这种扰乱的努力之间行为 - 反应的联系。迄今为止还没有尝试过将有效的研究成果与有关社会系统崩溃的可靠的社会学理论融为一体。结束本文之际，让我简要地概述一下这种理论的要点¹⁰。

五、

所有社会系统都不断地面临着内部和外部的侵扰，对这种包括内部产生的生长刺激或者各种革新的侵扰的反映是社会系统的一个基本特征。仅仅当面临潜在的分裂的侵扰而对付他们的策略或机制失效时社会系统的崩溃才会发生。因此系统的瓦解一方面是由于要求和系统所面临的问题之间的不协调，另一方面是因为系统本身作出反应的能力。

或许社会系统的瓦解首先是因为先前防止特殊的分裂侵扰出现的约束机制中止或失效而引起的。简单的例子是力求阻止可能引起极端的集体行为的事件的措施。当我们教孩子们不允许做什么，当约束合约被签订，当法律规范被制定和应用，同时当团体组织联合采取行动防止不良发展的事态——军备竞赛，通货膨胀，土壤冲蚀，试图控制种种侵扰的尝试就会提出来。如果社会控制的机制失败了的话，那么“人为的”社会有序也就随之瓦解了。当先前的稳定状况是以高度平衡的对抗性力量为基础时，正如革命前那种侵略性的和抑制性的力量之间的平衡的例子一样，由于约束因素的失效所引起的系统的崩溃就会突然发生。

社会系统并不依赖于阻止侵扰发生的能力如果他们能成功控制这些侵扰使系统有序免于瓦解。补偿机制的失效是社会系统瓦解的第二个重要原因。补偿机制的例子包括用新的物质、能量资源和生产过程来替代逐渐增加的短缺的资源。当团体不顾减弱等级意识而提供各种利益来吸引其成员时，补偿就发生了。补偿性

策略利用了这样一个事实即社会中同等的结局是常见的现象，亦即同样的目标能通过不同的途径达到，同样的效果能由不同的原因引起。

既不能避免又不能补偿的侵扰需要适应性变化。没有发生这样一种必要的结构的改变是社会系统瓦解的原因之三。如果为了长期保存的利益变更是必要的话，学会保存现存有序进程的障碍也许会导致系统的崩溃或彻底的结构的变化。一个很好的例子是克劳瑟（Michel Crozier）的官僚的恶性循环，当顽固的官僚组织采取行动不断地适应变化的外来的要求时，恶性循环就开始了（Crozier 1964）。随从的不满渐渐地随之而生，最终引起有责任心的政治家们强行改革这顽固的官僚政治；这表明了一种结构的分解。装备有发达的最初甚至最有效用的约束和补偿机制的系统要达到这种适当的转变可能也特别困难。

在这些进程中阈限值在两个方面起了重要的作用，特别是在前两种情况下，当避免侵扰的相对“防御性”的方法失效时。一方面，当“动乱因素”突然迅速地出现时，先前阻止和补偿动乱的有效机制可能失效；也就是说发展赖以产生的速度是关键。失业或车祸的增长率正好能证明这一点。缓慢而持续地增长不仅为逐步校正我们关于失业和交通死亡的可接受程度的期望留有一定的余地；同时也允许发展和扩展补偿和限制伤害的措施，例如建立再教育计划，救急医院以及营救直升机。但是如果我们突然面临失业和事故的急剧增长时，我们会感到震惊，也会引起公众集体抗议的反应，而政治家们将会采取激进的政治措施加以干涉，经济气氛就会变得萧条。另一方面，“动乱因素”的逐步增长也可能导致危险区里限制和补偿都没有可能。在自然进化区，这些危险区的存在是我们日常经历的一部分。但是格言中所说的折断骆驼的背的稻草在社会事态中也能够找到。对个人行为来说这是千真万确的〔例如当屈从有越来越大的压力时，压力就会变成反抗（“反应”）〕，对社会有序来说也是这样。社会规范通常都维持着引导大部分人行为的能力，尽管有一些人时有违犯；然而

要是那些违犯到达危险程度的话，社会规范将突然失去其社会的（不一定是法律上的）效力。类似的情况在群体中的单独行为中也能观察到；不同的利益和潜在的冲突在一定程度内能够被容忍，但是如果紧张局势到达一定程度，团体整体可能会突然崩溃¹¹。

迅速增长或达到危险程度并因而致使现存的约束或补偿机制失效的动乱需要结构性的适应。然而有些动乱妨碍或致使通过逐渐适应而对付它们的可能变得实际上不现实的，因此引起系统的崩溃。特别是三种动乱似乎易于因或多或少地超出社会系统的反应能力而引起崩溃。

第一种情况是，一系列分支相互依赖的机构的其中一个因素失效（不管何种原因）导致整个复合系统的崩溃。马克思·韦伯对古典文明衰落的社会原因的分析可能是说明这种情况的一个例子。韦伯声称崩溃是由于表面上似乎无足轻重的一种制度——即奴隶营的废止而引起的，这导致了实际上是必不可少的基础的另外几个结构性因素的废除。当系统不再吸纳奴隶时，现有的奴隶就变成了不自由的佃农。结果是地产变得十分重要，物物交换经济在牺牲都市商品经济的情况下发展起来了，这就妨碍了货币资产的形成。这不仅使得古代城市的光辉失去光泽以及诗歌和编史工作相形见绌，而且使得常备军和拿薪水的城市服务没有了¹²。当然这种文明的衰落只有当历史学家作为快速运动的结果观察到时才表明了一个系统的崩溃。然而不管怎样，这个例子很好地说明了相互依赖的因素间稳定的关系是怎样因为一个因素的废除而可能瓦解的。

第二种超出系统的反应能力的动乱能够在系统环境的变化中看到，这种变化使系统受到危害，但是直到它们变成严重的威胁时才被察觉，然而已无法控制，因为任何约束、补偿或逐渐适应的尝试都为时太晚。现存的社会系统既不能阻止又不能控制的破坏性的外来干涉如流浪部落对生活宁静的农民居所的侵犯，这不像那些内部产生的、能够被控制如果发现及时的话甚至能够被避

免的威胁一样引人注目。前面所提及的官僚的恶性循环的政治干涉代表了许多可能发生的例证之一。破产的历史也提供了极多的例子，甚至卡尔·马克思假定的“掘墓人模型”也遵从同样的逻辑，根据这一理论，资产阶级通过自己的行为产生了强有力的阶级敌人，这些人推翻了他们。

本文在这里提到的最后一种动乱是由于一种偶然的——对参与者来说预料不到的——事件的同时发生而引起的，它们一起导致了系统的崩溃。在大的社会技术系统中这是一种典型的灾祸，人类的行为应该对此（与自然灾害相比）负责¹³。这种导致社会技术系统崩溃的人为灾害的根本原因典型地在于意料之外的几个“错误”同时发生。尽管采取了安全预防措施，但是在意料之外的事件的结合的场合中，这些措施就会失效，这种情况是由于毫不相干的因果链偶然在某一点相交而产生的。预防措施仅仅用来对付那些意料之中的事件。一旦灾星因素出现，那么灾害——爆炸、破产等等——就将无法被外来干涉阻止的速度发生，即既来不及补偿，也来不及逐渐的适应。

佩罗（Charles Perrow），曾经分析过许多大型技术系统中的灾害，他根据刚刚描述过的模型强调了这些系统增加灾变发展可能性的两个特征：一个是系统的各个部分和过程之间的紧密联合以及由高度错综复杂而引起的相互作用；另一个是互不相干的过程之间不可预料的相互影响。这些特征不仅能在大的技术系统中找到，而且在社会系统中也能发现，的确尤其是像我们这样的高度发展的工业社会所表现出来的，分工的越来越细伴随着相互依赖因素的增多。

为了对有关系统崩溃的可能的社会学理论的要旨作出总结，应该强调的是，这种崩溃的基本条件不同于决定性的混沌的模型。社会系统崩溃的基本条件是动乱和应对之间的不平衡，而不仅仅是一种给定的状态变量的不规则波动。此外，有关的动乱可能是不同种类的：不仅有内部产生的而且有外来的，不仅是自发过程的结果而且也可能是有目的干涉的结果。对混沌现象狭义上

的理解也许能成为这样一种社会学理论的一部分，但是就运用于数学和化学理论中的“混沌”现象本身而言，在社会系统崩溃时它只起了一个小小的作用。

注 释

1. 最后一点强调一下。比如，在经济理论中，非线性关系的存在很早就被认识到了。但是，对平衡态条件的偏爱加上非线性系统令人生畏的数学复杂性打消了人们建立模型的企图。相反，非线性经济关系因素多半进行了线性化数学处理。对非平衡态动力学的越来越大的兴趣加上处理较为复杂的数学模型的技术能力的大大改善导致了这种状况的改变（见 Intriligator 1988）。
2. 鲍默（Baumol）指出，经济学著作中充满了产生某些类型的循环行为的模型。“然而，为了便于分析关系常常被假设为……是线性的……线性的假设的引入使得循环模型容易进行有效地分析，因而使我们看不到混沌行为方式出现的可能性”（Baumol 1987：105）。仅仅非线性能够产生混沌行为。在过去几年里，经济学著作已经提出了许多能够展现出混沌特性的模型。
3. 德鲁维（Druwe）（1988）将一个特殊领域的理论的概述称之为模型。
4. 当然，社会可能也被看作是远离热力学平衡态的系统，如果我们包含有社会是其成员的组织、资源利用和人工产品生产的过程的概念，但是当涉及到社会的哪些方面令我们感兴趣时，远离热力学平衡态这一事实并不是很有益的。再者，社会系统消耗能量，但是，不是这一事实而是它的技术的和社会的后果令我们感兴趣。
5. 一个例外是斯蒂奇威（Stichweh）（1987：447）。
6. 一般系统论很早就被提出了类似的要求。这是用在这里的一个很好的关于概括过程的例子。
7. De Greene 1981：105；德·格林（De Greene）特别强调这一点：只有当发展犹如决定性的因素，在向高层组织转移中，自组织的非线性过程才会导致新的特性的出现。
8. “人们假定，在事物总体与个体对总体的期望之间存在一种关联，即所谓总体将来状态对个体现在行为的反作用。在这种情形下，未必能发现可比的混沌现象”（Weizsäcker 1990：46）。

9. “在物理领域中，以相对简单的系统和无组织的复杂系统为主。在生活和人类领域中以部分有组织的复杂系统为主”（West 和 Salk 1987: 320）。
10. 这一点主要见麦兹（Mayntz）（1988）。
11. “分裂点”，在此处对付动乱的约束和补偿机制变得无效，仅仅由利于此目的的具体的制度而决定，因而不受个别动乱的特殊的绝对的紧张程度的限制——这使得社会科学对此类现象的分析变得非常困难。
12. 见韦伯（Weber）的研究“古代文化消亡的社会基础”，Weber（1956）。
13. 虽然社会科学家一直对灾祸进行着研究，但迄今为止他们主要关心的是对灾祸后果的控制，因此可以说，关心的是在一段时期内稳定得到重建而不是灾祸的原因。两个重要的例外是特纳（Barry A. Turner）（1978）和佩罗（Charles Perrow）（1984）的著作，以下主要是基于他们的观点。

参 考 文 献

- [1] Albach, Horst. 1988. “Geburt und Tod von Unternehmen.” In: Klaus Hierholzer/Hans-Günter Wittmann, eds. *Phasensprünge und Stetigkeit in der natürlichen und kulturellen Welt*. Stuttgart: Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, 39 – 63.
- [2] Baumol, William J. 1987. “The Chaos Phenomenon: A Nightmare for Forecasters.” *LSE Quarterly*. 1: 99 – 114.
- [3] Boudon, Raymond. 1977. *Effets pervers et ordre social*. Paris: Presses Universitaires de France.
- [4] Bühl, Walter L. 1984. “Die Dynamik sozialer Konflikte in Katastrophentheoretischer Darstellung.” *Kölner Zeitschrift für Soziologie und Sozialpsychologie*. 36: 333 – 341.
- [5] Bühl, Walter L. 1990. *Sozialer Wandel in Ungleichgewicht. Zyklen, Fluktuationen, Katastrophen*. Stuttgart: Enke.
- [6] Casti, John. 1982. “Topological Methods for Social and Behavioral Systems.” *International Journal of General Systems*. 8: 187 – 210.
- [7] Crozier, Michel 1964. *The Bureaucratic Phenomenon*. Chicago: University of Chicago Press.

- [8] De Greene, Kenyon B. 1981. "Limits to Societal Systems'Adaptability." *Behavioral Science* 26: 103 – 113.
- [9] Druwe, Ulrich. 1988. "'Selbstorganisation'in den Sozialwissenschaften: Wissenschaftliche Anmerkungen zur Übertragung der naturwissenschaftlichen Selbstorganisationsmodelle auf sozialwissenschaftliche Fragestellungen." *Kölner Zeitschrift für Soziologie und Sozialpsychologie* 40: 762 – 775.
- [10] Eigen, Manfred, and Peter Schuster. 1979. *The Hypercycle*. Heidelberg, Berlin, New York: Springer.
- [11] Erdmann, Georg. 1986. "Konsequenzen der synergetischen Verhaltensannahme auf die Modellbildung in den Wirtschafts – und Sozialwissenschaften." In: R. Kappel, ed. *Im Spannungsfeld von Wirtschaft, Technik und Politik Festschrift für Bruno Fritsch*. München, 385 – 405.
- [12] Erdmann, Georg, and Bruno Fritsch. 1989. "Synergismen in sozialen Systemen, ein Anwendungsbeispiel." In: Ali B. Cambel, Bruno Fritsch, and Jürgen U. Keller, eds. *Dissipative Strukturen in integrierten Systemen*. Baden – Baden: Nomos, 239 – 261.
- [13] Flay, Brian R. 1978. "Catastrophe Theory in Social Psychology: Some Applications to Attitudes in Social Behaviour." *Behavioural Science* 23: 335 – 350.
- [14] Foerster, Heinz von. 1960. "On Self – Organizing Systems and Their Environments." In: M. Yovits and S. Cameron, eds. *Self – Organizing Systems*. London: Pergamon Press, 31 – 51.
- [15] Gierer, Alfred. 1981. "Social Economic Inequalities: Effect of Self – Enhancement, Depletion and Redistribution." *Jahrbuch für Nationalökonomie und Statistik* 196: 309 – 331.
- [16] Grossmann, Siegfried. 1989. "Chaos in the International Arms Race." *Nature* 337: 701 – 704.
- [17] Haken, Hermann. 1978. *Synergetics. An Introduction*. Berlin: Springer.
- [18] Haken, Hermann. 1984. "Can Synergetics Be of Use to Management Theory?" In: H. Ulrich and G. J. B. Probst, eds. *Self – Organization and Management of Social Systems*. Berlin: Springer, 33 – 41.
- [19] Harary, Frank. 1959. "A Criterion for Unanimity in French's Theory of Social Power." In: Derwin P. Cartwright, ed. *Studies in Social Power*. Ann Ar-

- bor: *Institute for Social Research, University of Michigan*, 168 – 182.
- [20] Hayek, Friedrich A. 1955. *The Counter – Revolution of Science*. New York: Free Press.
 - [21] Hejl, Peter M. 1982. *Sozialwissenschaft als Theorie selbstreferentieller Systeme*. Frankfurt a. M.: Campus.
 - [22] Intriligator, Michael D. 1987. "Non-Linear Programming." In: *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*. London: Macmillan, 660 – 670.
 - [23] Krohn, Wolfgang, and Günter Küppers. 1989. *Die Selbstorganisation der Wissenschaft*. Frankfurt/Main: Suhrkamp.
 - [24] Krohn, Wolfgang, Günter Küppers, and Rainer Paslack. 1987. "Selbstorganisation zur Genese und Entwicklung einer wissenschaftlichen Revolution." In: Siegfried J. Schmidt, ed. *Der Diskurs des radikalen Konstruktivismus*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp. 441 – 465.
 - [25] Lindenberg, Siegwart. 1977. "Individuelle Effekte, Kollektive Phänomene und das Problem der Transformation." In: Kurt Eichner and Werner Habermehl, eds. *Probleme der Erklärung sozialen Verhaltens*. Meisenheim am Glan: Hain, 46 – 84.
 - [26] Linz, Juan J. 1978. *The Breakdown of Democratic Regimes: Crisis, Breakdown, and Re-equilibration*. Baltimore/London: The Johns Hopkins University Press.
 - [27] Luhmann, Niklas. 1984. *Soziale Systeme. Grundriß einer allgemeinen Theorie*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp.
 - [28] Maturana, Humberto L., and F. J. Varela. 1975. *Autopoietic Systems. A Characterization of the Living Organization*. Urbana: University of Illinois Press.
 - [29] Mayntz, Renate. 1988. "Soziale Diskontinuitäten: Erscheinungsformen und Ursachen." In: Klaus Hierholzer and Heinz-Günter Wittmann, eds. *Phasensprünge und Stetigkeit in der natürlichen und kulturellen Welt*. Stuttgart: Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, 15 – 37.
 - [30] Mayntz, Renate. 1990. "The Influence of Natural Science Theories on Contemporary Social Science." MPIFG Discussion Paper 90/7. Köln: Max-Planck-Institut für Gesellschaftsforschung.
 - [31] Mayntz, Renate. 1991. "Naturwissenschaftliche Modelle, soziologische Theo-

rie und das Mikro-Makro-Problem." *Die Modernisierung moderner Gesellschaften. Verhandlungen Zum 25. Deutschen Soziologentag in Frankfurt/Main 1990.*

- [32] McPhee, William N. 1963. *Formal Theories of Mass Behaviour*. London: Free Press.
- [33] Michelitsch, Michael. 1987. "Die Wirtschaft – ein selbstorganisiertes offenes System." *Technische Rundschau* 27: 10 – 22.
- [34] Parsons, Talcott. 1951. *The social System*. Glencoe: Free Press.
- [35] Perrow, Charles. 1984. *Normal Accidents*. New York: Basic Books.
- [36] Prigogine, Ilya. 1980. *From Being to Becoming-Time and Complexity in Physical Sciences*. New York: Freeman.
- [37] Schelling, Thomas. 1978. *Micromotives and Macrobehavior*. New York/London: Norton and Company.
- [38] Schuster, Heinz G. 1987. *Deterministic Chaos; An Introduction*, second edition. Weinheim: VCH.
- [39] Stichweh, Rudolf. 1987. "Die Autopoiesis der Wissenschaft." In: D. Baecker et al, eds. *Theorie als Passion*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp, 447 – 481.
- [40] Sussmann, Hector J. and Raphael S. Zahler. 1978. "A Critique of Applied Catastrophe Theory in the Behavioral Sciences." *Behavioral Sciences* 23: 383 – 389.
- [41] Teubner, Gunther. 1989. *Recht als autopoietisches System*. Frankfurt/Main: Suhrkamp.
- [42] Thom, René. 1972. *Stabilité structurelle et morphogenèse*. Reading. Mass.: Benjamin.
- [43] Tilly, Charles. 1978. *From Mobilization to Revolution*. Reading, Mass.: AddisonWesley.
- [44] Turner, Barry A. 1978. *Man-Made Disasters*. London: Wykeham.
- Weber, Max. 1956 (1896). *Soziologie. Weltgeschichtliche Analysen. Politik*. Stuttgart: Kröner.
- [45] Weidlich, Wolfgang, and Günter Haag. 1983. *Concepts and Models of a Quantitative Sociology. The Dynamics of Interacting Populations*. Berlin: Springer.

- [46] Weidlich, wolfgang, and Günter Haag, eds. 1988. *Interregional Migration: Dynamic Theory and Comparative Analysis*. Berlin: Springer.
- [47] Weizsäcker, Carl von C. 1990. "Ordnung und Chaos in der Wirtschaft." In: W. Gerok, ed. *Ordnung und Chaos in der unbelebten und belebten Natur*, second edition. Stuttgart: Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, 43 - 57.
- [48] West, Bruce J., and Jonas Salk. 1987. "Human Conduct and Natural laws: Laws of Simple and Complex Systems." In: I. Prigogine and M. Sanglier, eds. *Laws of Nature and Human Conduct*. Brussels: Task Force of Research Information and Study on Science, 317 - 325.
- [49] Zahn, Erich. 1979. "Diskontinuitäten im Verhalten sozio-technischer Systeme. Betriebswirtschaftliche Interpretationen und Anwendungen von Theoremen der mathematischen Katastrophentheorie." *Die Betriebswirtschaft* 39: 119 - 141.
- [50] Zeeman, E. C. 1977. *Catastrophe Theory. Selected Papers 1972 - 1977*. London: Addison-Wesley.

Yoshisuke Ueda

一、引言

我非常荣幸将这一精彩的主题“奇怪吸引子和混沌的起源”作为我今天的发言。首先我要利用这次机会，对每一位计划和促使这次会议顺利召开的人们表示衷心的感谢。

目前，人们说我在 1961 年 11 月 27 日用我的模拟计算机采集的数据是在一个二阶非自治周期系统中发现混沌的最早的例子。在这同一时期，Lorenz 在一个三阶自治系统中发现了混沌。

在那时对在我实验中偶然碰到的这似乎神秘的现象，我轻易的败下阵来。对我来说，这算不上什么荣誉，而仅仅是一个发现的行动。长期以来我所做的是继续实现了解这一悬而未决现象的强烈愿望。“什么是一个非线性系统可能的稳定状态？”这已经成为我的疑问。我的范例（paradigm）就是现象自身，不是写有摘要的论文，是我能够实际观察或用数量表示的某些东西。

在这篇文章中，我将回忆在 1978 年前后，在混沌研究开始之前，日本科学的普遍状况和我研究的环境。当我准备这一演讲时，我问我自己是什么促使我如此不屈不挠地探索我的问题，但我必须承认我不知道答案。在我强烈的梦想中，我没有想到正是关于这个主题，我有机会作演讲。如此出乎意外，我的思绪已经完全混沌了。

作为一个单纯的理论术语，我认为“混沌”一词并不非常恰当。那么我们称它作什么呢？我的建议是“随机的转变现象”

(randomly transitional phenomena), 我解释如下。

在物理系统中混沌的特征可总结如下:

- 发生在确定系统中的随机现象。
- 短期行为是可预测的随机现象。
- 长期行为是不可预测的随机现象。

但混沌确实有一个确定的结构。

我认为混沌原来的意思是“完全的无序和极端的不可预测性”。但作为科学的专门术语,“混沌”一词似乎是过分强调了不可预测性。这次会议提供了一个机会澄清这一误解,告诉大家这个词的正确含意。

即使如此,我在这还是使用了“混沌”一词来代替“随机转变现象”。它是一个已渗入到人们思想中的一个简明的说法,因此我认为阻止它的使用是毫无意义的。

二、在一个非自治系统中的最早的混沌——一个破碎的蛋形 (A Shattered egg)

对我来说,1961年11月27日是一个纪念日,虽然在那特殊的日子并没有任何令人惊奇的事情或任何强烈的值得记忆的事情发生。我想起的是我正好写完了我将在12月16日召开的一个特别会议上发表的论文数据的解说词,这篇论文的内容是关子电子通讯工程学会的非线性理论。那天在 Susumu Hiraoka 的帮助下,完成了某些模拟计算机实验, Susumu Hiraoka 比我低两年级,帮助检验我在论文中引用的计算的可用性。如果在老式(早就不用了的)模拟计算机的打印输出上没有打印日期,我不可能回想起日期(图1)。

那时,我是京都大学第三年级的研究生,在 Chihiro Hayashi 教授指导下,从事频率诱导 (frequency entrainment) 现象的研究工作。当一个电路(振子),在没有外界影响下,能持续产生某一频率和振幅的电子振荡(自保持),在外部信号的驱动下它的振荡频率将趋向并与驱动频率保持同步,这一外部驱动信号的频

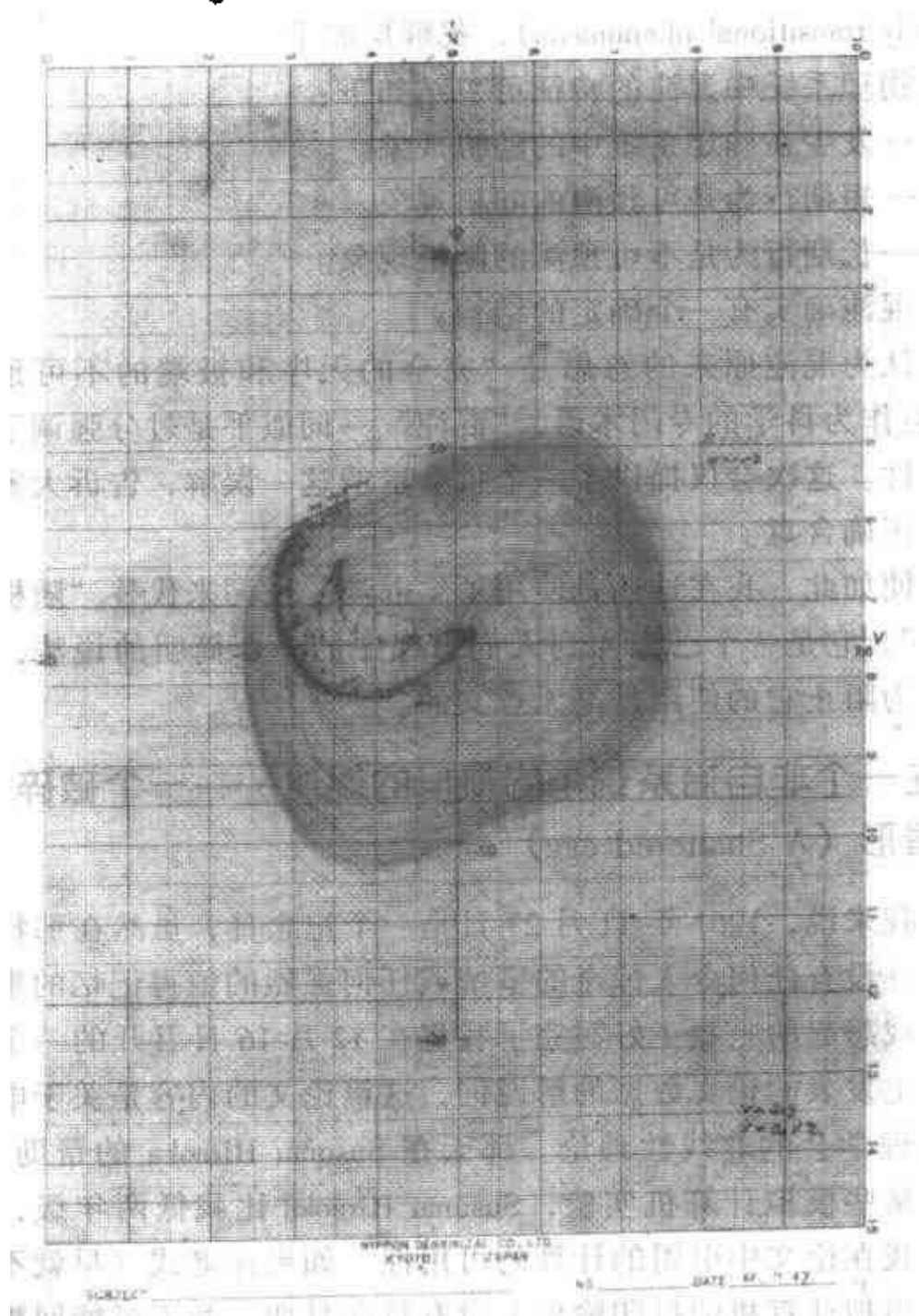


图1 方程的模拟输出

$$\ddot{v} - \mu(1 - \gamma v^2)\dot{v} + v^3 = B \cos \nu t \quad (1)$$

其中 $\mu = 0.2$, $\gamma = 0.8$, $B = 0.35$ 。1961年11月27日得到。在 $\dot{v}$ 平面上用浅线画出了连续的轨道，深点给出的是在零相位时的 Poincaré 截面，在顶部的5个点 is 固定点，对应的值是 $\nu = 1.01, 1.012, 1.014, 1.016$ 和 1.018 ；余下的是在 $\nu = 1.02$ 时，在混沌吸引子上的点（资料来源：H. B. Stewart 博士，Brookhaven 国家实验室）

率与自振荡频率是不同的。这种现象被称为频率诱导。当然，也有例外——这取决于驱动频率和振幅的值，某些情况下诱导不会发生。取而代之的是出现一个具有驱动频率的非周期的“拍频振荡”。

当时我正接受大阪理工学院的 Hiroshi Shibayama 教授的直接指导，他是作为客座学者每周访问我们实验室许多次。他热情而温和，让我做我想做的任何事情，教导我做研究的基础知识。直到现在我仍尊敬他。作为我的长辈朋友并接受他的各种建议。

我的计算实验的主要目的是模拟描述频率诱导的非线性常微分方程，检验能引起同步驱动信号的频率和振幅的范围，也检验产生振荡的振幅和相位。在这允许我介绍一些技术细节。近似计算是使用平均的方法（近似就是在这一阶段引入计算过程的，其结果是混沌被抑制了）将非自治方程重新写成一个自治的方程。目的是用自治方程的一个平衡点或极限环来近似原系统的稳定态。在这种方法中，稳定平衡点相应于同步的频率诱导，一个稳定的极限环相应于同步的驱动情况。实际上存在两种同步振荡——拟周期振荡（在平均方程中用极限环代表）和混沌振荡（由奇怪的或混沌的吸引子代表），但那时的常识未能认识到混沌振荡。在当时，对一个（二阶）自治系统的稳定状态仅知道存在平衡点和极限环，因此认为非同步情况就意味着拟周期性。人们具有先入之见是可以理解的。在 1961 年 11 月 27 日那天，当我改变参数（驱动输入的频率），结果从频率诱导变成了非同步，由我的模拟计算机画出的振荡现象确实是混沌的。什么也比不上图 1 中光滑的椭圆形封闭曲线，它更像一个具有不平坦边沿的破碎的蛋形。我首先想到的是我的模拟计算机已经出错了。但不久我认识到不是这种情况。它的确花了我很长时间来分辨在非同步状态时所有事实的秘密。破碎的蛋形出现的频率比光滑的、封闭曲线更快，画破碎的蛋形的点的秩序是完全不规则的，似乎是不可预测的。我看到我的导师在准备报告时，没有提到这种破碎蛋形现象，而是用光滑的拟周期振荡封闭曲线替代，我对他写报告的

技巧留下了很深刻的印象。同时，我意识到人们在阅读这类报告时需要非常仔细。

由于 Minoru Abe，比我高三年的同学，在他的研究项目中建立和发展起来的模拟计算机，我在这变成了相对次要的地位。我要向他表示深深的致意，他用真空管手工制造出了如此复杂和精细的实用计算机。图 2 是由计算机算出的波形数据的一个例子。它使我想起了坐在模拟计算机前长时间耐心的等待，也使我想起了我对它的精度感到的惊奇——这是对它惟一技能的试验。为了获得如图 2 显示的一张数据，它花了计算机大约 60 ~ 100 分钟。我在研究生院 5 年期间积累了至少 1000 张数据，它们中的大多数已经丢弃了。我要提到的是在制造这台计算机的过程中，我没有作出太多的贡献，仅帮助他制作了几个运算放大器和学会维修斩波放大器和记录仪。当我回首往事时，我感到经过那些长时间使人筋疲力尽的在计算机前的值夜、凝视计算机的输出，在我的脑海中，混沌已成为一种完全自然的、每天出现的现象。人们称混沌为一种新现象，但它早已在各处存在。它并不是一种新现象，只是人们没有注意到它而已。

当我想起在模拟计算机前的那漫长的时间时，我也想起了我的同学 Toshiaki Murakami，他在 1961 年 4 月已完成了他的硕士学位并参加了工作。在我们的研究生院的日子，我们习惯了使用模拟计算机的竞争。他和他的指导老师，Yoshikazu Nishikawa，比我们高四年的学生，也习惯进行长时间的值夜，刻苦地逐点观察 Duffing 方程的初始条件区域，他们发表在参考文献 [2] 中的图 10.6 和 [3] 中的图 4 上的主要结果，重新在图 3 中给出。在文献 [3] 中的图 3 重新作为后面的图 4 给出，我们能够清楚地看到曲线 (α -分支)，它在盆域边界上从鞍点 3 旋转向下到点 1。当时，图的合理性在专家中成为争论的问题。Hayashi 博士本人表示了他的怀疑，没有将它收录到他在 1964 年由 McGraw-Hill 出版的书中。我将在后面的第 5 节中讨论这一点。

在 1961 年 12 月发表的研究数据中^[1]，将对应频率诱导区域

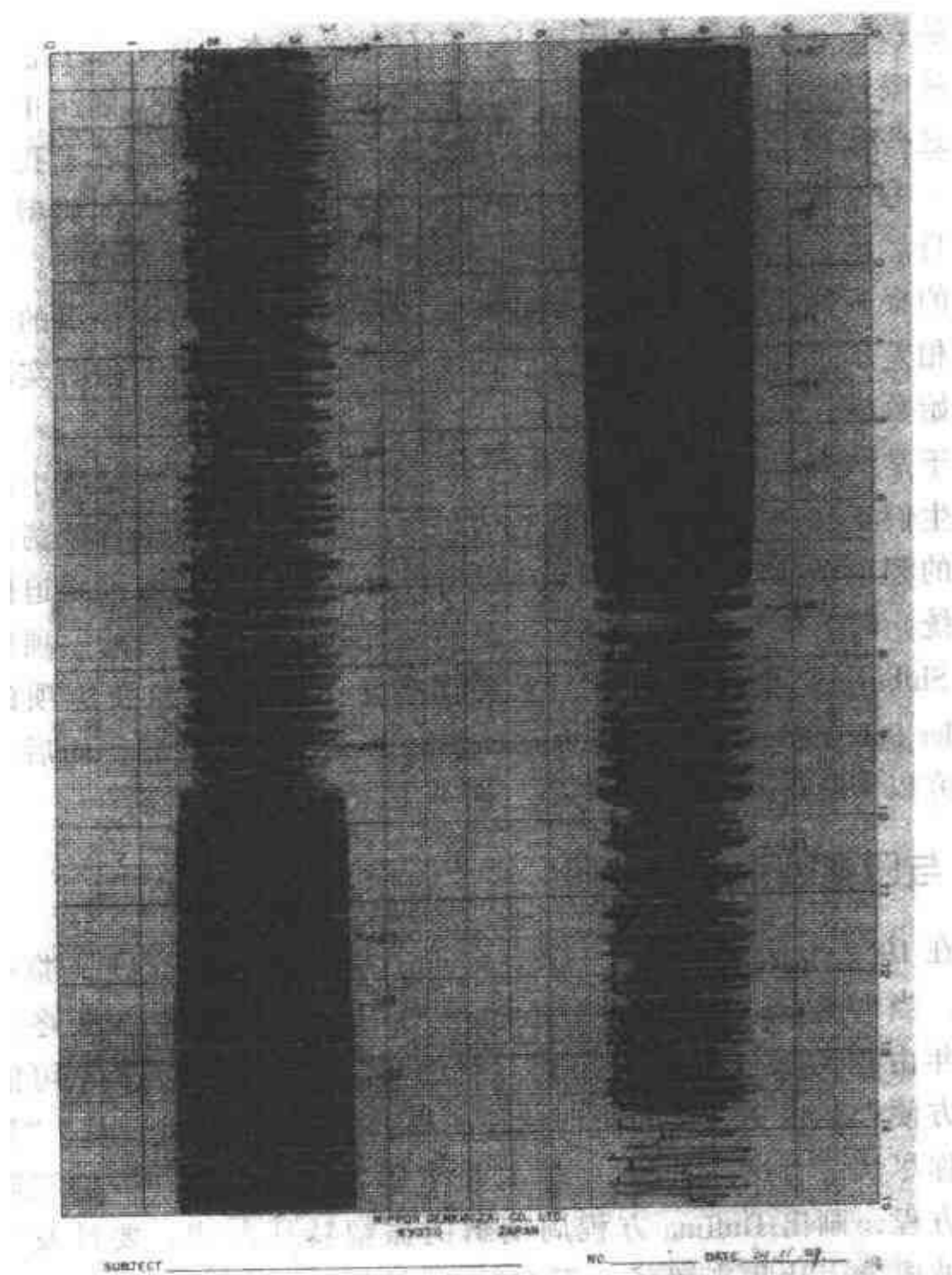


图2 ν 不同时方程 (1) 的模拟波形, $B \approx 0.3$ 。在波形上的每一个脉冲, 对应于在外部周期扰动的每一个周期上, 显示了一个时标。这些脉冲是由一个独立于方程 (1) 的主模拟计算电路的辅助电路产生的。当这些脉冲序列形成一条直线 (经过瞬态后), 我们能够推断系统在外部周期信号的诱导下出现了周期运动。这些数据从诱导状态发展成非同步状态, 反之亦然, 呈现出一个窄的滞后区域 (资料来源: H. B. Stewart 博士, Brookhaven 国家实验室)

边界的鞍——结点绘在极限环上，但仔细的检查发现实际上它不是在极限环上。这一错误立即在以后发表的论文中予以了纠正。

这些数据完好保存的实事本身就是一个奇迹。它代表了我这种人一毛不拔的倾向——一种在战争期间长大的那些人的典型特点。自然地，我不能确认那些在当时没有标日期的图的时间。但下面的报表能从其他数据得到证实，像那些非线性研究小组的数据，相差不过几个月。我将在后面的第八节中简单论及当时实验的原始数据。

于是结束了 1961 年。在 1962 年，Hayashi 的非线性振荡小组的学生们正在研究具有周期驱动信号自振荡系统（强迫自振荡系统）的频率诱导现象，亦研究在没有外部周期信号加入（强迫振荡系统）时，一个保持稳定平衡态的系统的振荡现象。前一项研究以 Shibayama 教授为中心，主要集中于分析有外加强迫项的 Van der Pol 方程或 Van der Pol 与 Duffing 方程的混合问题，而后一项研究以 Nishikawa 教授为中心，研究 Duffing 方程。

三、与日本吸引子的遭遇

在 1962 年秋或冬季的一天，Chihiro Hayashi 教授正在实验室等我。当时他正为他的即将出版的书面忙碌，他的书最终于 1964 年由 McGraw-Hill 公司出版。对他写书来说，在实验室可能更加方便：他占据了实验室而让他的办公室闲着。他告诉我“我想让你尽快进行这一计算”。这就是求解具有四个未知数的三阶联立方程，画出 Duffing 方程周期解的振幅特征曲线，要计及三次谐波成分。让我来解释一下 Hayashi 教授要求的详情。当他将他的书的第 6 章送到 McGraw-Hill 图书公司时，一个评审者认为有一个缺陷而将它退回。第 6 章的内容与它早期的书 (1953)^[4] 的第 3 章基本上是相同的。我记起来评审者是威斯康星大学的 Higgins 教授。在书中，Hayashi 教授给出了阻力项为零的 Duffing 方程的周期解的振幅特征曲线（图 5），这一周期解仅代表了余弦分量，没有给出具有非零阻力系数的曲线。这就是退稿的原

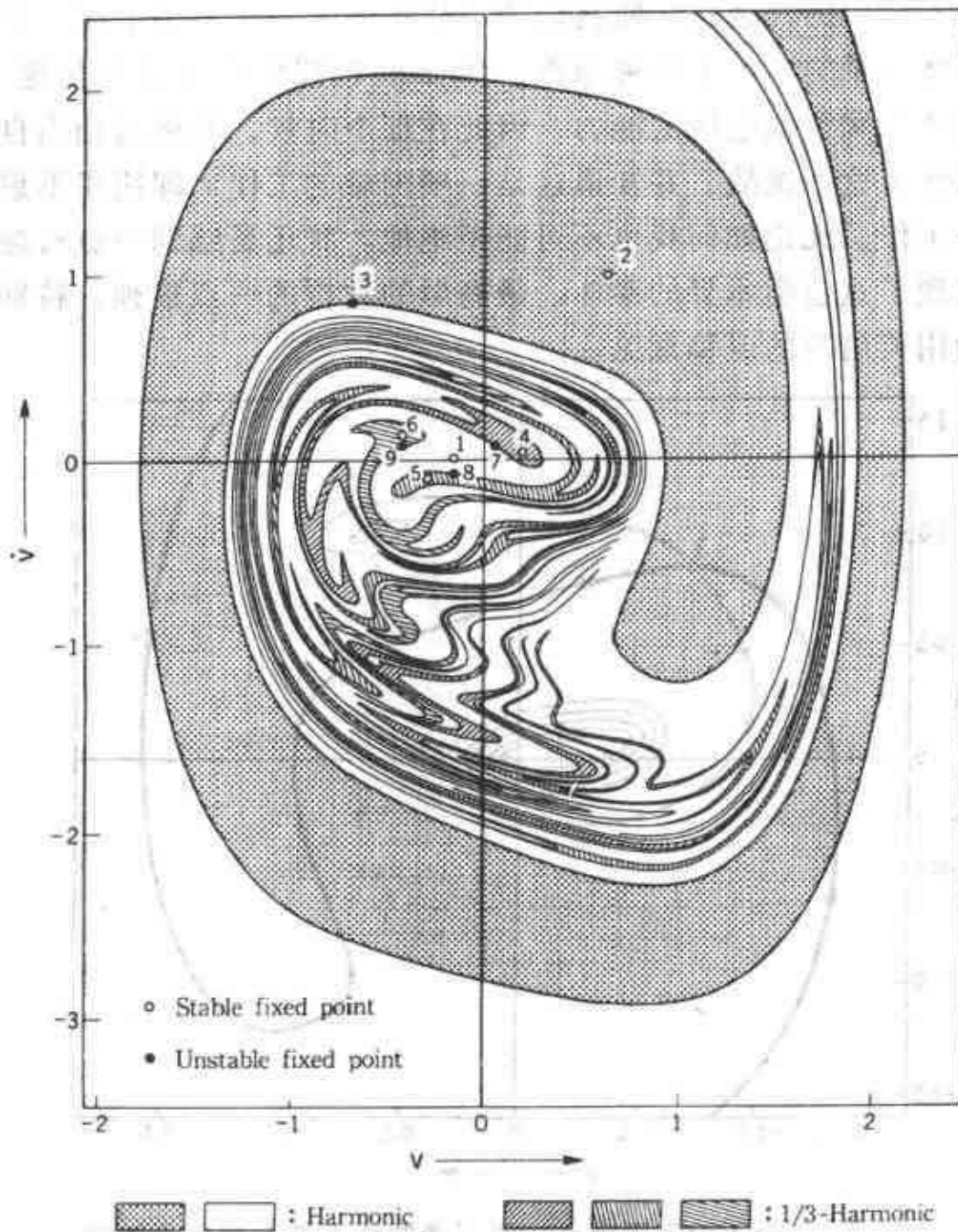


图3 谐波和1/3次谐波响应的吸引域，点1和2表示固定点，分别代表无共振和有共振的谐波振荡，3点是盆域边界上的鞍点，4、5和6点是绝对稳定的3周期点，代表1/3次谐波振荡。这一吸引盆域相图，是对 Duffing 方程

$$\ddot{v} + k\dot{v} + v^3 = B \cos t \quad (2)$$

进行模拟计算机实验，在 w 平面上详尽检查所有的初始点获得的。其中 $k=0.1$ ， $B=0.5$ （资料来源 McGraw-Hill 图书公司和日本印刷与出版公司 [2, 3, 17]）

因。当阻力系数不是零时，在周期解中，除了余弦分量外正弦分

量是必不可少的。因此，使我们的工作量增了一倍。用手摇计算器是非常困难的。由于某种原因，Hayashi 教授信任我且有快速、准确的计算和仔细绘图的能力。因此在那个时候，我感到相当自豪，接受了这一挑战，并知道这是一项困难的工作。即使我不想做这一工作，无论如何我也不可能拒绝他。我还是感到一点有趣的是发现了这位学术界的泰斗、最高傲的教授的一点狼狈，特别是因为用英语写的退稿意见。

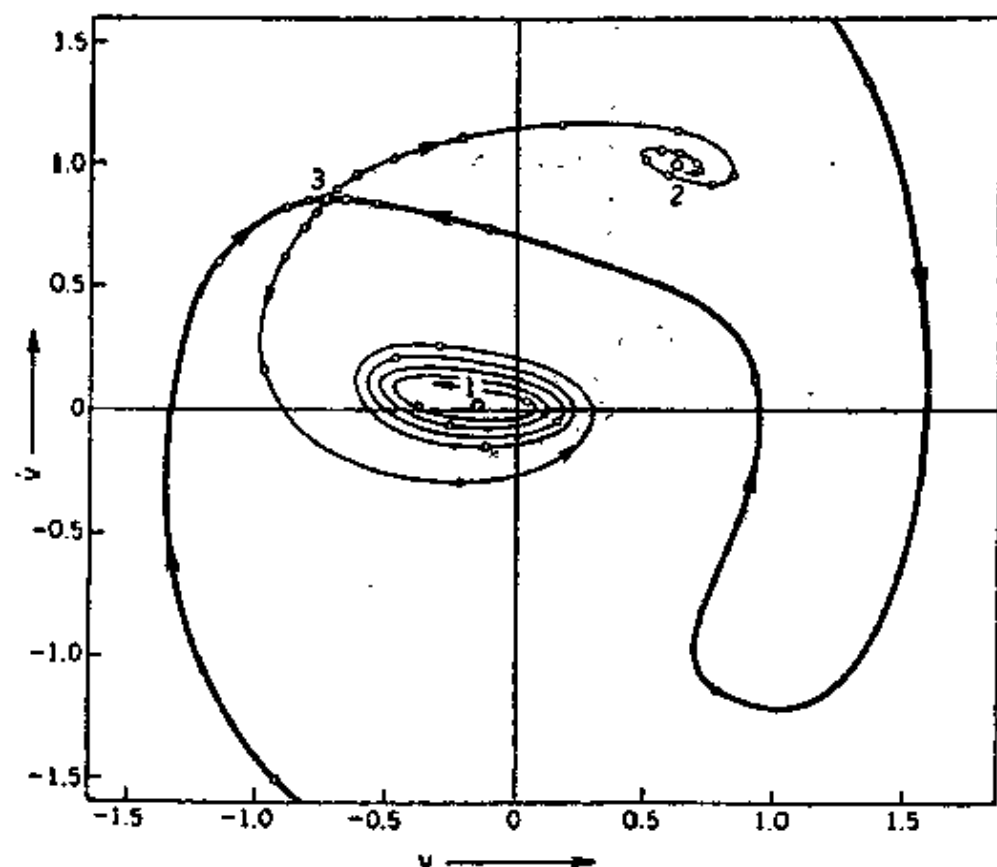


图 4 完全不稳定固定点 3 的不变曲线上的某些像点的轨迹。与图 3 中的方程和参数相同（资料来源：日本印刷与出版公司 [3, 17]）。

靠蛮力求解具有 4 个未知量的三阶联立方程组是不可能的，我从四个表达式中消除了两个变量，得到了只有两个未知量的高阶联立方程。先给出了周期解的幅值，通过一小点“操作”，然后回到计算外部强迫信号的幅值，最后靠手工计算，用 Newton - Raphson 方法求解了三阶方程组的大约 50 种状态，并绘成了曲线

如图 6 所示（参考文献 [2] 中的图 6.1）。我很高兴地记起了这次在几周内完成的紧急工作。阻力系数设置为 0.2。

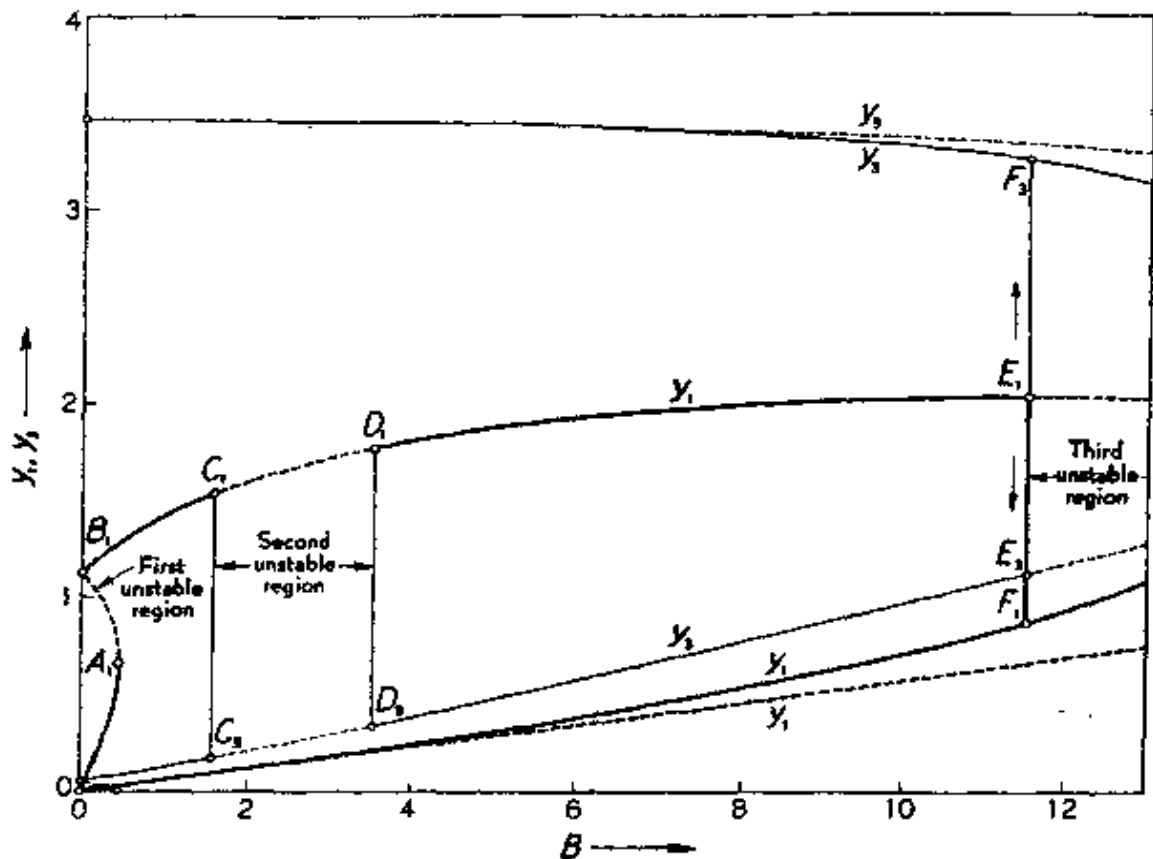


图 5 $k = 0$ 时，方程 (2) 的周期解的幅值特征

$$v = y_1 \cos t + y_3 \cos 3t \quad (3)$$

利用谐波平衡法得到（资料来源：日本印刷与出版公司^[4]）

画出的周期解的幅值特征曲线，仅有两个频率分量，它只不过是一个近似解。因此可靠的方法应该用模拟计算机来验证得到的结果。我在计算机前，又连续工作了好几天。当外部强迫信号幅值增加时，周期解中高频分量也增加了，增加了响应时间，使伺服乘法器继续工作更加困难——这反映了非线性项的影响。结果，人们不得不加大计算机的时间步长，来减小响应的时间。我以外部强迫信号 2π 为一个周期重复计算，每个周期相当于 31.4 秒。在计算过程中，我遇到了相当多的混沌振荡（日本吸引子的来源），这使得我很为难，但 Hayashi 教授告诉我，“哦，它可能需要时间逐渐稳定到亚谐波振荡。即使在一个实际的串联谐振电

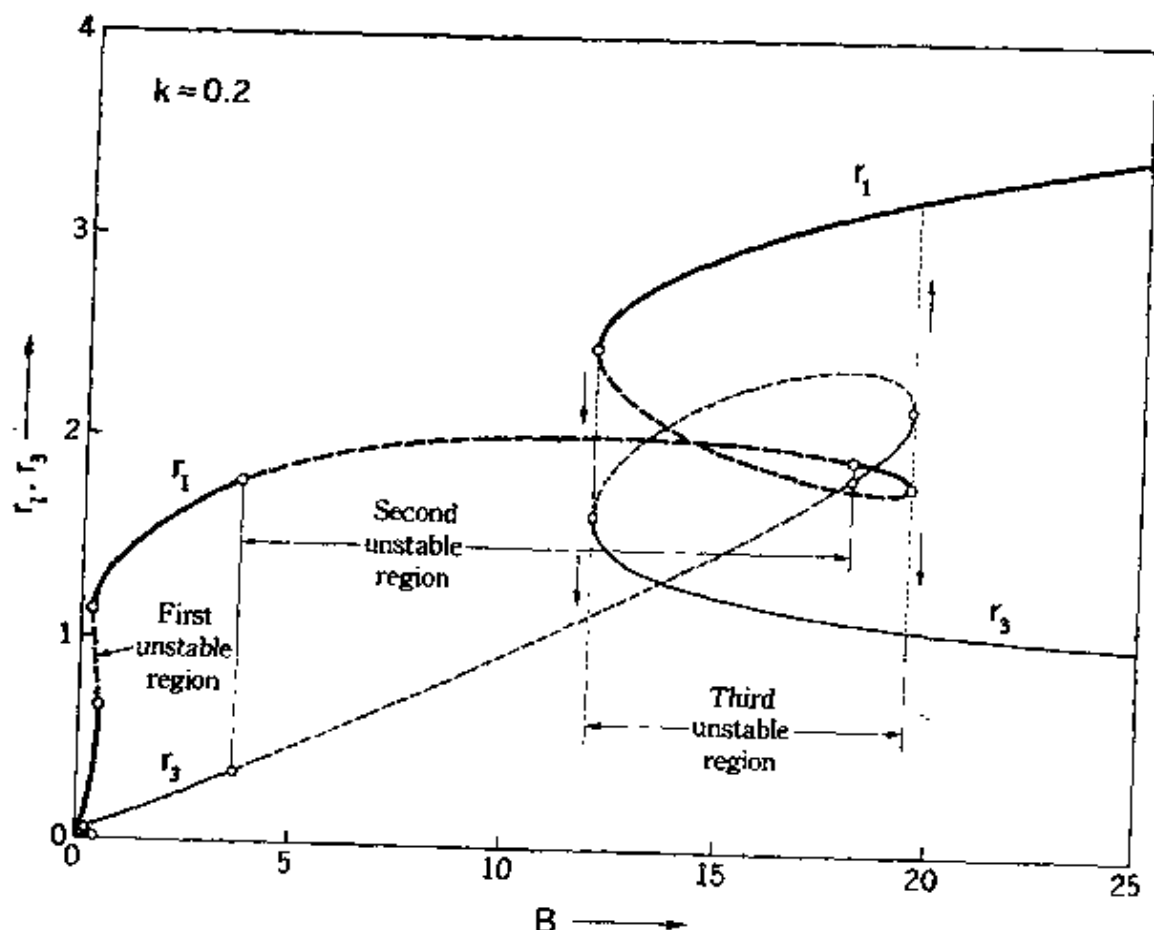


图6 $k=0.2$ 时, 方程 (2) 的周期解幅值特征

$$v = x_1 \sin t + y_1 \cos t + x_3 \sin 3t + y_3 \cos 3t \quad (4)$$

其中 $r_1^2 = x_1^2 + y_1^2$, $r_3^2 = x_3^2 + y_3^2$ (资料来源: McGraw-Hill 图书公司^[2])

路中也有这样的瞬态过程, 它持续很长时间”。当我回顾往事, 我当时似乎已经意识到混沌不只是能出现拟周期现象的强迫自振荡系统中才有的现象。

现在仅留下了一些不完整的用模拟计算机和手工计算得到的原始资料, 当时我真担心如果 Hayashi 教授看到了这些数据, 他一定要我重复模拟计算机实验, 直到这些瞬态过程稳定到一个更合理的结果。我意识到无论我进行多长时间的模拟, 也不能得到他想要的的数据。除了修改一些错误的的数据外, 我必定要试一下更大的阻力系数 0.4。在 1978 年, 当我们离开时丢掉了这些悬而未决的数据, 将他们烧毁。在我的博士学位论文中有得到振幅特性曲线的详情 (图 7 和图 8)。截至 1963 年的夏天, 也得到了非平

衡周期解振幅特征曲线。但这些结果并没有在 McGraw-Hill 出版的书中发表，当时手稿一定已经编辑完成。图 7 和图 8 已包含在参考文献 [5] 中，但根本没有出现任何混沌的描述，根据这些数据，Hayashi 教授写出了他的关于更高次谐波振荡的论文。他在马赛召开的国际会议上报告了这篇论文 [6]。我在 1964 年的春季完成了我的博士论文或更准确地说，通过了博士论文答辩。离开研究生院后，我受雇于电子工程系做研究助理。在那一年，Hayashi 教授的书，物理系统中的非线性振荡出版了 [2]。学生通常爱挑剔他们的老师。我认为“Hayashi 教授的书只不过是一本谐波平衡法的数据手册”。现在书中这些图表已经过时。当我写到这些，我庆幸自己还没有出版一本书。

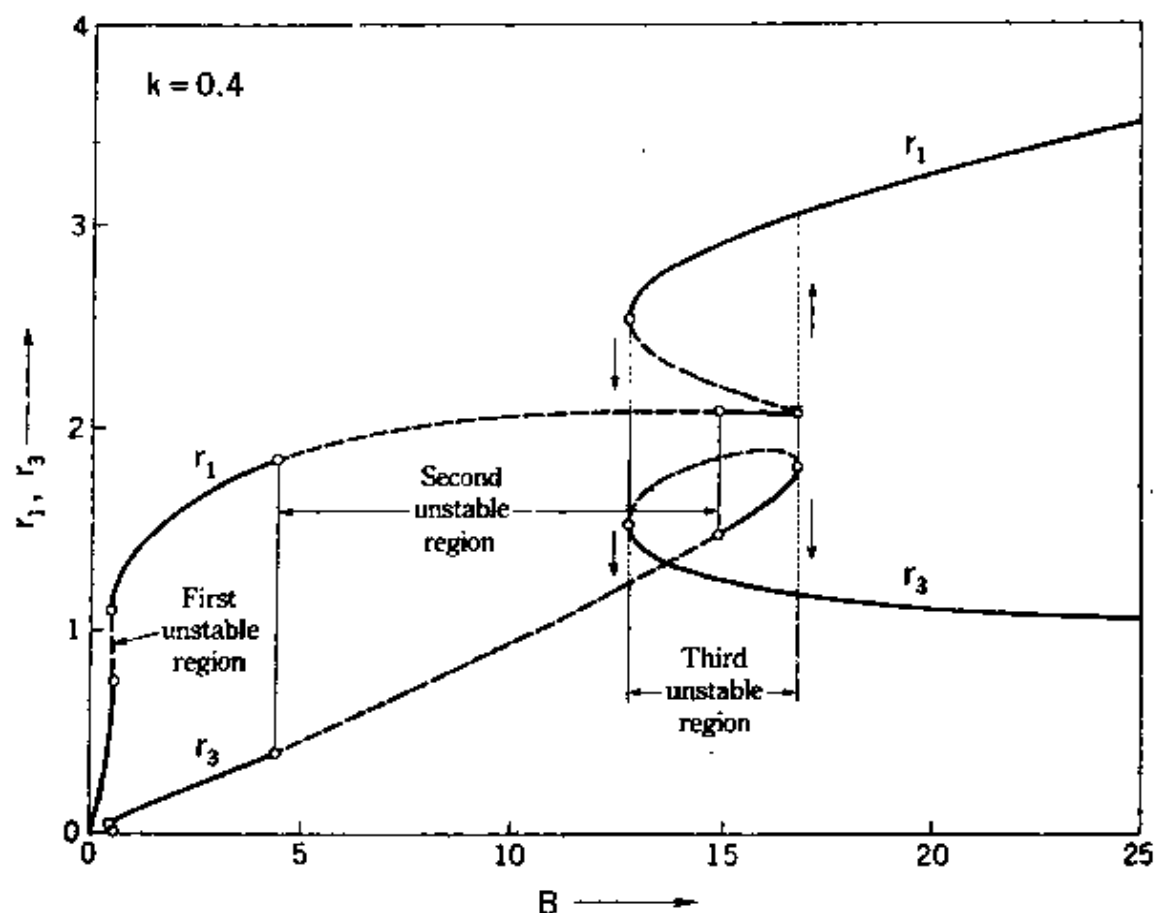


图 7 $k = 0.4$ 时，方程 (2) 的周期解的幅值特征。

$$v = x_1 \sin t + y_1 \cos t + x_3 \sin 3t + y_3 \cos 3t$$

其中 $r_1^2 = x_1^2 + y_1^2, r_3^2 = x_3^2 + y_3^2$ (资料来源：日本印刷与出版公司 [6, 17])

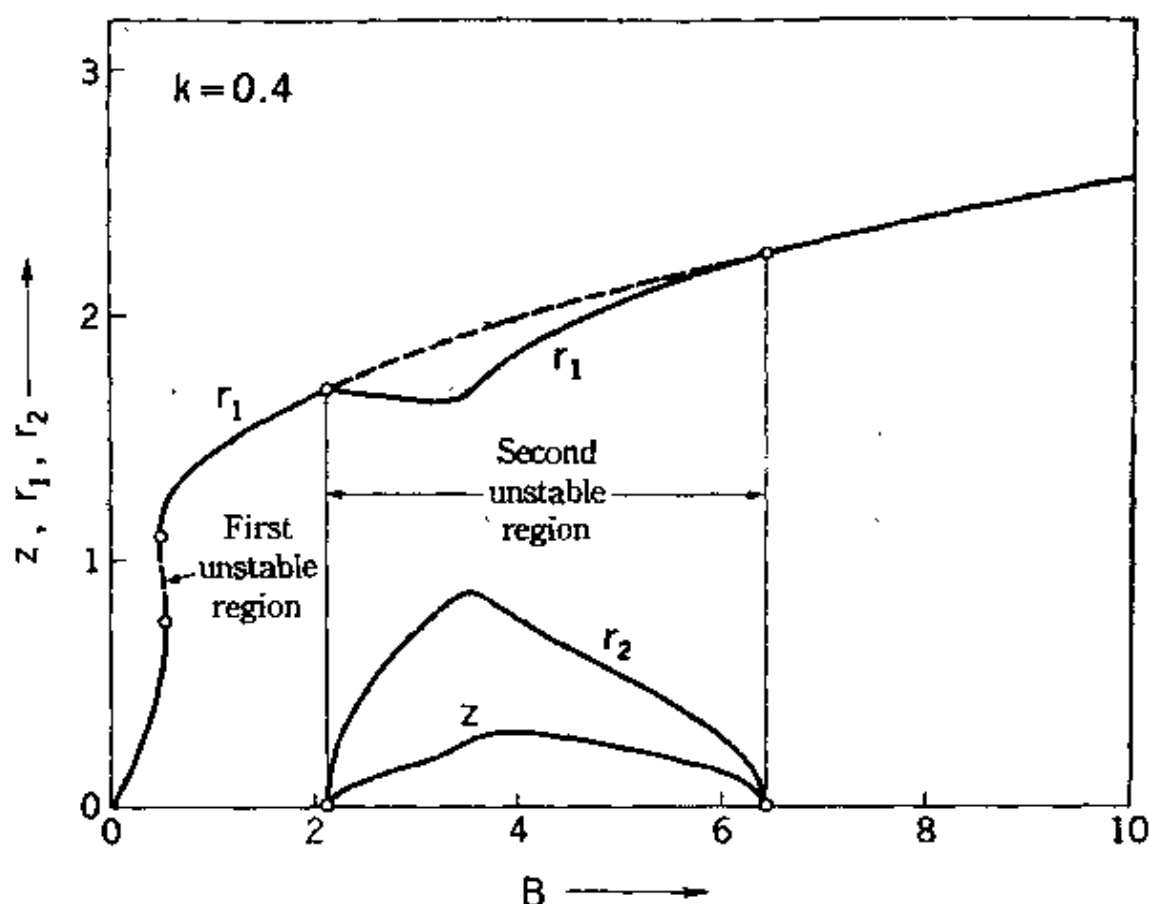


图 8 $k=0.4$ 时, 方程 (2) 的周期解的幅值特征

$$v = z + x_1 \sin t + y_1 \cos t + x_2 \sin 2t + y_2 \cos 2t$$

其中 $r_1^2 = x_1^2 + y_1^2, r_2^2 = x_2^2 + y_2^2$ (资料来源: 日本印刷与出版公司^[6,17])

四、“McGraw-Hill 图书”时代的 Hayashi 实验室

上面提到的是 Hayashi 教授的“McGraw-Hill 图书”出版之前的 Hayashi 实验室的情况。当时实验室充满了由模拟计算机得到的混沌数据, 然而他们被视为是一种拟周期振荡或瞬态过程。我想简单地提一下当时在实验室发生的事情。Shibayama 教授已经完成了他的学位论文, 停止了访问研究。早几年 Nishikawa 教授也离开了非线性振荡小组转向了控制工程领域。Abe 教授正将他的大部分注意力集中于将类似的技术应用于控制系统, 这与非线性振荡间接相关。这使我成为了实验室有关非线性振荡的高级研究员。

即使在 Hayashi 教授的书出版之后, 他也常常请我为他做各

种事情。他对我特别严格。总是要求我“不要将工作给任何别的人，务必自己完成它”。即使他没有说什么，实验室中也有许多其他的高级研究员让很多学生帮助完成工作，唯独没有学生帮我。

让我提一个从那时起开始工作的小组。“从那时起”是因为它持续到现在还存在。小组中有 Nobuo Sannomiya，比我低三年，Masami Kuramitsu，比我低四年的学生。从 1963 年以来，我们三人每周轮流举办一次二小时的研讨会。阅读 Smirnov 的“高等数学丛书”（原版是俄文的）。从 1963 年开始，经过 5 年时间读完了日文版的第 5 ~ 12 卷，这确实受益匪浅。没有这些研讨会获得的知识，即使有在工程研究生院学过的全部课程，也不能理解像 Birkhoff 等人的论文。Hayashi 教授似乎不喜欢我们轮流进行报告会的主意。他告诉我们如果我们有时间读书，不如常常进行计算。但我们不管他的劝告，他也很怀疑并且不喜欢 KDC - I 数字计算机，但不久它最终变成了现实。我用它的结果与模拟计算机的数据进行比较，如比较了 Duffing 方程的周期解。KDC - I 是用晶体管制造的计算机，用 Runge - Kutta - Gill 方法，设置的积分步长为 $2\pi/60$ ，从 $t=0$ 到 2π 沿时间轴积分 Duffing 方程，只需要大约 60 秒。在当时，我为它有如此的计算能力而激动，靠手工是不可能算出的问题，有了它最终这一计算成为可能，但如今它比一个玩具还不如。

五、从谐波平衡法到映射方法

McGraw-Hill 出版的 Hayashi 博士的书得到了高度的评价。从 1965 年秋天到 1966 年夏天，他应哥伦比亚大学和麻省理工学院邀请作为客座教授。我是他最信任的学生，在他出访时，我甚至荣幸地管理他的工资。在他去美国之前和之后，他总是出现在实验室。我自然地希望从他的关心爱护下有一年的自由。那年秋季，在 Hayashi 教授出访期间，从地德岛来的 Hiroshi Kawakami（比我低 5 年），正处于他硕士阶段的第二年，他正学习模拟技术

和它在控制系统中的应用。但他来找我要求学习非线性振荡，他对此有明显的兴趣。他在研究生院的第二年，特别是在这样一个小实验室里，改变他的研究方向是不可能的。但我还是引导他对有二个饱和铁芯的非线性振荡的幅值特征进行了计算和相似模拟。不久之后，Hayashi 教授访问归来。那时，Kawakami 已经进入了他的博士学习阶段，他已决心继续从事非线性振荡研究。他正在选择他研究的论文题目。在我们实验室中，正如我已提到的，映射法或频闪法已经在模拟计算机实验中使用，像“完全的稳定固定点”这样的技术名词对我们来说已很熟悉。这些知识大多数来自 W.S.Loud 的论文^[7]。Hayashi 教授与 Loud 教授非常友好。在那时前后，我得到了 Levinson 论文拷贝^[8]，虽然我不确定是什么时候、是如何落到我们手中的。可能是 Kawakami，这位勤奋的学生，从别处拷贝来的。当我研究论文时，我在 735 页看到了图 2 和图 3。当我理解了这些图的含意时，我想“就是它”（图 9）。它解开了我的一个长久之谜。图 4 明显是错误的，正确答案的关键在这些图中。我思考了许多天，也用数值方法计算出来。这是我首次碰到异宿点概念。当然，那时我并不知道这个术语。几天之后，我深信不疑。我画了个草图，并送给 Hayashi 教授（图 10）。他并没有立即同意我，但最终还是同意了。我们决定研究出现 $1/3$ 阶的次谐波振荡的所有情况。我建议做 $7/3$ 阶的次谐波振荡，这是我在早期进行高次谐波振荡的模拟中看到过的。在外部强迫信号很大时，常常出现，并且变得很复杂。我常常感到解脱。我们立即请 Kawakami 画出在这种情况下，完全不稳定固定点的不变曲线。同时，我们请 Abe 教授制造了一个自动映射计算装置。在参考文献 [9] 中的图 7 (b) 给出了我们的结果。图 11、图 12 和图 13 是完全正确的。经概括后已邮寄给 1967 年在布拉格举行的第四届非线性振荡会议，为此成为了会议的补遗。然而，除了在 NLP 研究数据中^[10]，这些图不论在会议文集或是在 Kawakami 的博士学位论文中都没有发表过。我想将他们包括在此，请参看参考文献 [10] 和 [11]。

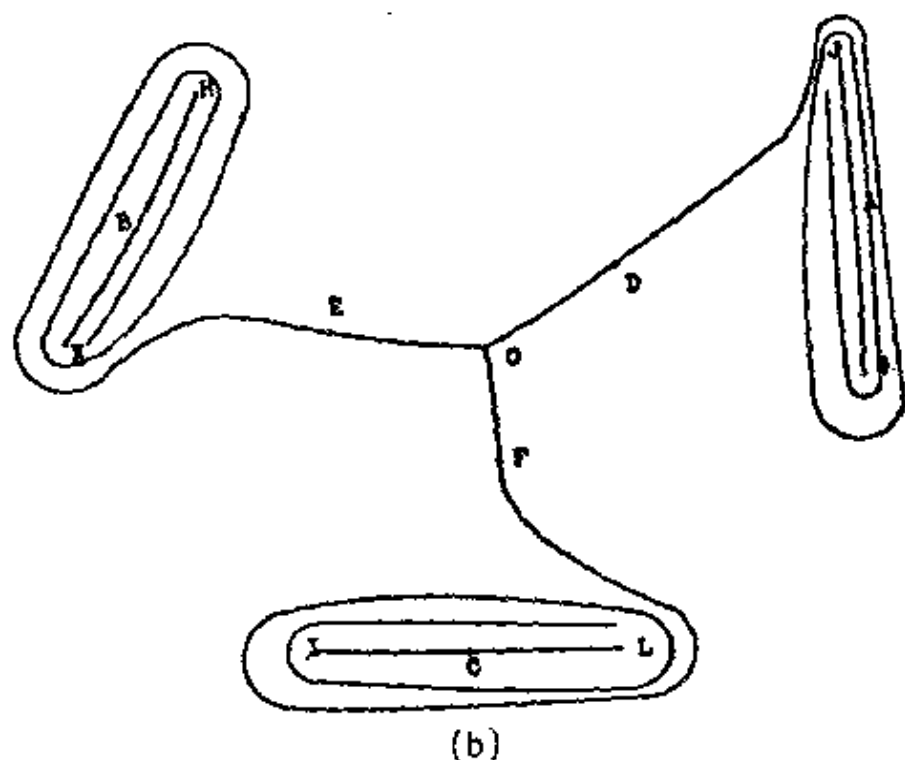
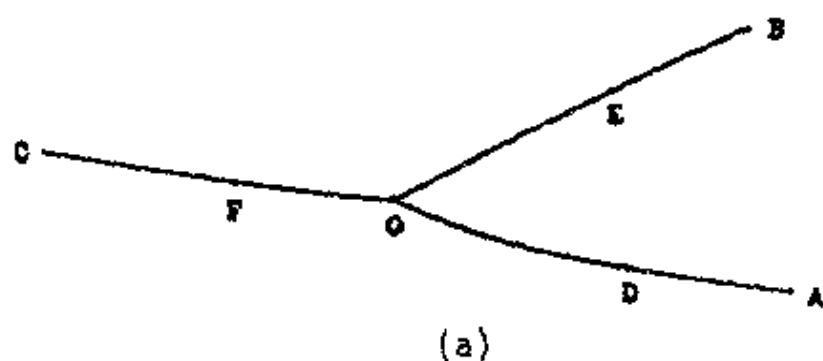


图9 最大有限不变域的例子

(a) O: 完全稳定固定点; A, B, C: 完全稳定 3 周期点; D, E, F: 完全不稳定 3 周期点; (b) O, D, E, F: 与 (a) 中相同; A, B, C: 逆向的不稳定 3 周期点; G, H, I, J, K, L: 完全稳定 6 周期点 (资料来源: 数学年鉴^[8])

我们从 Abe 教授的自动映射算法获得的第一个结果在参考文献 [12] 中的图 6 中给出 (重画在此, 如图 14 所示), 在这幅图中, 图 4 的错误已被纠正。这一方法本身在参考文献 [13] 的附录中得到了概述。

从现代的观点来说, 自动映射方法是用模拟计算机产生的 Poincaré 映射的一种方法。换言之, 这种方法是在记录纸上画出

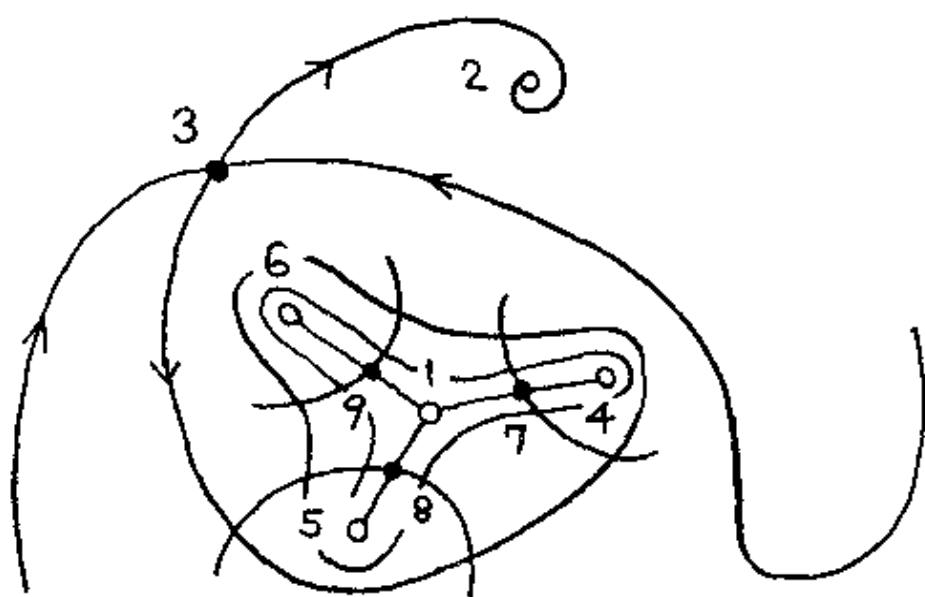


图 10 相对于图 4 的不变曲线的修正的示意图

在每一个外部强迫循环中，同一瞬时每个模拟信号的样本点：虽然 Kawakami 和我本人帮助 Abe 教授建立了这一试算方法，但没有 Abe 教授的丰富的经验，完成它是相当困难的，感谢有这一方法才使画不变曲线，或以现代的观点来说，画外部整体结构（outstructure）变得更加容易。不言而喻，这种方法大大加速了将离散动力系统理论应用到非线性振荡中。经过这次经验，我认识到了主动分析原文和掌握方法的重要性，这些对达到我们的研究目的是必不可少的。

在 1966 年春季，另一位地德岛人，Norio Akamatsu（比我低 7 年）进入了硕士学位阶段。他一开始就选择了非线性振荡作为他的研究方向并直接接受我的指导。我让他开始应用映射方法研究同步现象，在此以前谐波平衡法已成为标准的方法。他硕士论文的一部分已在参考文献 [9] 后半部分阐述。这两位从地德岛来的学生非常突出，对非线性振荡的研究作出了很大贡献。我非常感谢他们。在 Hayashi 教授的权威下，我没有强迫他们做任何事情，而是建立了一种合作的气氛，使他们的特有能力和能力得到充分发挥。我为在 60 年代后半期帮助建立起的 Chihito Hayashi 实验室的黄金时代感到自豪。事实上，在我与他们一同收集数据，检查他

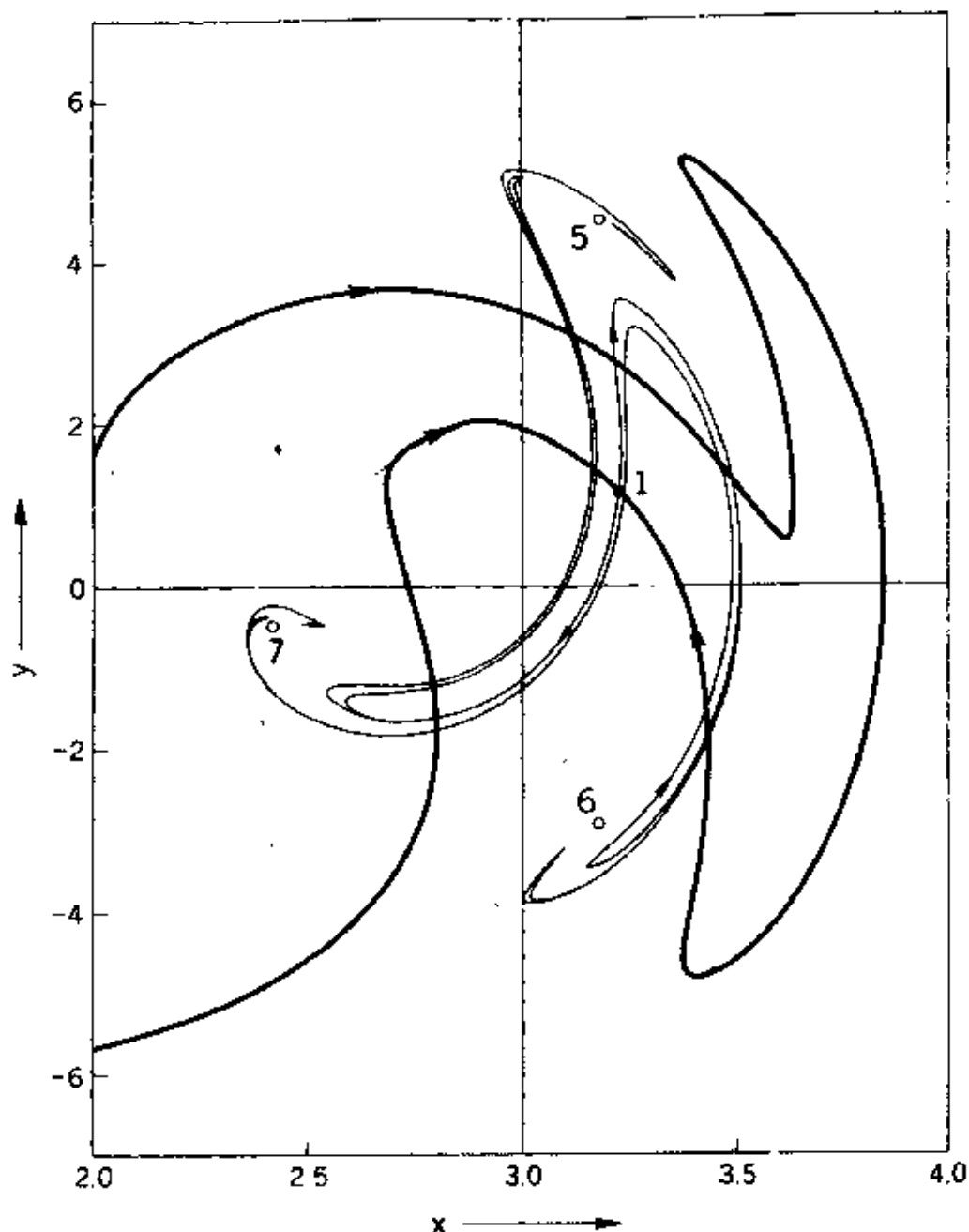


图 11 方程 $\dot{x} = y, \dot{y} = -ky - x^3 + B \cos t$ 的映射 T 的固定点和不变曲线。 $k = 0.2, B = 10.0$ (参考文献 [12] 中未发表的补遗)

们的参数设置时，我试着教给他们文献研究和整理数据的细节与特点。同时充当他们的保护伞，或更准确地说我完善或修改他们那些得不到 Hayashi 教授同意的结果。Akamatsu 是在 Hayashi 实验室完成他的博士学位的最后一位研究生。Kawakami 在 1970 年离开了我们实验室，Akamatsu 在 1971 年离开。留下 Masami Kuramit-

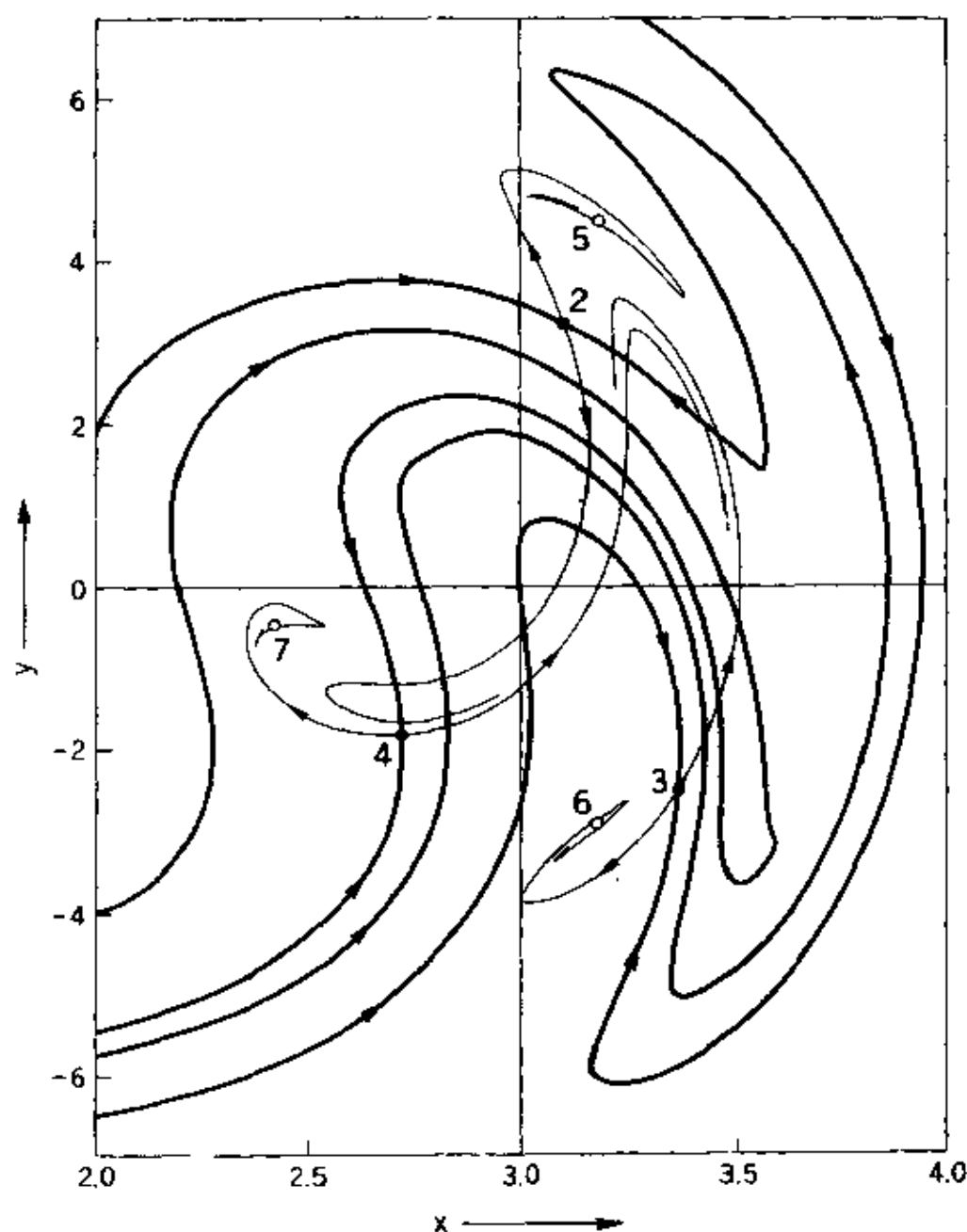


图 12 方程 (7) 的映射 T^3 的固定点和不变曲线, $k = 0.2$, $B = 10.0$ (参考文献 [12] 中未发表的补遗)

su 和我自己, 我们正在进行非线性振荡的博士后研究。由于我们研究题目的原因, 我们三人保持一种平行的关系, Kuramitsu 正从事多自由度非线性系统的研究, 而 Ohshima 正从事实际电子电路的实验研究。

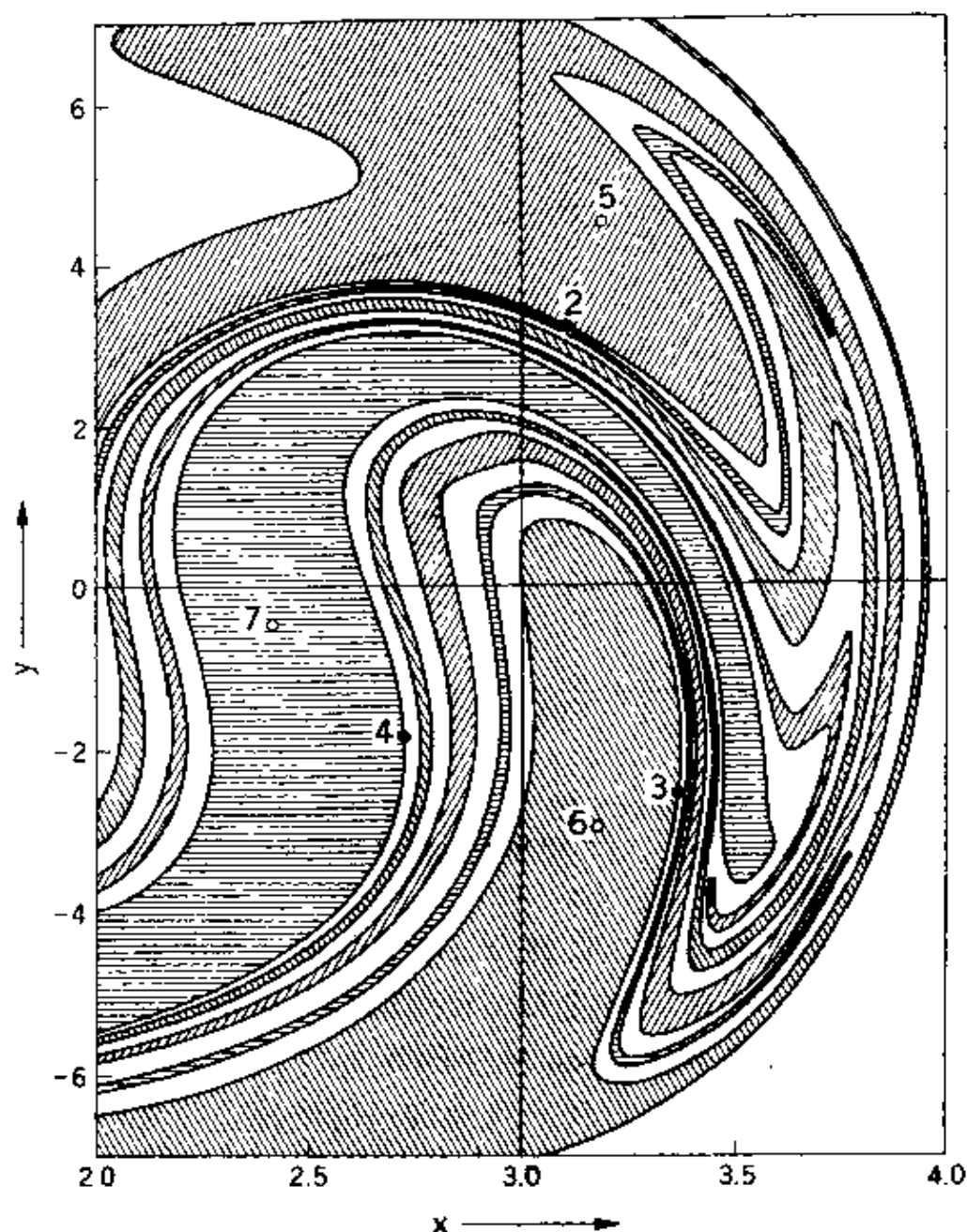


图 13 方程 (7) 的映射 T^3 的完全不稳定固定点的吸引域,
 $k=0.2$, $B=10.0$ (参考文献 [12] 中未发表的补遗)

六、一位顾问的真正价值：混沌的后裔

我不能忘记要提到我的顾问，Michiyoshi Kuwahara 博士，我要深深地感谢他对我工作的帮助。Kuwahara 博士是 Hayashi 实验室中我的学长，是我们实验室中第一位完成博士论文的研究生。他很了解我的处境。在过去 30 多年中，每个月来访问我一次，

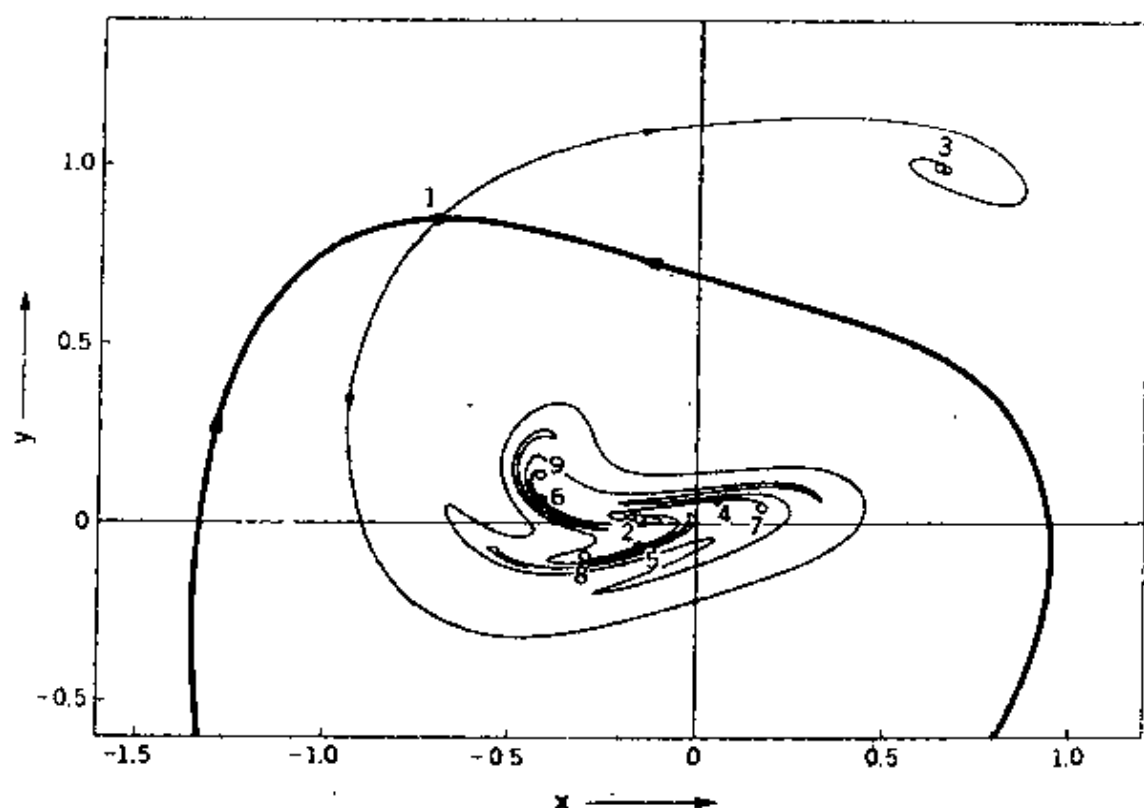


图 14 计算出的相对于图 3、图 4 和图 10 的固定点和不变曲线。
注：点的数量是不同的，但方程和参数值是相同的（资料来源：日本印刷和出版公司^[17]）

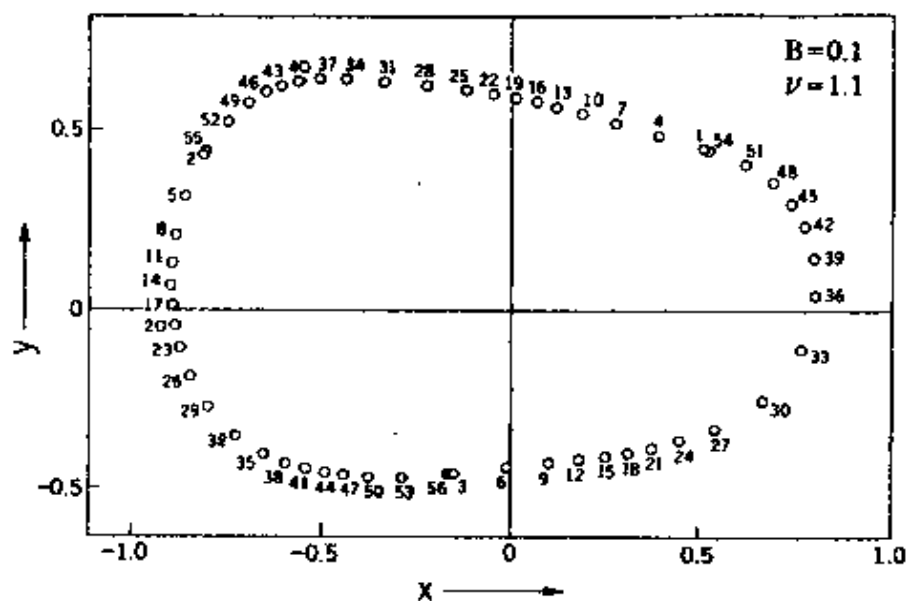
总是给了我很好的建议。直到今日，我仍聆听他的教诲。他绝不装腔作势，是一个很坦率的人，我对他非常钦佩。他的观点总是击中要害。当我受到 Hayashi 教授的斥责时，Kuwahara 博士总是耐心倾听我的诉说并安慰我。我确实还清晰地记得那些情形。

我从 Kuwahara 博士那接受到了很多有价值的建议。在他数不清的建议中，我最感谢他有关论文写作艺术的主张。他建议“多写论文并投给适当的学术期刊”，“口头报告（非线性研究小组数据等）对你没有帮助。亲自将他们寄出，通过审查人的审查你会得到声望”。我从未从 Hayashi 教授那得到这种建议。在非线性研究小组报告的大多数数据都由 Hayashi 教授在国际会议上发表。因此我必须小心不与他的材料重复。由于学生的抗议，在学校处于混乱的时候，我首次投出了我自己的论文，是寄给电子和通信工程学报。由于学生的抗议，在校园中的民主气氛促使我采取了这一行动。论文顺利通过了审查并被接收。在论文 [14] 中

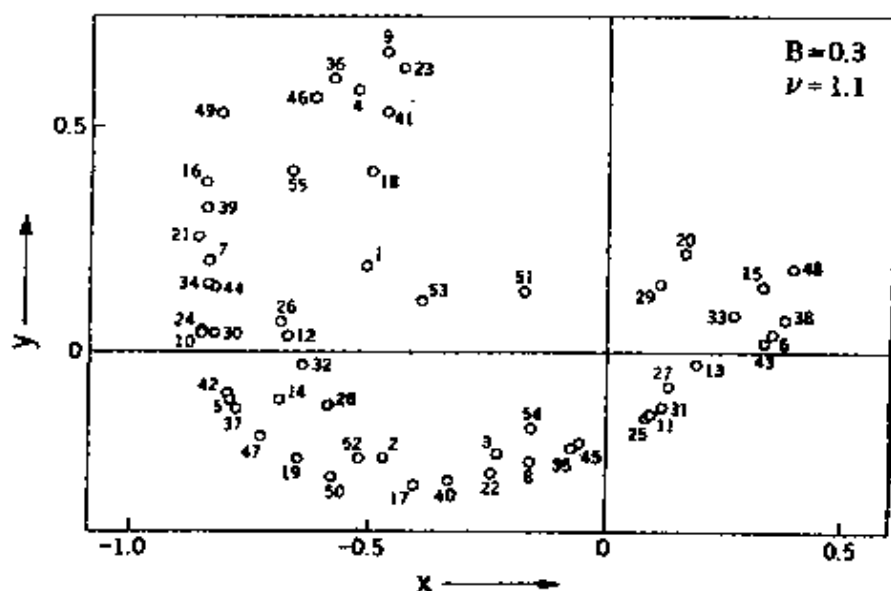
的图 6，显示了拟周期振荡和在 Rayleigh - Duffing 混合型方程中的混沌（图 15）。虽然还没能画出清晰的形状，当时在我的脑海中，混沌的概念已经建立起来了。

下面发生的事情将支持这一事实。在研究所所长 Urabe 教授主持下，一个称为“常微分方程和非线性动力学”的研讨会于 1970 年 12 月 17 ~ 19 日，在京都大学数学科学研究所召开。在研讨会中，我自愿作一个口头报告，题目为“一种二阶非线性常微分方程的稳定解”。我在我的研究报告结束时作的总结仍然记忆犹新“……然而，根据计算机结果，我对这一现象的观察，每一个组成中心点集的最小集仍然是不稳定的，稳定态似乎是在最小集的附近随机的移动，它受到振荡系统或外部扰动的微小脉动的影响”^[15]。这些最小集合当然是吸引子中的不稳定周期运动，上面的描述使我提出了名词“随机转变现象”。我在 Urabe 教授组织的研讨会上作报告的原因是我希望数学家们能听到并能支持我关于随机振荡的基本解释。由于在那时，Hayashi 教授不喜欢我在我们的研讨会中提到“中心点集”或“最小集”等等，因此我特别希望得到这次研讨会的支持。我每次提关于随机振荡的解释，Hayashi 教授总让我进一步检查出错的原因。然而，不管我多么强烈的希望，那次我的冒险适得其反。自从 Urabe 教授的研讨会后，那只是一个小规模的每年一次的会议，我不能确定具体日期，总之我报告后 Urabe 教授单独告诉我“你所看到的仅是拟周期振荡的本质”，他说“你太年轻还不能作出正确的判断”。随机振荡（混沌）的存在在我脑海中如此清晰，否定的评价并没有使我灰心。无论我如何解释，还是没人能理解它，我感到很失望。从那时起，在我的研究过程中，我变得更加仔细。

我想是 1971 年吧，我寄出了我的第二篇论文，它是根据上面提到的在 1970 年 12 月在数学科学研究所进行的口头报告写成的。虽然我手上只有很少一点底稿，但电子和通讯学会一定有一些资料。论文被否定了。我在随机振荡研究中惟一的一位合作者，Akamatsu，也回到地德岛去了。我只剩孤单一人。我花了大



(a)



(b)

图 15 代表方程拍频振荡的点序列

$$\dot{x} = y, \dot{y} = \mu(1 - ry^2)y - x^3 + B\cos vt \quad (5)$$

其中, $\mu=0.2$, $r=4.0$, 显示出在概周期振荡和混沌振荡的差别。

(a) $B=0.1$, $\nu=1.1$, 不变的封闭曲线代表概周期振荡; (b) $B=0.3$, $\nu=1.1$, 混沌吸引子 (资料来源: 日本电子和通信工程师学会^[14])

约一年时间修改这篇论文。在 1972 年 9 月 7 日再次寄出。经过评审后, 这篇论文最后被接受了^[16]。包括在附录中的离散动力

系统理论的总结是最困难的工作。我绝不会忘记，我如何紧张，担心我能否完全和准确地掌握这一概念。数学家重视严密的证明，从某种意义上说，这是我的不足。他们可在他们的头脑中建立任何不现实的假设，生活在他们抽象的世界中。但我生活在现实世界。我也很崇拜数学家，我想让他们以更赞同的心理听完我的观点。在我论文的附录中，我总结了 Birkhoff, Nemytshii 和 Stepanov 等人论文的本质，但我根本不理解第二序数类的无穷序数。现在当我重读这篇论文^[16]，我对我论文的错误感到有点困窘。然而这是我主张存在混沌的转变振荡的论文，除了对结构稳定性的描述似乎是错误的外，我至今认为这篇论文仍是正确的。在图 8 和图 9 中由模拟计算机计算获得的数值结果证明是非混沌的。这是根据后来的数字模拟发现是周期振荡（这些周期振荡是不平常的，在这些特殊的参数值附近，数字和模拟计算机计算都显出混沌振荡）。说得更确切些，从那时起应该说我对稳定混沌现象的定性理解没有改变或更进了一步。从地德岛来的 Akamatsu 给我复写了一份清晰的论文。我故意在 Hayashi 教授外出期间寄出论文，以便我对没有将论文给他审查有一个更好的理由。由于这个原因，论文可能缺乏某些精心的校订。但我确实不能将论文给 Hayashi 教授看，我知道他一定会进行大量的修改，去掉那些我认为是本质的东西，然而这是我不能同意的。给他看可能还有更多的麻烦，因此宁可与他冲突也不给他看。甚至，我还考虑了我们研究的协议和 Akamatsu 的处境，因为他还没有提交他的论文。Hayashi 教授的名字还是作为合作者写在论文上。忽略这个协议可能很简单，但我没有这么做。从那时我发表了许多论文，我总是很小心选择数据。我今后还要继续这样工作。我也努力不要忘记，有很多年轻的同事，他们受不安全感的影响，但仍抱着对未来美好的希望。不幸的是，有一些人不好意思利用他们的材料。你如果有机会阅读 Hayashi 教授那时写的 Duffing 方程的论文^[17]，我叙述的可靠性就应该很清楚了。在 1972 年 9 月，Hayashi 教授出席在波兹南召开的第六届国际非线性振荡会议。

现在听起来很傻，但我知道要改变在这个世界上已经建立起来的秩序是相当困难的。Hayashi 教授不考虑这件事情，就是我的论文^[16]没有被收录到他在 1975 年出版的关于非线性振荡的论文集中^[17]。原因是我不能独立翻译或校对原来发表的论文^[16]的英文版。

七、Chihiro Hayashi 实验室的终结

Hayashi 教授在 1975 年春季退休。当时我还是一位副教授，不知道已发生的事情，但多年后，Hayashi 实验室还是解散了。我不清楚解散的原因。我们成了一个群龙无首的小组，但我记得我能够首次自由地做我的工作。除了混沌研究外，我与 Yoshiaki Inoue 一起研究具有时间延迟的非线性系统。我也与名古屋大学等离子物理学研究所合作进行混沌的功率谱计算。从那以后，我应邀到京都大学 Chikasa Uenosono 教授实验室工作，并在工程系工作到现在。这一时期，也是我一生中的混沌时代。在 1978 年春季，我刚到 Uenosono 实验室的时候，我的论文^[18]在电子工程师学报上发表。这是一篇关于奇怪吸引子的论文（图 16），它是由 David Ruelle 教授命名为“日本吸引子”的一种奇怪吸引子，在文献 [19, 20] 中有报道。论文中新的内容是增加了随机振荡的功率谱和我早期发表的论文^[16]的一些特点。虽然两篇论文间隔了 5 年，我没有发现它有什么更大的进展。我打算发表这篇论文作为我非线性振荡研究结束的一个标志。我特别仔细地撰写了全文。当时我首次听说了“混沌”这个名词。但我决没有想到我积累的关于 Duffing 方程系统的大量数据，实际上就代表了混沌。混沌在后来引起了如此广泛的关注。

八、保存的原始数据

有关日本吸引子和前面提到的破碎的蛋形响应曲线的原始数据目前保存在 Brookhaven 国家实验室，他们是用手工计算和模拟计算机输出的图形。为了解释他们是如何得到的，我要从我与

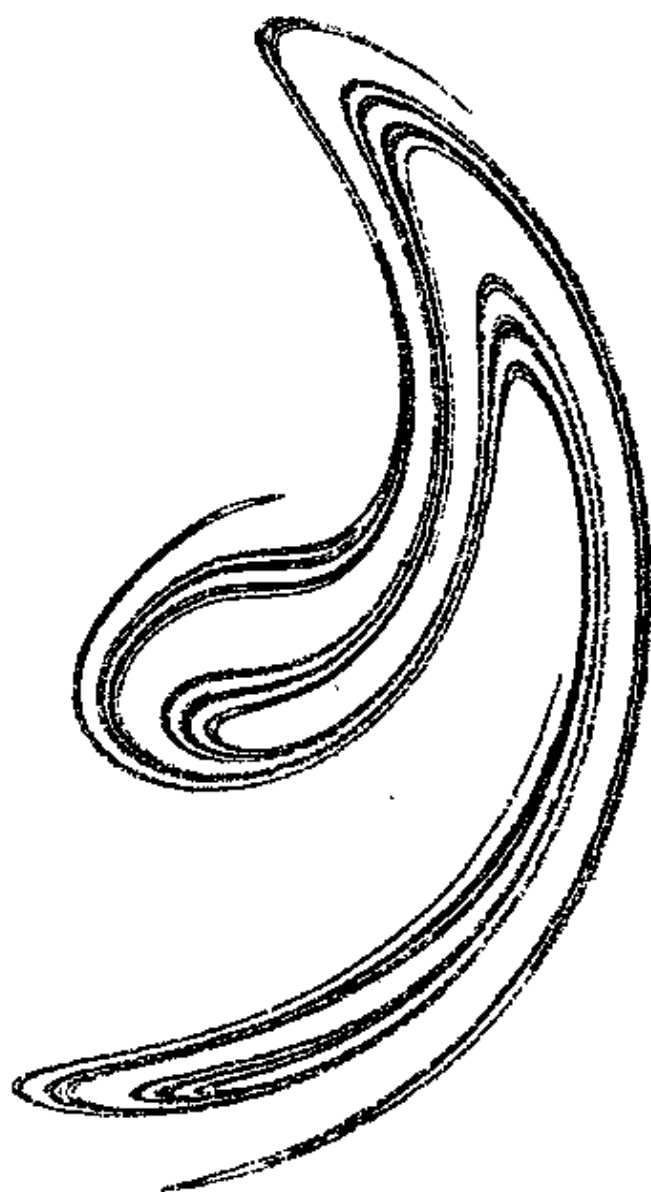


图 16 日本吸引子

Hugh Bruce Stewart 博士一起开会谈起。

我首次遇到 Stewart 博士是在 1986 年 5 月。他特地到新罕布什尔州的 Henniker 来看我，并出席由 F.M.A.Salam 和 M.L.Levi 主持召开的工业及应用数学学会的会议，会议的主题是关于非线性动力学分析的定性方法。在 Henniker 的整个一周，我们进行了一次长谈。他的兴趣不限于技术讨论，他对我的混沌研究的起源也很有兴趣。因此我从破碎的蛋形谈起，回忆它是如何被发现的。在我们会议的最后一天，他递给我一张手写的便条，上面写

到“我已获得批准收集并保存你所有的关于混沌研究的材料。你愿意将它作为一个整体交给 Brookhaven 国家实验室吗？我们将为它们的妥善保管负全责”。最后，他打印了这封信寄给了在日本的我。对我来说，这些材料仅有些感情价值，但对日本它毫无价值。当我离开大学时，我可能会将它扔掉。想到这些，我选了一些有关材料装了一盒寄给了 Brookhaven。这也给了我一个很好的借口来整理这么多年放满我办公室的原始数据。除了少数材料外，所有的混乱材料已经清除，使我的办公室变得更加舒适。

在 1988 年 4 月，Bruce 来到日本。当我们交谈时，他突然提出我是什么时候关注到日本吸引子的问题？我告诉了他我上面提到的情况。但他似乎不相信，他过去的热情和友谊逐渐变成了怀疑。我感到我已处于必须行动的地步。这天是 1988 年 4 月 11 日，我取出了一些我还没有送到 BNL（Brookhaven 国家实验室）的文件，把它们给他看。他彻底研究了这些起皱的报告，用他的计算器检验了我潦草书写的数字。最终他似乎相信了，恢复了他原来的面孔。我想这是一次整理更多的混乱材料和将文件扔进字纸篓的好机会。但 Bruce 博士说“好，将它们给我”。我对这些起皱的凌乱材料并没有什么特别的自豪，但我同意了。他立即附加了一个便条并将它们寄给了加利福尼亚大学圣克鲁斯分校的 Ralph Abraham 教授。从那时起，我已见过 Bruce 许多次，但我还从来没有看到那样严峻的面孔。他可能正在想：“不论 Yoshi 怎么说，在决定是否相信它之前我一定要亲自检查实际的证据。”这一定是他的信条，我也深深地敬佩这一点。我的许多结果已在这本书和论文中引用，但根据所知，只有经他仔细检查后，直到他绝对相信，他才决定挑选它们^[21]。我相信每一个科学家都应该养成这样严谨的习惯。

九、尾声

我所告诉你们的只不过是主观的报道。然而，我想通过学术报告中的数据使这个报告真实可信，我故意提到了真实姓名。

令人遗憾的是 Chihiro Hayashi 教授和 Minoru Urabe 教授都已不在人世，不能够对我的观点提出疑异。然而为了保证内容的完整性，我难免讲述了这个明显片面的故事。

关于 Chihiro Hayashi 教授，从我作研究生那天起到他退休的那天，16 年来，我都接受他的指导。他是京都大学工程学院电子工程系最后一位真正的明治时代的大学教授。我尝试减少对他个性的描述，但正如你在这篇报道中看到的，他有很强的个性。他是实验室的皇帝，而外表上看又是一位温文尔雅的绅士。我相信当时他的实验室是世界上最封建的实验室。在他的疆域，他的权威是坚不可摧的，这一点至今我们仍然相信。也正是因为如此，我们没有被世界上的潮流淘汰，能集中精力进行研究，忠实于我们自己的观点。对此我表示衷心地感谢，很明显没有 Hayashi 教授的存在，我的研究是不可能的。对一个人的研究来说，严谨、意志和勇气都是必须的。我相信这些正是 Hayashi 教授的遗产。可是为了图形的清洁，我受到了他成见的迫害。

后来，我接受 Chikasa Uenosono 教授的指导，在他的指导下，我学会了做学问的严谨和顽强。同时，我也有机会再次证实了实验的重要性和准确理解现象的重要性。Uenosono 教授也教会了我人类世界的法规和等级，并如何掌握他们。这些事情逐渐丰富了我的人生。进而，要是没有 Uenosono 教授，我绝不可能处于目前的地位。不用说，我深深感谢这两位教授。然而，最大的影响还是来自 Michiyoshi Kuwahara 教授，我对他表示最诚挚的谢意。

在我集中介绍我个人的混沌研究情况时，你或许感到我完全抓住了随机转变现象的概念，而没有走入歧途。实际上，就像你能看到的，如果你对我的研究生涯画一条时间线的话，它是一条漫长、曲折和摸索前进的过程。

在我叙述的这段期间，我所从事的工作，可以称为非线性振荡研究，或从更广的范围来说，是从事基本电子工程和应用数学的研究。我感到与这些领域有关的人们或多或少都不断受到数学家和工程师们的批评，正像我经历的那样。批评可归结如下“它

能证明吗?”“从某种程度上说它有用吗?”这些确实是合理的问题,为一个答案,我总是感到不知所措。我想用这次机会提一些相反的问题。对数学家我想问:“你的命题有多合理?”对工程师我想推荐阅读 Bob Johnstone 的一篇在远东经济评论上发表的文章,名为“研究和创新:教室中没有混沌”^[22]。在文章中,他引用了李天岩的观点(李-约克定理中的李),“如果混沌的作用变得明显的时候,日本人对它将表现出强烈的兴趣”。

无论情况怎样,我相信根据准确的交流,特别是对日本的研究学者,对相互的见解作出毫无偏见的评价是最重要的。从这种意义上说,这次讨论会的作用无疑是重要的。

致 谢

这篇文章原是用日文写成的,由 Masako Ohnuki 女士翻译成英语。事情的经过是这样的,1987 年 Viking Penguin 公司出版了 James Gleick 写的书:混沌,开创新科学^[24]。这本书非常畅销,高居纽约时报畅销书排行榜达半年多。由于它富于技巧的解释,受到了广泛的赞誉。当这本书由 James Gleick 提名的翻译家, Masako Ohnuki 女士翻译成日文时,本文作者收到了他的一封来信。他要求我监督她的翻译。当作者阅读她的译文时,他赞叹不已。译文是准确的,说译文费解是没有道理的。

作者缺少用英语写出优美内容的技巧。他要求她翻译这篇文章,她自然地同意了。他请 Hugh Bruce Stewart 博士审查她的译文。从历史的准确性方面检查这篇文章的内容。作者对 Masako Ohnuki 女士和 Hugh Bruce Stewart 博士表示他诚挚的感谢,他还要对如下的同事表示感谢。

Chihiro Hayashi 已去世

Minoru Urabe 已去世

Chikaso Uenosono 京都大学名誉教授

Hiroshi Shibayama 大阪理工学院名誉教授

Michiyoshi Kuwahara 京都大学

Yoshikazu Nishikawa 京都大学

Minoru Abe 京都大学

Nobuo Sannomiya 京都理工学院

Masami Kuramitsu 京都大学
Hiroshi Kawakami 地徳島大学
Norio Akamatsu 地徳島大学

参 考 文 献

- [1] C. Hayashi, H. Shibayama, and Y. Ueda. "Quasi - periodic Oscillations in Selfoscillatory Systems with External Force." (In Japanese), IECE Technical Report, *Nonlinear Theory* (16 December 1961).
- [2] C. Hayashi. *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*. McGraw - Hill, New York (1964): Reissue, Princeton Univ. Press (1984).
- [3] C. Hayashi and Y. Nishikawa. "Initial Conditions Leading to Different Types of Periodic Solutions for Duffing's Equation." *Proc. Int. Symp. Nonlinear Oscillations, Kiev*, 2: 377 - 393 (1963).
- [4] C. Hayashi. *Forced Oscillations in Nonlinear Systems*. Nippon Printing and Publishing Co., Osaka, Japan (1953).
- [5] C. Hayashi, Y. Nishikawa, and Y. Ueda. "Higher - harmonic Oscillations in Nonlinear Circuits." (In Japanese), IECE Technical Report, *Nonlinear Theory* (29 November 1963).
- [6] C. Hayashi. "Higher Harmonic Oscillations in Nonlinear Forced Systems." *Colloq. Int. CNRS, Marseilles*, 148: 267 - 285 (1965).
- [7] K. W. Blair and W. S. Loud. "Periodic solutions of $x'' + cx' + g(x) = Ef(t)$ under Variation of Certain Parameters." *J. Soc. Ind Appl Math.* 8: 74—101 (1960).
- [8] N. Levinson. "Transformation Theory of Non - Linear Differential Equations of the Second Order." *Ann Math* 45: 723—737 (1944).
- [9] C. Hayashi, Y. Ueda, and H. Kawakami. "Transformation Theory as Applied to the Solutions of Non - Linear Differential Equations of the Second Order." *Int. J. Non - Linear Mech.* 4: 235—255 (1969).
- [10] C. Hayash, Y. Ueda, H. Kawakami, and S. Shirai. "Analysis of Duffing's Equatio by Using Mapping procedure (2)." (In Japanese), IECE Technical Report, NLP67 - 13 (1967).

- [11] T. Endo and T. Saito. "Chaos in Electrical and Electronic Circuits and Systems." *Trans. IEICE* 73E: 763—771 (1990).
- [12] C. Hayashi, Y. Ueda, and H. Kawakami. "Solution of Duffing's Equation Using Mapping Concepts." *Proc. Fourth Int. Conf. on Nonlinear Oscillations, Prague*, PP. 25—40 (1968).
- [13] C. Hayashi and Y. Ueda. "Behavior of Solutions for Certain Types of Nonlinear Differential Equations of the Second Order." *Proc. Sixth Int. Conf. on Non-linear Oscillations, Poznan*, 14: 341—351 (1973).
- [14] C. hayashi, Y. Ueda, N. Akamatsu, and H. Itakura. "On the Behavior of Selfoscillatory Systems with External Force." (In Japanese), *Trans. IECE Japan* 53A: 150—158 (1970).
- [15] C. Hayashi, Y. Ueda, and N. Akamatsu. "On Steady - State Solutions of a Nonlinear Differential Equation of the Second Order." (In Japanese), *Research Report RIMS, Kyoto University*, 113: 1—27 (1971).
- [16] Y. Ueda, N. Akamatsu, and C. Hayashi. "Computer Simulation of Nonlinear Differential Equations and Non - periodic Oscillations." (In Japanese), *Trans. IECE Japan* 56A: 218—225 (1973).
- [17] C. Hayashi. *Selected Papers on Nonlinear Oscillations*. Nippon Printing and Publishing Co., Osaka, Japan (1975).
- [18] Y. Ueda. "Random Phenomena Resulting form Nonlinearity - In the System Described by Duffing's Equation." (IN Japanese), *Trans. IEE Japan* 98A, 167—173 (1978).
- [19] D. Ruelle. "Les attacteurs etranges." *La Recherche* 11: 132—144 (1980).
- [20] D. Ruelle. "Strange Attractors." *The Mathematical Intelligencer* 2: 126—137 (1980).
- [21] J. M. T. Thompson and H. B. Stewart. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. John Wiley and Sons, Chichester (1986).
- [22] B. Johnstone. "No Chaos in the Classroom." *Far Eastern Economic Review*, P. 55, (22 June 1989).
- [23] Y. Ueda. "Steady Motions Exhibited by Duffing's Equation: A Picture Book of Regular and Chaotic Motions." *New Approaches to Nonlinear Problems in Dynamics*, P. J. Holmes, ed., pp. 311—322, SIAM, Philadelphia (1980).
- [24] J. Gleick. *CHAOS: Making a New Science*. Viking Penguin Inc. (1987).

刘式达

一、引言

混沌对于了解复杂性和不可预测性可应用于很多科学学科，混沌对地球物理学的影响是非常重要的。天气、气候和地震是典型的混沌吸引子。Elnino 现象和南方涛动随时间的变化也是非常不规则的。大气和其他流体系统中所观测到的流动显示出从层流到湍流间的层次结构。许多地球物理客体跨越很宽的尺度范围，它们能够在分形的框架内研究。而分数维看来对于许多敏感初条件的确定混沌系统是共同的。

本文归纳了混沌对地球物理学的三方面的影响：

- (1) 湍流发生的问题。
- (2) 地球物理学的混沌时间序列。
- (3) 湍流的 $K_d V - Burgers$ 方程模拟。

二、湍流发生问题

湍流是一个非常复杂的理论和实际问题 (Ruelle 1985, Monin 1971, Takens 1980)。自从 Lorenz (1963) 从确定性的微分方程系统中发现非周期的轨道以来，对湍流发生问题的研究迅速展开。Ruelle 和 Takens (1971) 称上述非周期流为奇怪吸引子或混沌。Feigenbaum (1978) 发现不同系统的混沌现象有相同的结构，并找到一个通用无理常数——Feigenbaum 常数。因此从经典的流体力学方程组去研究湍流发生的问题已经成为可能。

Panofsky 和 Dutton (1984), 这两位著名的大气湍流专家在他们的专著“大气湍流”一书中已经提到 Ruelle 和 Takens 的混沌理论和湍流的敏感初条件的性质。在他们的书中已经提到控制大气湍流的四个参数为

$$\begin{aligned} \text{长度比} &= \frac{D}{L} \\ \text{Reynolds 数} &= \frac{\text{惯性力}}{\text{粘性力}} = \frac{UL}{\nu} \\ \text{Richardson 数} &= \frac{\frac{g}{\theta} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}}{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2} \\ \text{Prandtl 数} &= \frac{\text{动力学粘性系数}}{\text{热传导系数}} = \frac{\nu}{k} \end{aligned} \quad (1)$$

其中 D 和 L 分别是运动的水平和垂直尺度, U 是运动的速度尺度, $\bar{\theta}$ 是位温, $\bar{u}$ 是基本流动速度。

像简单的一维非线性映射动力系统 $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$ (May, 1976) 就有多种形态: 定常解、周期解、混沌解。因此我们能够看出, 一般的非线性耗散系统一定有多种形态。

太阳是大气运动的能源, 而且大气也是粘性流体, 因此大气是典型的开放的耗散系统。仅仅把大气看成非线性 (而不是线性的) 和耗散的 (而不是守恒的) 系统, 就可以描述大气运动的多样化的形态。正是利用大气的耗散性, Lorenz 发现了从定常状态到对流状态再到混沌状态的转变机理。此外, Charney (1979) 借助于大气的耗散性和地形的强迫研究了阻塞高压的维持问题。

大家知道, 对于耗散系统相空间体积是收缩的 (Arnold, 1978), 在多维相空间中的状态最终要收缩到低维相空间中去。这就意味着系统的宏观状态可以用少量自由度来描述。这些极少量的状态变量称为序参数 (Haken 1976, 1983)。Lorenz 和 Charney 用截谱模式描述大气运动分别有 3 个和 6 个状态参数。

在平均运动, 周期 (波) 运动和湍流运动之间的相互作用构成了大气运动的基础。波和湍流从平均流场和平均温度场中抽取

能量, 反过来波和湍流又对平均场影响而改变平均场。波和湍流之间的相互作用在晚上的大气边界层中和对流层中也是常见的现象。海洋温跃层和大气对流层中观测到的间歇性和不均匀性能够用波和湍流的相互作用来解释。

我们用 Burgers (1948) 和巢纪平 (1962) 模式, 加进非线性的温度平流, 借助分岔理论研究了定常状态 (平均场), 周期状态 (内重力波) 和混沌状态 (湍流的发生) 之间的转换判据。

我们 (1986, 1988) 从 Burgers - 巢模式中取得无因次的截断模型:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 1 - x_1 - \frac{1}{2} x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= (Re x_1 - \pi^2) x_2 + x_4 \\ \dot{x}_3 &= 1 - x_3 - \frac{a}{2} x_2 x_4 \\ \dot{x}_4 &= c (x_3 - Ri Re^2 x_2) - \pi^2 x_4 - \pi x_2 x_5 \\ \dot{x}_5 &= -4\pi^2 x_5 + \frac{\pi}{2} Re x_2 x_4\end{aligned}\quad (2)$$

其中 x_1 和 x_3 分别是基本速度场和基本温度场。 x_2 , x_4 和 x_5 分别是扰动速度场和扰动温度场。

方程组 (2) 的控制参数是 Re 和 Ri 数。设 $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, 方程组 (2) 变成 Lorenz 方程。

方程组有三个定常状态:

$$\begin{aligned}O: (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= (1, 0, 1, 0, 0) \\ T_{1,2}: (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{9\pi^2}{10Re} - \frac{1}{10Re} \sqrt{(5Re - \pi^2)^2 - 80Re^2 Ri}, \pm \sqrt{2(1 - x_1)}, \right. \\ &\quad \left. \frac{a}{2} (Re x_1 - \pi^2) x_2^2 + 1, (\pi^2 - Re x_1) x_2, \frac{1}{\theta\pi} Re x_2 x_4 \right)\end{aligned}\quad (3)$$

其中状态 O 表示基本场 (无扰动), 状态 $T_{1,2}$ 表示对流运动。若 $x_5 = 0$, 那么 O 和 $T_{1,2}$ 变成

$$O: (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 0)$$

$$T_{1,2}: x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{Re} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4Ri},$$

$$x_2^2 = 1 - \frac{2\pi^2}{Re} + \sqrt{1-4Ri}, \quad (4)$$

$$x_3 = \frac{1}{c}RiRe^2 + \frac{Re}{2c}\pi^2(-1 + \sqrt{1-4Ri}),$$

$$x_4^2 = \frac{1}{4}Re^2(-1 + \sqrt{1-4Ri})^2\left(1 + \sqrt{1-4Ri} - \frac{2\pi^2}{Re}\right)$$

从 (4) 看出, 状态 $T_{1,2}$ 出现的必要条件是

$$Ri < \frac{1}{4} \quad (5)$$

我们分析状态 O 和 $T_{1,2}$ 的稳定性, 在参数平面 (Re, Ri) 上, 叉型分岔曲线 1 是

$$Ri = \frac{\pi^2}{Re^2}(Re - \pi^2) \quad (6)$$

Hopf 分岔曲线 4 是

$$Re = 2\pi^2 \quad (7)$$

状态 $T_{1,2}$ 的 Hopf 分岔曲线 3 和极限点曲线 2, 这些曲线都绘在图 1 上。

这些曲线将平面 (Ri, Re) 分成 5 个区域: O 、 T 、 S 、 C 和 P , 它们代表不同的运动形态。

对方程 (2) 用 Runge-Kutta 法数值积分可以找到相空间中的轨线。在 S 和 P 区域, 是典型的周期运动形态, 见图 2 (a) 和图 2 (c), 在 C 区域是混沌轨道, 它在平面 (x_2, x_4) 上的投影见图 2 (b)。

为了定量上说明这些形态的真实性, 在表 1 中给出了所计算的 Lyapunov 指数:

从图 2 看出, 当 Ri 接近 0.25 时, 内重力波 (P 区域) 和湍流 (C 区域) 可以间歇性的轮出现。例如对 $Re = 50$, $Ri = 0.40$, 内重力波从平均场获得能量形成波动速度场, 但是到

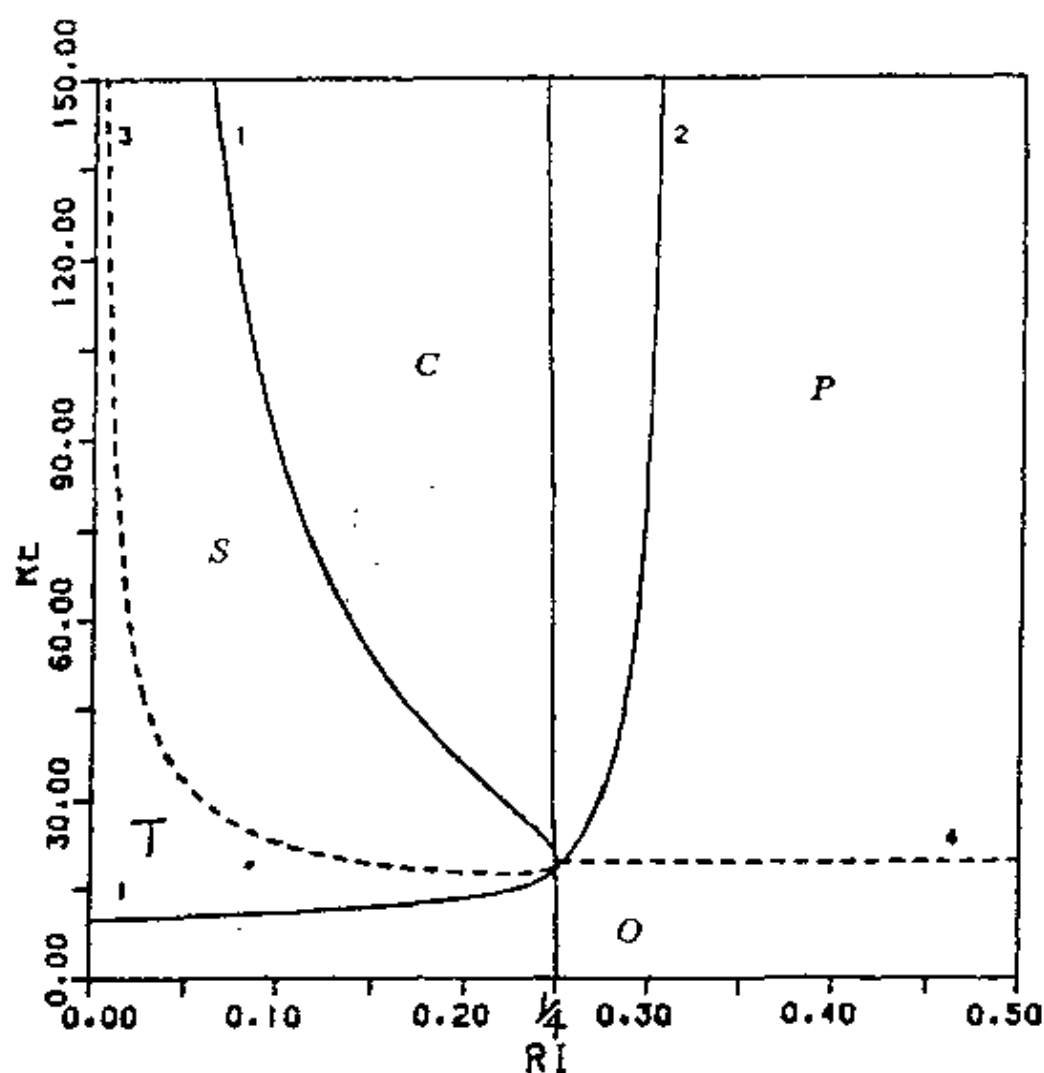


图1 在平面 (Ri, Re) 上分岔点曲线1、3、4和极限点曲线2
 $Ri = 0.20$ 时，内重力波就消失，而混沌场就出现了。

表1 对于混沌和周期吸引子的 Lyapunov 指数谱

Region	Ri	Re	LE_1	LE_2	LE_3	LE_4	LE_5
P	0.40	50	0.00	-0.84	-1.58	-4.11	-28.85
C	0.25	50	0.88	0.00	-1.03	-7.26	-32.82
S	0.10	50	0.00	-0.75	-1.76	-4.68	-36.63

在内重力波形成以后反过来使 Ri 数减少，即

$$(Ri)_{\text{后来}} < (Ri)_{\text{初始}} \quad (8)$$

当 Ri 减小到 $(Ri)_{\text{后来}} < \frac{1}{4}$ ，这湍流状态就可能形成。这就是在

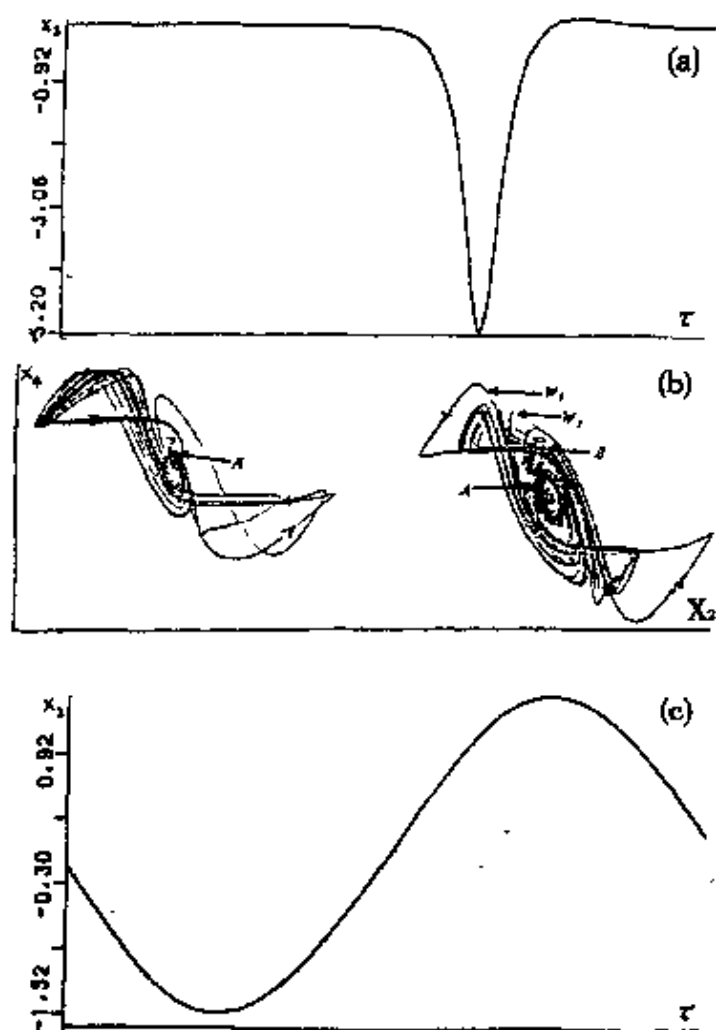


图2 在 S , C 和 P 区域的运动形态 ($Re = 50$)
 (a) 在区域 S , x_2 随时间 τ 的变化 ($Ri = 0.10$)
 (b) 在 C 区域, 轨道在平面 (x_2, x_4) 上的投影
 ($Ri = 0.20, 0.25$)
 (c) 在 P 区域, x_2 随时间 τ 的变化 ($Ri = 0.40$)

晚上大气边界层中通过波和湍流的相互作用而造成间歇湍流的原因。在 S 区域还可以出现孤立波, 如图 2 (a)。

Miles 定理 (Yih 1980) 说明若 $Ri > \frac{1}{4}$, 流动是稳定的, 显然我们的结果图 1 比 Miles 定理完全, 并且更与观测的事实相一致。

三、地球物理中的混沌时间序列

为了在全球尺度上对整个地球系统有一个科学的了解，我们必须研究地球系统中各部分之间的相互作用。为了模拟地球系统，我们必须了解非线性科学的进展。从非线性的观点，已经讨论了一些地球系统的关键问题 (Essc, 1988)。例如地球物理问题的尺度是分层次的，在不同尺度现象之间存在自相似结构和标度律。对于地球物理学，非线性科学的最新概念，如混沌，吸引子，分形，多分形，信息和熵等等是非常重要的。在地球物理学领域常常不是缺少完整的初始资料就是缺少较好的模式，而常常只观测到单变量的时间序列。在单变量的时间序列中含有丰富的信息。从单变量时间序列中能够取得模拟地球系统所必要的信息。(Meakin 1986, Wolfrom 1986)。

为了研究全球变化，我们必须考虑地球系统的所有分量。地球的主要子系统是大气、海洋、岩石圈以及生物圈。这些主要的子系统通过能量、动量和物质的交换而相互作用。由于这些相互作用是非线性的，因而非线性科学对于地球系统模拟是非常重要的。

一般说，在地球物理系统中要出现宽带的时间尺度和空间尺度。而传统的地球科学则局限于研究特殊的子系统（例如大气）和特殊的时间和空间尺度（例如在大气中研究千千米空间尺度，时间尺度为天的天气过程）。现在，我们把地球看成是一个整体的动力系统，各子系统相互作用的过程就跨越很宽的时空尺度。其时间尺度从秒到 10 亿年，空间尺度从毫米到全球尺度。过程从湍流到地幔对流，从植物生长的年轮到地球和生命的起源。

虽然地球物理系统跨越很宽的时-空尺度，但是不同尺度的过程存在自相似性。例如，气候系统可以包含季节变化、年变化、百年变化和千年变化。不管什么尺度都是研究冷和暖，或旱和涝。又例如千千米天气尺度的涡旋运动包含有气旋和反气旋，而湍流涡旋运动也包含以气旋和反气旋方式旋转的更小的涡旋。

对于地球物理系统我们不考虑暂瞬状态，而是研究状态的长时间的归宿——耗散系统的吸引子。对耗散系统有四种吸引子：定常吸引子，周期吸引子，拟周期吸引子和混沌吸引子（即奇怪吸引子）。

我们用位势的两个最小值分别表示气候的冷和暖，或旱和涝，如图3。位势的两个大的最小值是大尺度的冷和暖吸引子，而其中也包含有用较小的最小值表示的小尺度的冷和暖吸引子。地球物理学中的其他过程如地震也有类似的自相似结构。

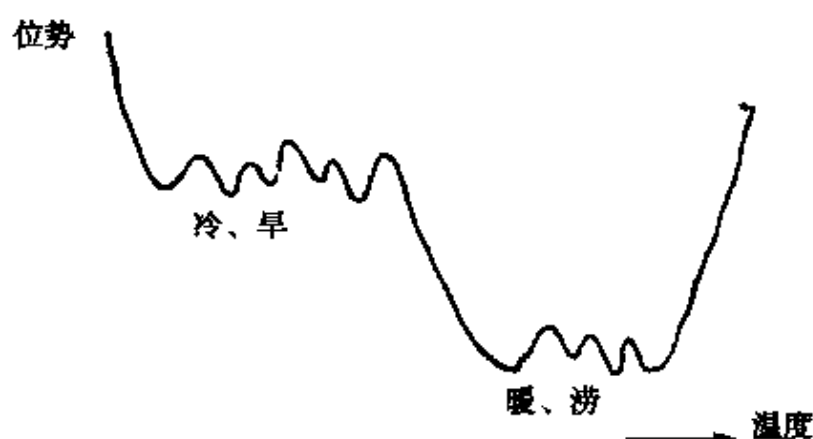


图3 不同尺度气候的相似性

Fractal（分形）这个词首先是由 B. B. Mandelbrot（1974）创立的，它用来描述在所有尺度上都有的不规则的破碎形状的客体。分形的基本特点是在所有尺度上存在自相似的结构。小尺度的客体似乎是整个客体的模仿。不同尺度气候的冷和暖就可以看成是分形和混沌现象。尺度不变性的结果使得分形客体通常具有分数维而不是整数维。

分形概念将不同尺度（时间或空间）状态的统计性质之间联系起来。设 $p(t)$ 是时间尺度 t 的状态， $p(\lambda t)$ 是时间尺度 λt 的状态，那么自相似的分形就意味着 $p(\lambda t)$ 和 $p(t)$ 之间有如下关系

$$p(\lambda t) = \lambda^\alpha p(t) \quad (9)$$

其中 α 称为标度指数，通常 $0 < \alpha < 1$ 。

混沌吸引子的分数维可以从所观测的地球物理资料的嵌入相

空间的轨道中估计求得 (Grassberger 和 Procaccia 1983)。混沌吸引子的分数维提供了动力系统该吸引子的性质和模拟它的动力学的所必须的最低的变数数目的信息 (Eckmann 1985)。

例如气候吸引子的维数是 3.1 (Nicolis 1984, 1986, 1987) 或 4.4 (Fraedrich 1987), 地震的分数维是 $b/1.5$ (Aki 1981, King 1983, Scholz 1989), 其中 b 是著名的 Gutenberg - Richter 公式中的参数。大气湍流的分数维是 2.1 ~ 2.7 (Liu 1988)。现在我们来处理下列三个气候资料集:

(a) 中国主要城市 79 年 (1911 ~ 1989) 的月平均温度时间序列;

(b) 中国主要城市 519 年 (1470 ~ 1988) 年降水等级资料时间序列;

(c) 中国北京 265 年 (1724 ~ 1988) 7 月份降水资料。这三个资料的分数维估计分别为 2.8, 3.3 和 3.7。

应该强调, 根据分数积分和微分, 分数维可以用来过滤气候噪声, 保留气候的基本特点并忽略高频涨落。

如果我们假设单变量时间序列的拓扑维是 d , 那么一个混沌时间序列可以看成是一些随机涨落加进到 d 维客体的结果。由于分形客体的拓扑维小于分数维 D (Mandelbrot 1982), 那么 D 和标度指数 α 的关系是

$$D = d + 1 - \alpha \quad (10)$$

因为 α 和功率谱指数 β 的关系是 (Turcotte 1988)

$$\beta = 2\alpha + 1 \quad (11)$$

因此 β 和 D 的关系是

$$\beta = (2d + 3) - 2D \quad (12)$$

例如对于 $d = 1, 2, 3$, (12) 式成为

$$\begin{aligned} \beta &= 5 - 2D \quad (1 < D < 2) \\ \beta &= 7 - 2D \quad (2 < D < 3) \\ \beta &= 9 - 2D \quad (3 < D < 4). \end{aligned} \quad (13)$$

将气候时间序列求差值运算和平滑运算分别相当于微分运算和积

分运算，那么分数维则增加（降低），功率谱指数则降低（增加）（Mandelbrot 1982）。这就意味着通过时间平滑以后的气候资料和原来的气候资料功率谱及分数维是不同的，两者有不同的结构。

图 4 表示同样气候资料却有不同维数的结果。从图 4 我们看出从低气候层次（大的 D ）到高气候层次（小的 D ）信息就压缩了。

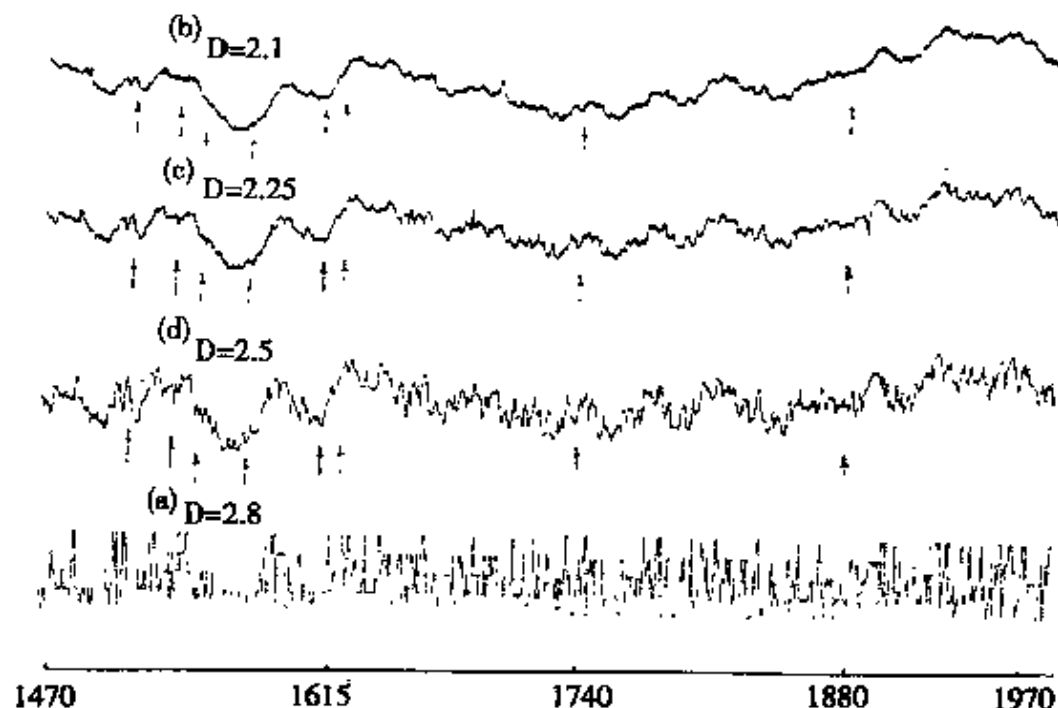


图 4 519 年气候资料（1470 ~ 1988）不同的维数

(a) $D = 2.8$ (b) $D = 2.5$ (c) $D = 2.25$ (d) $D = 2.1$

然而地球物理系统实际的过程是不均匀的，有强场和弱场之分。例如三维湍流的能量耗散率是非常不均匀的（这叫奇异性）。许多变量在空间中有不同的涨落，例如高浓度黄金仅分布在很少的地点上，而低浓度的黄金几乎处处都有，因此用多分形的分析对地球物理学是非常重要的。（Atmanspacher 1988）

Schertzer 和 Lovejoy（1983, 1987）表明，多标度是与非各向同性间歇湍流和不均匀的混沌相配合的。因此标度已不再局限于自相似性和点集的几何性质，相反，多标度涉及到弱和强（浓和稀）的层次场，它们有不同的标度状态。

四、湍流的 Kdv - Burgers 方程模拟

由于湍流的耗散性, Burgers (1948) 认为 Burgers 方程可以作为湍流的规范方程。但是耗散过程是不可逆的, 机械能仅仅能够转变成热能。而且在涉及湍流的许多物理问题中普遍存在能量逆转现象, 即大涡旋可以从小涡旋得到动能。也就是说平均流可以从扰动场中得到动能, 这称为负粘性现象。林家翘 (Lin 1983) 认为湍流具有波动和粒子两重性。高歌 (Gao 1985) 认为湍流理论必须既包含耗散因子还要包括色散因了, 他提出 KdV - Burgers 方程可以作为湍流的规范方程。根据高歌分析, 湍流和 KdV - Burgers 方程的鞍焦异宿轨道行波解有关。最近我们 (1990) 用 KdV - Burgers 方程分析了涡流的结构。

KdV - Burgers 方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (14)$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 是非定常项, $u \frac{\partial u}{\partial x}$ 是非线性项, $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 是耗散项, $\beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ 是色散项。

为了取得行波解, 设 (Liu 1982)

$$u = u(\zeta) \quad \zeta = x - ct \quad (15)$$

将其代入 KdV - Burgers 方程得到

$$(u - c) \dot{u} - \nu \ddot{u} + \beta \dddot{u} = 0 \quad (16)$$

其中 $\dot{u}$, $\ddot{u}$ 和 $\dddot{u}$ 分别表示对 ζ 的一阶、二阶和三阶导数。

将 (16) 对 ζ 积分一次得

$$\beta \ddot{u} - \nu \dot{u} + \frac{1}{2} u^2 - cu = A \quad (17)$$

其中 A 为积分常数。

(17) 式也可以写成

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = \frac{\nu}{\beta} v - \frac{1}{2\beta} (u^2 - 2cu - 2A) \end{cases} \quad (18)$$

(18) 有两个定常解 $P(u_1, 0)$ 和 $Q(u_2, 0)$, 其中

$$u_1 = c + \sqrt{c^2 + 2A}, \quad u_2 = c - \sqrt{c^2 + 2A}, \quad c^2 + 2A > 0 \quad (19)$$

当正粘性 ($\nu > 0$) 和正色散 ($\beta > 0$), 且 $\nu^2 < -4\beta \sqrt{c^2 + 2A}$ 时, P 点是鞍点, Q 点是稳定焦点。此时 u 随 ζ 的变化的左半部分接近于衰减振荡, 右半部分接近于孤立波, 见图 5 (a)。这样鞍焦异宿轨道的解可近似表示成

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 + \frac{u_1 - u_2}{2} e^{\frac{\nu}{2\beta}\zeta} \cos \sqrt{\frac{u_1 - u_2}{2\beta} - \left(\frac{\nu}{2\beta}\right)^2} \zeta, & (-\infty, 0] \\ u_2 + \frac{3(u_1 - u_2)}{2} \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{u_1 - u_2}{8\beta}} \zeta, & [0, +\infty) \end{cases} \quad (20)$$

显然当 $\zeta \rightarrow -\infty$ 时 $u \rightarrow u_1$, 当 $\zeta \rightarrow +\infty$ 时, $u \rightarrow u_2$ 。

对 $\nu > 0, \beta < 0$ 情况, 和 (20) 类似, 解可表示为

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 - \frac{3(u_1 - u_2)}{2} \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{u_1 - u_2}{-8\beta}} \zeta, & (-\infty, 0] \\ u_2 - \frac{u_1 - u_2}{2} e^{\frac{\nu}{2\beta}\zeta} \cos \sqrt{\frac{u_1 - u_2}{-2\beta} - \left(\frac{\nu}{2\beta}\right)^2} \zeta, & [0, +\infty) \end{cases} \quad (21)$$

见图 5 (b)。

当这种行波沿 ζ 轴向右移动时, 图 5 (a) 说明, 场首先由状态 u_2 控制, 慢慢进入无耗散的孤立波部分。当振幅达到最大时, 那么波受耗散影响的衰减振荡控制, 振幅和尺度都逐渐减小。这相当于湍流能量由大涡逐渐串级到小涡的串级 (cascade) 过程。那么围绕着平均值 u_1 振荡的扰动部分可表示为

$$u'(\zeta) = a e^{\frac{\nu}{2\beta}\zeta} \cos k_1 \zeta, \quad (-\infty, 0] \quad (22)$$

其中

$$a = \frac{u_1 - u_2}{2} = \sqrt{c^2 + 2A} \quad (23)$$

$$k_1 = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\nu}{2\beta}\right)^2}, \quad k_0^2 = \frac{u_1 - u_2}{2\beta} = \frac{\sqrt{c^2 + 2A}}{2\beta} \quad (24)$$

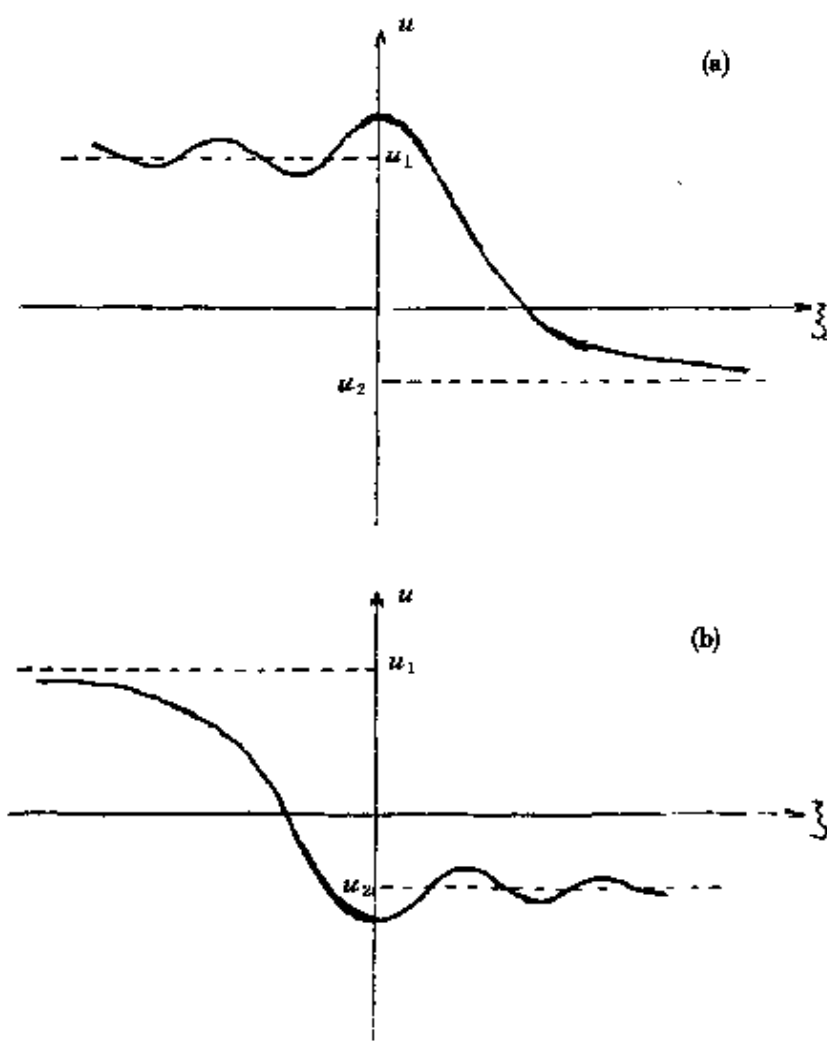


图 5 KdV - Burgers 方程的鞍焦异宿轨道

(a) $\nu > 0, \beta > 0$ (b) $\nu > 0, \beta < 0$

(22) 式可以看成是湍流的速度场。

同样，将 ζ 移至 $\zeta + \eta$ 的速度场为

$$u'(\zeta + \eta) = a e^{\frac{\nu}{2\beta}(\zeta + \eta)} \cos k_1(\zeta + \eta) \quad (25)$$

由 (22)、(25) 求得相关系数

$$R(\eta) = e^{\frac{\nu}{2\beta}\eta} \left[\cos k_1 \eta + \frac{\nu/\beta}{\left(\frac{\nu}{2\beta}\right)^2 + 2k_1^2} \sin k_1 \eta \right] \quad (26)$$

显然 $R(0) = 1, R(-\infty) = 0$ 。

将 (26) 式求 Fourier 余弦变换可得到湍流功率谱

$$F(k) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} a^2}{2 L k_0^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{k_0}\right)^2} \frac{1 - \frac{\left(\frac{k}{k_0}\right)^2}{1 + \left(\frac{k}{k_0}\right)^2}}{1 - \left[\frac{2 \frac{k_1}{k_0} \frac{k}{k_0}}{1 + \left(\frac{k}{k_0}\right)^2} \right]^2} \quad (27)$$

我们取 $\frac{k_1}{k_0} = 0.6$, 则无因次能谱 $F_1(k) = \frac{F(k)}{\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} a^2}{2 L k_0^2}}$ 随 $\frac{k}{k_0}$ 的变化, 表

明在图 6 上。

在双对数坐标上, 能谱斜率随 $\frac{k}{k_0}$ 变化如下:

$$\begin{aligned} \frac{\log F_1(k)}{\log k/k_0} &= -1.76, \quad \text{当 } 1 < \frac{k}{k_0} < 3 \\ &= -1.97, \quad \text{当 } 3 < \frac{k}{k_0} < 10 \\ &= -1.94, \quad \text{当 } 10 < \frac{k}{k_0} < 30 \\ &= -1.88, \quad \text{当 } 30 < \frac{k}{k_0} < 80 \end{aligned} \quad (28)$$

当 $1 < \frac{k}{k_0} < 80$ 时, 能谱的平均斜率是 -1.89 。它很接近于 Kol-

mogorov 惯性区能谱的 $-\frac{5}{3}$ 方定律

$$F(k) \sim k^{-5/3} \quad (29)$$

若考虑湍流是间歇的, 按 Frisch (1978, 1985) 间歇湍流模型, 能谱可表示为

$$F(k) \sim k^{-\frac{5}{3} - \frac{3-D}{3}} \quad (30)$$

其中 D 是间歇湍流的分数维。

由 (28)、(30) 看出, 分数维 D 为

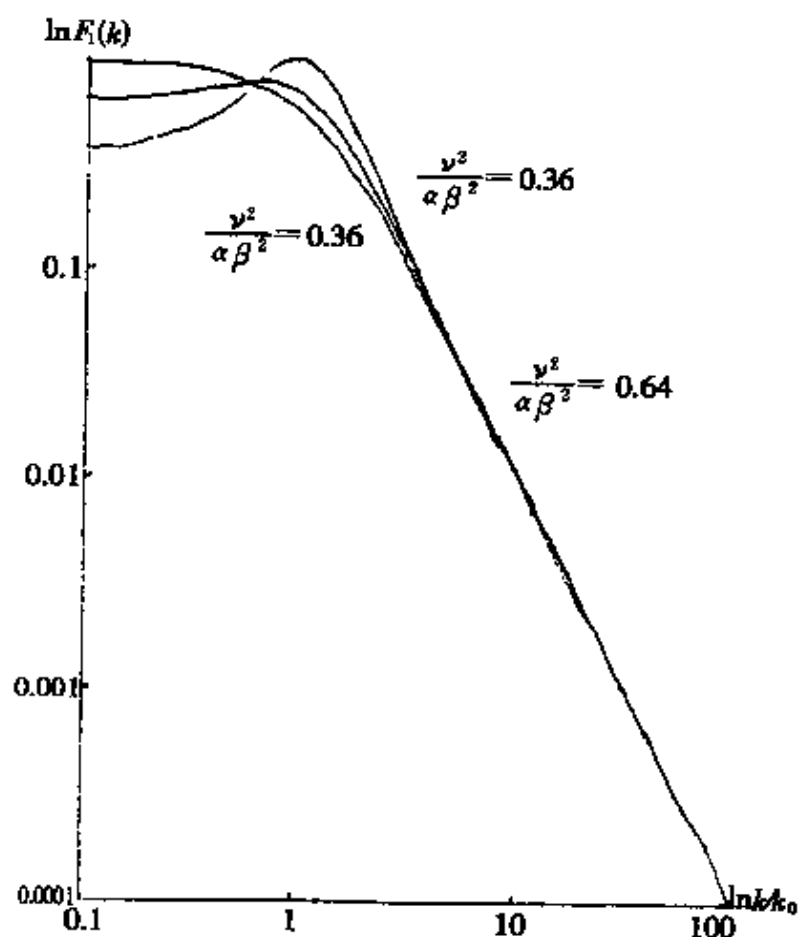


图 6 在双对数坐标系 $\left(\log \frac{k}{k_0}, \log F_1(k) \right)$ 的湍流能谱

$$D = 2.72 \quad \text{当} \quad 1 < \frac{k}{k_0} < 3$$

$$D = 2.09 \quad 3 < \frac{k}{k_0} < 10$$

$$D = 2.19 \quad 10 < \frac{k}{k_0} < 30$$

$$D = 2.35 \quad 30 < \frac{k}{k_0} < 80$$

(31)

间歇湍流的平均分数维 $D = 2.14$

参 考 文 献

- [1] Arnold V. I. (1978), *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer.
- [2] Atmanspacher H. (1988), Global scaling properties of a chaotic attractor reconstructed from experimental data, *Physical Review*, A37, 1314 - 1322.
- [3] Burgers J. M. (1948), A mathematical model illustrating the theory of turbulence, *Adv. Appl. Mech.*, 1, 171 - 201.
- [4] Chao Jiping (1962), An approximate analysis of interaction between small scale convection and environment, *Acta Meteorologica Sinica* (in Chinese); 32, 11 - 18.
- [5] Charney J. G. (1979), Multiple flow equilibria in the atmosphere and blocking, *J. Atmos. Sci.*, 36, 1207.
- [6] ESSC NASA. (1988), *Earth system science, a closer view, a program for global change*, NASA.
- [7] Eckmann J. P. (1985), Ergodic theory of chaos and strange attractors, *Rev. of Mod. Physics*, 57, 3, 617 - 656.
- [8] Feigenbaum M. J. (1978), The universal metric properties of nonlinear transformation, *J. Stat. Phys.*, 21, 669.
- [9] Fraedrich K. (1987), Estimating weather and climate predictability on attractors, *J. Atmos. Sci.*, 44, 722 - 728.
- [10] Frisch U. (1978), A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence, *J. Fluid Mech.*, 87, 710 - 736.
- [11] Frisch U. (1985), Fully developed turbulence and intermittency, in *Turbulence and predictability in Geophysical fluid dynamics, and climate dynamics*, NorthHolland.
- [12] Gao G. (1985), A theory of interaction between dissipation and dispersion of turbulence, *Scientia Sinica (A)*, 28, 6, 616.
- [13] Grassberger P. & Procaccia I. (1983), Characterization of strange attractors, *Phys. Rev. Lett.*, 50, 5, 346 - 349.
- [14] Grassberger, P. (1987), Generalized dimension of strange attractors, *Phys. Lett.*, 97, 277 - 230.
- [15] Haken H. (1976) *Synergetics: An introduction*, Springer.

- [16] Haken H. (1983), *Advanced Synergetics*, Springer.
- [17] Lin C. C. (1983), *Galaxies, Turbulence and Plasmas*, Proceeding of Symposium of the 2nd Asian Conference of Fluid Mechanics, Science Press, Beijing.
- [18] Liu Shida & Liu Shikuo (1982), Nonlinear cnoidal waves and solitary waves in atmosphere, *Scientia Sinica (B)*, 25, 1103 - 1117.
- [19] Liu Shida (1986), Chaos in internal-wave dynamics and onset of atmospheric turbulence, *Scientia Sinica (B)*, 29, 1201 - 1211.
- [20] Liu Shida (1988), An investigation of the problem of occurrence of the atmospheric turbulence, *Scientia Sinica (B)*, 31, 6, 760 - 768.
- [21] Liu Shida (1988), Computation of Lyapunov exponent and fractal dimension by using atmospheric turbulent data, *Acta Meteorologica Sinica (in Chinese)*, 46, 1, 41 - 48.
- [22] Lorenze E. N. (1963), Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.*, 20, 130.
- [23] Mandelbrot B. B. (1974), Intermittent turbulence in self similar cascade: divergence of high moments and dimension of the carrier, *J. Fluid Mech.*, 62, 331.
- [24] Mandelbrot B. B. (1982), *The fractal geometry of nature*, Freeman.
- [25] May R. M. (1976), Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature*, 261, 5560, 459.
- [26] Meakin P. (1986), A new model for biological pattern formation, *J. Theor. Biol.*, 118, 101 - 113.
- [27] Monin A. S. & Yaglom A. M. (1971), *Statistical fluid mechanics*, Cambridge MA, MIT Press.
- [28] Nicolis C. & Nicolis G. (1984), Is there a climatic attractor? *Nature*, 311, 529 - 532.
- [29] Nicolis J. (1986), *Dynamics of hierarchical systems, an evolutionary approach*, Springer.
- [30] Nicolis C. & Nicolis G. (1987), Evidence for climatic attractors, *Nature*, 326, 523.
- [31] Panofsky N. A. & Dutton J. A. (1984), *Atmospheric turbulence*, ISBM.
- [32] Ruelle D. & Takens F. (1971), On the nature of turbulence, *Comm. Math.*

Phys., 20, 176.

- [33] Ruelle D. (1985), The onset of turbulence: A mathematical introduction, in Turbulence and predictability in Geophysical fluid dynamics and climate dynamics, NorthHolland.
- [34] Schertzer D. & Lovejoy S. (1983), The dimension and intermittency of atmospheric dynamics, Turbulent shear flow 4 selected papers from the fourth international symposium on turbulent shear flows, 7 - 33.
- [35] Schertzer D. (1987), Physical modeling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes, J. Geophys. Res., 92, 8693 - 9714.
- [36] Scholz C. H. & Mandilbrot B. B. ed. (1989), Fractal in Geophysics, Pure and Applied Geophysics, 131, 1/2.
- [37] Takens F. (1980), Detecting strange attractors in turbulence, Dynamical system and turbulence, Lecture notes in Math., 898, Springer.
- [38] Turcotte D. L. (1988), Fractal in fluid mechanics, Annual Review of Fluid Mechanic, 20, 5 - 16.
- [39] Wolfram S. ed. (1986), Theory and application of celular automata, World Scientific.
- [40] Xion S. L. (1989), Some kind of analytic solution of KdvBurgers equation, Kexue Tongbao (in Chinese), 1, 26 - 29.
- [41] Yih C. S. (1980), Stratified flow, Academic press, New York, America.

小组讨论：混沌对科学和社会的冲击

费根鲍姆 (Feigenbaum) (主持会议)：我们对混沌的研究已对物理和社会科学产生了影响。在本次会议上，我们要弄清那些研究的情况，然后考虑用这些方法去研究可能产生什么前景。

首先，我想作一点简短的回忆。关于本次会议总的主题“混沌对科学和社会的冲击”，有各种各样的事情引起我考虑目前我们称为“混沌的问题”。给我产生十分强烈印象的一件事是，大约在 1972 年或者 1973 年，一位作者名叫 Immanuel Velikovsky，你们有人或许能想起他，他推测我们的太阳系并不总是我们现在看到的这样，并提出了一个奇怪的理论，即在有史时期中火星曾处于另一不同的位置。他的著作赢得了人们的关心，并在 60 年代末开始的一段插曲之后，在 70 年代初，很大一部分人对 Velikovsky 又变得热心起来。

在那个时代，由于反确定论的思潮普遍流行，对天文学的兴趣重新出现，科学界的许多成员，尤其是物理学家认为事情变得无法控制。他们感到有必要告诉一般人们去阅读那些无稽之谈是在浪费时间。我记得在 1973 年的某个时候，在“纽约时报”上发表了一整版由许多知名的物理学家签名的文章。我想它是由 Carl Sagan 所写，我记得 Hans Bethe 和 Victor Weisskopf，还有一大批美国科学家在上面签了名。文章的观点是，既然我们知道天文学的所有问题是荒谬的，你们最好把金钱和时间花在更加纯正的科学上，而且对 Velikovsky 持续增长的兴趣是特别愚蠢的。因而这些杰出人物们作出结论：我们知道太阳系是绝对稳定的，我们有科学的知识来驳倒 Velikovsky 的言论，所以你们在浪费时间。

由于各种原因，其中有些是社会的原因，我没有过高地看待我的同行们决定在报纸上发表的东西。但我也在问我自己：“问题怎么可能是这样，即人们知道太阳系是稳定的？”于是我开始

四处询问并试图去做我认为能做的计算。这时使我惊奇的是，除了由于无知而产生的过分自信，没有任何依据可以确定上述结论。正如你们今天所听到的，事实上情况完全不同。

我想是 Jack Wisdom 曾说过，某些思想——那些我们现在称为混沌的思想——确实改变了人们认识事物的方式。诚然，如果你去问 Carl Sagan，他现在不会那样随便地说宇宙是稳定的并一直在那里——大爆炸受到怀疑。用这开场白，我们想倾听各位专家在各自专业中所见的混沌如何改变了我们做研究的某些方法，从讨论混沌发展而来的结果以及在他们认为是可信的范围内关于事物发展方向的看法。

裴克多 (Peixoto): 我是搞数学的，但我也是一个土木工程师。我的早期工作与动力系统有关，并且从某种意义上讲，我见过那些要素，它们开始将混沌应用于被称之为结构稳定性的工作。那时有一种普遍的感觉，认为结构稳定性是非常成熟的。花了很长时间人们才开始认识动力系统的混沌行为。本质上讲，研究动力系统结构稳定性带来的贡献是，我们需要考虑不是单个方程而是许多方程所有可能的解，还有这些方程所有可能的初始值。这恰巧是一个重要的写照，也是研究微分方程的一种基本方法。从某种意义上讲，当我发现这里不少人对这种方法感兴趣时，我感到惊奇。

从 Steven Bishop 的谈话中可知，很明显至少在某些工程师群体中有这种潮流。当时他出示存在稳定性问题的一条船的图像，并要说明它是否会倾覆。很明显这条船不能当成空间的一个点的运动来研究。他研究了许多相邻的解，并作了参数扰动研究。正是这一潮流控制着动力系统，并随 Steven Smale 的工作而成熟。动力系统的这种理论正是思考和研究微分方程组的方法。所以我猜想，混沌的出现、基本上是由于 Edward Lorenz 认识到天气是不能通过长期预报来预言的。混沌在气象学中被承认不是偶然的，因为天气并不一定遵从单一的轨迹。

我还想指出，参数敏感性、倍周期等都与这一问题有关。很显然，如你在多于10年内观察太阳系，它肯定不是混沌的，尽管有例外，也许在这一时间内计算冥王星的轨道是混沌的。如果你在较长的时间内观察，太阳系是混沌的。因而值得强调的是你必须理解如何确切选择参数以辨别混沌行为。展望未来，我猜想我们将继续在混沌方面的工作，只要有目前这么多关于这一课题的期刊。当然由于科学要受社会现象的制约，在科学领域混沌的研究将遵从任一新的社会现象的一般进程。

如勒 (Ruelle): 我想我们应该非常高兴，因为大多数与会者的介绍严肃而求实。我们有时听到这样的说法，称混沌理论中的分形将会给出治疗艾滋病的方法。这种说法不仅使人为难，而且会对混沌的形象，对科学的整体形象产生坏的影响。

如果要用历史的观点来评估混沌，我想对这门学科细分很重要。在物理学和数学中，在我看来巨大的兴奋期或许已经结束。混沌导致了数学领域的一些重要结果。对物理学也可作出类似的评价。例如，湍流理论将不再是老样子，因为我们知道湍流是混沌的，虽然这一认识不能解决混沌这一难题。对物理学的其他一些问题也可作出类似评价。有关物理学和数学中混沌的新思想的出现，有可能导致混沌的再度复兴，但我认为最兴奋的时期已经过去。目前就天文学而言，我们今天听说这一领域正处于令人激动的时期。至于生物学，令人激动的时期就要来临。为什么？出现一个将动力系统概念应用到生物学的激动人心的时期是显然的，因为在生物学中有那么多的准周期或振荡现象。很显然，从动力系统的观点来仔细研究它们是十分有益的，并能产生一些重要结果。只是因为从方法论的观点来看，这一问题是十分困难的，要获得重要结果我们必须要有耐心。关于这一点，不仅在日本在其他国家也有这样的说法，即涉足生物学中的混沌是没有保证的和危险的。

让我来作一个小结。关于混沌的影响，人们可以得到的全面

的观点是什么？我想区分两种类型的结果。即在物理学中如在气象学我们见到的过硬的定量的科学结果，在天文学中正在得到的结果，以及那些无疑将在生物学中得到的结果。这些结果是重要的。使我惊奇的是混沌的思想怎么会如此富有成果。

就促进哲学思想而言，混沌对知识活动也产生了冲击，这我认为不能忽视。不管我们喜欢与否，这些影响正在发生。“混沌”一词以非技术的方式被许多人使用。但以非技术的方式来使用这一事实并不能说明“非科学家们”对正在发生的事情有完全错误的理解。但是，作为科学家我们能够帮助人们更好的了解混沌是什么，进而给他们的知识生活带来新的东西。

毕萧 (Bishop): 当然，David Ruelle 所说的大多数我都同意。但关于给出引语我也要提请小心。在这次会议中我们听到 James Clerk Maxwell 的话被引用，它被认为是关于混沌的本身，但事实上有些被误解了。我认为大众媒介经常试图去引用一些含有混沌一词的（大约 200 年前）的句子，然后作出关于混沌或许并不正确的断言。我想我们不应以怨报德，因为混沌流行的事实说明更多的人了解我们所做的工作。有这种认可非常好。但我们必须知道引语的运用有时会产生误导。

凯利斯-波罗克 (Keilis-Borok): 在我的国家许多人相信生命是有意义的，就这种意义而言，我来自一个宗教国家。传统上讲，这使得我们十分喜欢发表建议。我不喜欢这样，所以关于在混沌领域所发生的事我不想作任何伦理方面的评价，但我愿与大家分享我的亲身经历。

乘上领头车肯定既有益处又有不足，因为不仅仅是这一术语还有出现在计算机屏幕上的混沌图像都有一些含糊。这些图像确实使人着迷，并产生了林中观火的冲击。你可得到许可去看这些图像。与此同时混沌又是一十分革命的概念，我想即使过分使用这一概念也不会有害处。你不可能知道现在给的许可在以后会产

生什么，甚至摆弄混沌也会被证明是有用的。因而这一概念不可避免地会进入一个又一个领域。

混沌进入我的地震学领域大约在5年以前，而且是以一种典型方式进入的。首先是遇到了阻力，因为对喜欢在细微末节上研究的人来说它是一种综合的方法。我认为一个重要的告诫是：混沌理论是一种工具——非线性动力学是图像的一部分——而不是灵丹妙药，应当在认为合适时才用它。但是在我的研究领域里，它有很大的帮助，因为它将研究工作从没有底的琐碎细节提高到一个较为简单而综合图像的水平上。加速这一过程的惟一途径是通过教育，因为教育教会我们去尝试不同的方向，至少暂时如此。

然而重要的是要牢记最后的评价是看你最终取得了结果与否。这些结果不仅仅是提供反思性的解释，而且还要能预测。虽然所有的应用都必须通过这种检验，但有些应用要比另一些更急迫一些。我想是 Jerome Wiesner 说过，来自自然灾害与技术相结合产生的威胁大于希特勒 (Adolf Hitler)、斯大林 (Joseph Stalin) 或核战争构成的威胁。世界各国政府每年要花费 1 万亿美元来预防这种危险，其中大多数是给过时的技术家。

我们现在处于这样的境地，在某些领域，我们需要曼哈顿工程式的努力，不是就规模而言，而是就努力的集中程度和协调的强度而言。其中有些问题在应用非线性动力学时会得到最好理解。我认为心理学、教育，当然还有裁军方面的问题更为急迫。因为我们听说，关于裁军和心理学，非线性动力学是与之有关的。所以我希望我们用部分努力尽快解决这些问题。但我也理解，只有在领导者和队伍肯干时非线性动力学的加速应用才会出现。

格里博格 (Grebogi)：我认为混沌终归是数学。这样的动力系统理论正应用在科学中，就像它现在应用在技术中一样。最初的影响是在较为精密的科学和技术中，我们看到在这些领域混沌

被较好的量化或许也被理解得较好。但我们也看到，混沌正渗入到不大精密的科学中，如社会科学和经济学，虽然其结果没有被很好的量化。正如刚才 Steven Bishop 提到，你甚至可以听到外行使用“混沌”一词。直到最近，如果在一个晚会上人们问我在做什么时，我会说“应用数学”，他们的反应将是“我恨数学”，谈话就这样结束。现在，当我给出同样的回答时，人们会说：“你知道有关混沌的事吗？你能否告诉我有关混沌的东西？”谈话将继续下去。

另外，我想这次研讨会真正证实了这样的事实，即混沌是交叉学科和多学科的，而数学是核心。关于 David Ruelle 所提的“什么会影响什么”的问题，我的感觉是，一方面科学和工程相互促进，另一方面数学还有工程和科学皆从这种相互促进中受益。正如 Jack Wisdom 所提到，混沌对理解科学与工程中的许多鲜知现象至关重要。

David Ruelle 提到混沌的应用不多。在去年四月由美国发射的空间望远镜中就有一些非直接的应用。问题之一是，由于挑战者号事故，航天飞机由于它们携带的附加安全设备，现在更重且不能飞到那样的高度。发射空间望远镜中的一个挑战性的问题与当前太阳系的太阳黑子循环有关。由于强烈的太阳黑子活动（处于 11 年一个循环的顶峰），上层大气被加热并膨胀至更高的高度。由于变得较为稠密的上层大气引起摩擦力增加，如果轨道不是足够高的话，太空望远镜在落回地面前的寿命可能减少到只有几年。许多人在为预测太阳黑子的活动强度而工作，最好的预测是利用从 1700 年以来积累的数据和 David Ruelle 的混沌动力学技术作出的。预测指出，本次循环的太阳黑子活动是一个世纪内最强的。当本循环的峰值在去年 7 月到来时，它确实是最强的一次。NASA（美国航空航天局）把空间望远镜放到尽可能高的位置，以避免几年后还得花 2 亿美元发射另一架航天飞机把它送到更高的轨道。

费根鲍姆：我认为在评论这些发言时可以说上几点。当然我们已经看到数学是与混沌有关的。Maurico Peixoto 对结构稳定性的概念作了一些十分有力的说明，确实混沌是这一课题进步的重要标志之一。但我们当然也认识到结构稳定性有其缺点。当然，从数值的观点来看，没有方法能够真正区分一个周期十分长的轨道和一个非周期轨道。关于结构稳定性，有绝对不同的本质。

幸运的是，可以用不同的问题和方法来处理它们之间模糊不清的差别，而这种差别用数学方法是不易处理的。所以人们喜欢在稍许扩大了范围内看这些。同样对于什么是物理输入、什么是数学输入这类一般问题，这与社会传统及过去 50 年或 70 年来发展起来的做数学的方法有关，后者与如何提取细节有很大的关系。

在这种普通的剔去不重要的细节的过程中，有时我们会剔去得太多。例如，在重正化群处理中倍周期的概念与数学上的概念是格格不入的，部分因为它们确实依赖于与光滑性相连的某些东西。但如果你剔去所有这些考虑，这样的现象将永远不会作为一个一般特征出现。

所以一定存在各种思想的相互作用。结构稳定性提供一个考虑动力学一般问题的框架，与前者有关的非常有力的思想在发展这一领域方面十分重要。但与此同时，如果你对什么是几率谱认识更多，你就会用其他东西取代某些细微差别。而有时那些细微差别以某个科学问题的外衣隐藏着，使得数学家们没有想到它们，因为它们似乎是些细节。在混沌这门学科中，我认为纯数学的概念有较为真实的相互作用，与其他学科比较，其处理事情的风格是特别有用的。

如勒：我想对看起来令人激动的某些前景作点评论。我认为就混沌的概念而言我们所得到的，目前我们至少有能力去接近一些有重要哲学意义和直到最近对我们来说可望不可及的问题。如：历史的发展如何随不能被控制的小细节而定？或者是以可预

测的方式被决定的吗？目前这是一个较难的哲学问题，也有支持这两种可能性的一些哲学观点。这是一个主要为了纯科学的原因希望理解的问题，但也可能为了实际的原因。直到最近，仍似乎完全不可能。

现在，我认为这一问题仍是不可接近的，但已不像从前那样不可接近。例如，我们的实际利益来自经济效益，而后者取决于几周后不可预测的天气影响，如雹暴引起的作物减产。进一步的问题是冰雹对作物的影响是否对经济有影响。虽然我们不能回答这些问题，但至少我们可以提出和摆弄这些问题。所以，从哲学的意义上讲，这些都是重要又实际的有解决可能性的问题。

费根鲍姆：已提出的问题之一是问：混沌是与灾变理论同类的一种昙花一现的理论吗？同样重要的是问：我们对广泛联系的一些课题的理解，甚至对目前被认为是更具哲学性的课题的理解，是否得到改进；我们现在的处境是否比那时对灾变理论夸夸其谈更好？当我们沉思灾变理论的有关论断时，我们或许应该记得被称为“系统理论”的惨淡历史，那只不过是用了许多矩阵。由这一课题产生的奇妙结果之一是，你不应该去建新的房屋，因为它以缺房可用而告终。这一重要的影响在 70 年代初期严重地控制了该领域和经济学教科书，假若我记得不错的话。所以，我们或许应该决定我们是否有了充分准备和有更好的可用工具来更深入理解这些十分普遍的问题，就像 Ruelle 教授所提到的那样。

米斯 (Meese)：我想用稍微引起争议的方式提出问题，希望至少被在座的数学家们攻击。我们似乎正发展到这样的阶段，我们能够通过提取数据，并用非线性模型来拟合，然后以这种非显式模型应用一些非线性理论的结果。关于这一点是无可厚非的，但你可能认为这是由 Henri Poincare 所发动革命的结束。他从根本上指出，我们应放弃获取有关动力系统数学问题的封闭式解的希望，以定性的性质给出我们的答案。沿着这一方向走就是放弃获

得封闭式模型的希望。目前，在物理学中这是非常不必要的，至少在太阳系的水平上。但如果我们希望把混沌应用到比如说生物学和社会科学，那么这可能是我们不得不走的方向。

波得林 (Boldrin)：我想作两点评论。我认为我倾向于同意，至少基本上同意，我所理解的当 Celso Grebogi 说混沌是数学时所说的意思。以我的观点，混沌是一种工具——一种非常好的和十分令人鼓舞的工具，因为它为你提供了以前你未曾想到的可选择的模式。但他终究是一种工具，因而我倾向于它不应被变成一种启示、宗教、科学的新时代或者这类任何东西。它是强有力的，但不是没有理论的。它不是仅仅靠把非线性动力学和混沌引入一门科学领域，而使我们得到奇妙结果，将所有事情颠倒过来。混沌是一种工具，但你把它引入你的研究领域时，要么在范例内它是合理的，要么如果你足够幸运的话，它为你提供新的范例。相对其他科学来说，在我懂得稍好的社会科学中经常如此。

不幸的是，社会科学家，尤其是那些对其活动没有系统化传统的社会科学家，强烈倾向于从数学家和物理学家那里抓来一些听起来迷人的、有诱惑力、还有好看图像的东西。他们将这些东西变成社会组织的理论。我认为这种做法是非常危险的。我认为在理解社会机制运转方式上，它不会为我们提供多大的改进。在这种情况下，我还是坚持有必要在个案范围内进行研究，以了解混沌理论对解决某些问题是否为一种有用工具。

我不敢说我同意没有理论的方法，因为我认为它提供不了答案。诚然它可能满足 Vladimir Keilis - Borok 条件，即一门科学是好的如果它能够作预报的话。但从某种观点来看，如果你采用这种方法到最后，尤其是在社会系统中，结果是它将科学降低为高级统计学。我不知道要成为一个好的模型，能够作出好的预报本身是它的必要条件还是充分条件。在经济学中肯定不是这样的，在那里认识正在发生的事情仍是更基本的问题。毕竟，如果你在金融市场上工作，有许多高级的统计学技术确实为你提供许多你

关心的预测。但这些几乎不能说明正在发生什么。所以当看到混沌在社会科学中的作用被变成一种预测技术时，我认为我很难高兴。这并不是说混沌实际上是没有用的，也不是说混沌不会对统计技术有正面影响。

凯利斯-波罗克：对你的问题我会给出同样的回答。社会科学包括如此广泛的领域，一些问题可能需要混沌的配合，但肯定不是全部。所以这取决于具体的问题。但我反对你说的。英语不是我的母语，但我并不认为预报就是有关天气的预报。我认为对科学的最终检验是，它能推测出某些以前未知现象的存在，然后用数据检验看是否真的能观察到。就此而言，预报是非常重要的要素。

我收到了一封对我写的关于美国总统选举近期预测文章持激烈反对意见的信，这位诺贝尔奖获得者看了我的文章后认为：“读完这篇文章后我能知道哪些我以前不知道的呢？”在我们提供了阐明论点两段文章的说明后，他接受了我的文章。所以就此而言，我认为预报是一种必要条件。好的科学应该能够告诉你以前你不知道的一些事情。

波得林：我理解了你的意思。我刚才是在用数值预报来解释预报——有关预测。所以你的英语可能比我的好。

曼德尔 (Mandell)：我想说三件事。第一件事来自 Robert Devaney 和 Heinz-Otto Peitgen 的经验，他们俩现正以令人眼花缭乱的动力系统的计算机图形演示为生。我曾到一些中学和大学毕业生听众中，他们对 Robert Devaney 和 Heinz-Otto Peitgen 所作的演讲给予了热烈鼓掌。我认为关于数学能够激起如此轰动的任何事情，尤其是在它已变成如 Celso Grebogi 所说为“可恨的学科”的美国，可能会以与实际内容完全无关的方式得到回报。我认为，不可否认地，混沌既有教育意义，又鼓舞人心，至少在美国。

我想评论的第二件事是关于理论工作。理论研究可能已以任何方式进行了。但在这一领域的工作方式是相互作用的、实验的以及紧密与计算机相连的。我想到实验数学，如果它算是一个领域的话，肯定用到了混沌现象学来处理问题，好像坐在钢琴前谱曲首先听声一样。所以理论工作与计算机存在亲密的相互作用关系，这种关系可能来自混沌理论的应用。

第三点，我认为混沌用于创造计算机图形数学对象，它既不是严格物理学的，也不是纯数学的，而是起着一种中介作用使得不同专业可共同对话。如果这方而也变成了一种对数学工作方式的影响的话，我不会感到惊奇。这三点中没有一点与混沌的本质有紧密的联系，但与混沌的处理，它对教育、科学和科学工作的风格有紧密联系。

谢里 (Shearer): 可能是语义学的问题，关于 Michele Boldrin 所说，我有一个问题，即在多大的程度上“混沌”是一种工具？在多大程度上它是我们正在学会理解得更好的现实要素？

费根鲍姆: 我大部分同意你的观点。你当然能说混沌是某类新的外科手术工具，但同样正确的是我们正试图（在任一可能的层面上）理解某类现象。这实际意味着做数学、物理学或生物学。我们很幸运，因为我们已成功地完成了一两件我们可以运用的东西。很显然我们的成功源于一点点机会，因为还有大量的问题我们缺乏认识方法和工具。我们只有希望能够不断向前。所以如果混沌只是目前我们所开发的特定工具的话，当然它部分可以这么说，那么混沌肯定就像工具一样放在架子上等待别人去用。但是同样确凿的是，那种曾引起混沌发展的思想，并没有像在发展过程中所想象的那样为某种特别用途生产一个最终产品。混沌有其自己的科学观点，它刻画某些问题和思考方法，描述在为其他直觉服务方面人们对数学的想象。这是我的部分理解。

如勒：我想说物理学家们不喜欢谈论现实。他们处理对现实理想化的问题。关于这类理想化有相当多的选择。有些是富有成果的；有些则不然。对混沌或者动力系统的理想化已证明是惊人的有用。

麦耶-克里斯 (May-Kress)：我想作的第一点说明是，混沌理论的贡献之一主要是它作为计算机技术与计算机建模技术同时出现的产物。现在我们不仅有数学工具来处理复杂问题，而且还能理解其结果。如果我们仅有以数字串形式给出计算的结果，那么没有人真正能理解这些结果，混沌的出现也不会有像今天这样的反响。现在我们可以用每个人都理解的语言讨论复杂现象，这时我们能够用非正式的图像和整体关系谈话，因而不是仅限于那些受过较多数学教育的人。

我想作的第二点说明是，混沌在一定程度上对社会已经产生了影响。但这种影响是反对宗教信仰的；也反对这样的信仰，即科学是精确的，因而它也适用于精确性受利益（也许是经济的）驱动的地方。我想在许多领域，给出预报的局限和可能预报的精度与作出预报本身同等重要，这样你就能感受到在复杂情况下作出决定的含义，这种复杂情况是真正限制预测并对精确性加以严格限制的。

毕肖：我想问一个可能与将来含义有关的问题。在本次会议中，我们讨论了低维混沌的细节，尤其是在其他系统中低维混沌的嵌入问题，在这些系统中我们不十分了解正发生什么事情。我想这就产生了一些问题。如果不存在我们所认识的潜在确定性，将会发生什么事情？在这种情况下我们能做这种嵌入吗？如果我们在处理一个较复杂的系统，如何及何时我们能将它从高维降为低维系统？我想知道作为科学家我们在研究和应用混沌中重点要考虑哪些事情。

格拉斯 (Glass): 首先我将作一些说明重述 David Ruelle 提到的关于生物学的几点, 然后说关于物理学的几件事情。生理学系统和生物学系统在包括亚细胞的、细胞的和生理学的各个水平上显示出复杂的节奏, 亦即在任一有机体水平和有机体群中。这正是关于这些系统的一个事实。我们这帮人主要采取的方法, 还有由 Kazuyuki Aihara 极好地描述了的方法, 是为了运用在物理学受到训练的研究人员们的标准方法论, 去解决这些问题。因而我们提出理论模型, 测试模型, 并调整模型, 求得这种理论与实验间的相互作用。正如结果显示的那样, 表达这些理论模型的合适语言就是非线性动力学的并经常是混沌动力学的语言。

还有另外一套在本次会谈中讨论得很少的研究方法, 它或许是应得到更好地阐述的方法。在这一研究中, 科学家们也用在非线性动力学中已开发出的工具来描述生物学系统。对此已简要提到过几次。研究人员们计算维数, 经常用功率谱、熵和它们的方差来描述生物学系统。

我认为所应用的这些算法是非常微妙的, 而且并非所有应用这些算法的专业人员都理解其微妙性和与之相连的困难。作为这一现象的结果, 我们在包括报纸在内的国内媒体经常见到十分引人注目的论断称某某生物学系统是混沌的或非混沌的。我认为我们应该有所保留地相信这些论断。由于行为是复杂的, 它们不必表现出确定性的混沌来, 虽然如此, 你可能读到某杰出专家作出过上面的论断。这并不是说研究人员不应该用和不应该研究这些工具。他们当然应该。但我认为科学家们在解释这些应用与研究的结果时一定是保守的。目前, 混沌对医学没有产生冲击。在将来, 如果不是是更快的话, 也就是在今后一两年内, 会出现戏剧性的断言, 声称混沌动力学和从混沌动力学中引入的工具在医学上有重要的预后意义。我相信会有这样的断言——我有三个朋友目前已经作出了这样的断言, 即各种动力特征可用来预测哪些人具有较大的可能性成为心脏猝死的受害者。

这些论断中有些是受利益驱使。有大量的资金赌注押在美

国、加拿大或大多数西方工业化国家中已制度化的医学上。当 Peter Grassberger 和 Hamar Procaccia 研究出这种算法时，我不知道它们是否想到要出售这些算法。当前对研究生物学的研究人员来说，情况大不一样了。目前这样的科学家大有人在，他们或者积极地为其计算维数甚至是诸如计算功率谱和自相关函数之类东西的算法申请专利，并尽力追求其专利权。当研究人员们声称他们拥有在医学上有预测价值的技术时，应当有专家去询问算法的细节以便能对算法作严格检验，这一点十分重要。这并不是说研究人员在有意误导，而是说科学进步的基础是独立的调查和检验。

在这次会议中我认为明显缺乏实验观测。这方面生物学要好于物理科学。并不是说在物理学中没有大量业已完成的极好的实验工作，而是说在这次会议上确实没有介绍。出现这一情况的一种可能原因是，在物理学家中尤其是在理论物理学家中，存在一定的偏见，我还想说在日本的理论物理学家中有偏见，即认为人们只应做理论方面的工作。非线性动力学中的理论经常过于脱离实验。

为什么会是这样呢？原因之一是如费根鲍姆所说：物理学家对普遍现象感兴趣。一旦我有了一种普适的理论，我就不一定必须去研究一个个单独的系统，因为我的理论对所有单个系统或者更准确地说对许多单个系统是适用的。我想这在一定程度上是对的。同样的现象在许多系统中被观察到，这样的观察是很好的观察。然而我相信去调查单个事例的详情同样是至关重要的。因为一个普遍的自然现象可能有许多微妙的特征，而它只出现在参数空间的小角落。在参数空间的所有其余部分，还发生着许多其他事情，对于它们我们没有好的理论，因为它们还没有被认为是普遍现象。所以我认为仔细观察大量特定的系统是十分必要的。在物理学中，当研究者仔细观察特定系统时，如在由 Albert Libchaber, Harry Swinney 和许多其他科学家完成的极好的工作中，对这些系统的实际实验经常是人们所感兴趣的，而不是对那门具体的学科感兴趣，因为它起到了阐明数学模型普遍性的几个要点的

作用。

然而我想说在生物学中情况稍许有些不同。从所研究的实际专业的观点来看，涉及生物学系统的例子与实验一直是并将继续是人们所感兴趣的。对心律不齐的各种性质，在我或其他数学方面的研究人员们对它们感兴趣以前已早有研究，因为它是这一专业极为重要的一件事情。所以我认为非线性动力学和混沌动力学在生物学中有其自然归属，纯粹是因为由于生物学的结构，生物学中没有像物理学中那样的经典方程。在生物学中，既没有一个薛定谔方程也没有一套麦克斯韦方程组。人们总是在方程组的某个拓扑空间中研究，在方程组中用拓扑学的方法研究动力学十分必要。

最后，我认为迫切需要数学家和物理学家们来仔细思考生物学中的问题。这必然是说要有一些交叉学科的工作。重要的是研究人员应避免坐在象牙塔内做物理学和数学。他们必须去观察实验。他们必须去看在医院里正在发生的事情。十分需要交叉学科的工作，但目前这是极难组织起来的。

一个原因是极少有正常的途径来支撑这样的研究。甚至当科学家们采取步骤开辟途径时，后续的工作也没有保证。事实上，有哪个主管着一个部门的物理学家愿意为正在从事心电生理学、生态学或者发射弹道特性研究的年轻物理学家提供工作呢？所以我认为对那些与科技政策制定有关的人来说，对生物学有某些理解十分重要，从而认真考虑如何将基金（包括研究经费和未来的医师）投向能为对这些领域感兴趣的青年提供就业上。

费根鲍姆：如果你检查一下在物理学中从混沌取得成功和受到混沌严重影响的地方，如如勒早已提到的，你就会想到流体湍流这门不再是从前样子的学科。遗憾的是这里没有有关这一领域的实验人员出席。事实上，这不仅是因为流体湍流这门学科有了重大修改，而且它包括了许多新的部分。所以目前湍流的产生是比一个 10 年或者 20 年以前大得多的课题，当然我们知道现在的

理论框架与旧的理论已完全不同，包括画出后产生乏味结果的高斯强迫项。我们当然还没有全面理解这种非常复杂的湍流行为的工具，它仍然是一个重要的问题。我们还不能肯定动力系统的任一概念是否能为我们理解其他真正的混沌行为（如完全紊动的流体）的能力。我们或许还没有一套正确的思想。当你看到那些真正出色的实验时，操作的方式与过去所进行的颇不相同。比如我们现在分析数据以寻找维数。

还有由混沌思想产生的其他方法，它们是目前所应用而在 10 ~ 15 年以前从没有见过的标准方法的重要部分。所有这些时髦的事情显然都是混沌对物理学产生冲击的地方。还是像 Leon Glass 所提到的那样，Harry Swinney 可能还有 John Hudson 及包括一组法国人在内的许多研究人员，他们正在处理发生在振荡化学反应中的一般问题。我们关于动力化学反应的知识已完全是从以前所理解的转变来的。比较正确的看法是，大约在 15 年或 20 年以前人们已慢慢开始理解在某些有机化学系统中存在有规则的振荡。但当从仔细操作的实验中清楚地观察到混沌行为时，某些学科的大师如 Morris 断然否认在那些系统中有存在混沌的可能性，因为根据他的观点，它与热力学定律有冲突。当然结果是学科发展成为与从前迥然不同的样子。现在我们能不同的程度上用这种广义动力系统的思考方法去分析哪些类型的反应能够被看到，哪些类型的动力过程能够发生。当然，这种振荡化学行为的广义概念在将来某个时候会有多种多样的生物学方面的应用。所以我认为我绝对同意 Leon Glass 的观点。遗憾的是，这里没有实验化学家或实验流体物理学家以更为直接的方式告诉我们这些方法变成什么了，因为它们与过去所用的方法确实大不一样。

维斯多姆 (Wisdom): 关于你刚才所说的，混沌对这些领域（现在和将来）不可逆的和长期的影响，我对你说的一句话很好奇，即混沌好像是灾难理论，也就是说它可能会变成不合时尚的东西。关于混沌的这种说法听起来完全是荒谬的。很显然混沌根

本上改变了我们观察事物的方法。

费根鲍姆：灾难理论，我认为纯粹是社会的原因，经历了初期的硬性推销和随后的过分反作用。灾难理论有一套强有力的核心理论，使得你在某些情况下能够作深入的观察。我认为，用灾难理论完成得最好的事情是由 Michael Berry 获得的对焦散面传播一般性质的认识。这样，根据这一理论的结果人们能够分析某些真正有趣的问题。但是，应该说它的适用范围是较小的。另一方面，很清楚动力系统理论中的混沌思想包括更为广泛的东西，而我们只是开始认识到我们能够观察这些系统中更为复杂的行为，并有一些工具来量化它们。一旦被观察到，这些行为是不会轻易被遗忘的。它们在过去没有被观察到是因为它们被看成是可被扔掉的噪声式的扰动。

运用这些方法我们只能了解数量极为有限的自由度的行为。如果我们思考这些问题的方法、对它们的想象以及发现事物之间联系的方法（如求解维数）足够多，并产生了一整套分析所有问题的必需工具，那么我们的能力将是无所不包的。不幸的是，我们甚至不能面对一位认真的流体工程师，说我们知道流体如何运动。这完全是荒谬可笑的，我们没有这样的能力。目前我们并没有理解数学，虽然我们能够形象地理解对正在发生的事情我们可能有了一个好的想法，但我们完全没有工具来处理这个问题。如果这一思路不能产生那些工具，那么就需要用其他的方法来处理这些问题。有人可能会问：我们是否真正为我们所能干的充分运用了这一方法？我想答案是“不”，我认为格拉斯要说的答案也会是“不”。

格拉斯：我想我们是希望发现新东西的，但我也想引用 Stan Ulam 说过的话，他说：“不要问数学能为生物学做什么，而要问生物学能为数学做什么。”我相信现在已处于这样的阶段，即关于生物学问题思考的焦点或某些焦点，已经对人们在数学中处理

问题的选择产生了影响，并促成了数学研究的几个方向。我想这就是我们所期待的东西。我并不认为，在我从事的工作中，它仅仅是查找某人证明了某个定理或者直接应用它而获了好结果之类的论文。基于研究人员在生物学中的发现，新的问题正在系统化，它也是这类工作的重要方面。

格里博格：关于本次会议中实验人员的事，我想作一点评论，因为这一问题被强烈地提出。我想指出，在我的发言中我用了 $1/3$ 的时间谈论实验，毕肖谈了有关船的倾覆的实验工作，波得林给出了实验结果，Vladimir Keilis-Borok 用它全部发言时间谈实验。在这个讨论中，我还提供了与实验有关的并在一篇实验论文中发表了关于航天飞机的例子。

曼德尔：我想为灾难理论作辩护，不是按照 Christopher Zeeman 所作的或在报纸中报道的那样，而是按数学模拟为其辩护。它使我们可预见和接受这样的事实，即从定性行为来看，由灾难理论开始可得到有限组解法，使用从非常抽象的数学中派生出来的方法，这些解法能应用于实际问题。不论好坏，它所遇到的问题是社会学的而非数学的问题。

费根鲍姆：灾难理论可应用的范围是有限的。这一范围是十分严格地确定了的，超出这一范围灾难理论将不适用。

曼德尔：不，我说的不是那。我是说上帝是乐意接受广泛性的思想的。我认为使人十分惊奇的是，仅仅是给出了维数，一流的科学家们已得到了那么多关于奇异性的信息。我认为在数学发展的长河中，灾难理论的价值不能仅仅因为其过分兜售和跌价而不考虑。灾难理论涉及从纯数学观念到应用工作的转变。如果有误解的危险存在的话，那不是因为灾难理论的表面性，而是因为兜售其应用的伟大的思想。从这种意义上讲，关于什么样的事情

不能去做，它给我们上了很好的一课。所以就奇异性理论而言，我不完全确信你应该把婴儿随洗澡水泼掉。我认为特别是物理学家用了灾难理论作为数学应用失去控制的例子。数学家们不喜欢这点是因为他们认为他们的工作因此而贬值。我这样说，并不是为把灾难理论应用到社会科学、经济学和个性理论。但我确实认为它起着这类共性概念的必要模拟的作用。

费根鲍姆：不管它价值怎样，我认为灾难理论是使物理学家出错的地方，当然，是在具有特定维数的现象的分类上。它陷入到相位的问题和热力材料问题中去了。为什么物理学家们对灾难理论的陈述很少关注呢？大致上是，物理学家对不具有无限维自由度的任何问题不感兴趣。他们对灾难理论基本不感兴趣。如果你听听 Michael Fisher 要说的话，这是一个集体决定，是拒绝灾难理论的所有概念。

另外一个问题关于在社会学应用上的兜售，我觉得没有信心说很多，只是人们本应对此感到怀疑。当然在物理学中我们看到过一到两个真正漂亮的应用。其中一个是对我们在池底看见的光斑和光珠的认识——这绝对是精心之作。

竹内 (Takeuchi)：首先让我讲一讲为什么我变得对非线性模型尤其是混沌感兴趣。作为统计学师和计量经济学师，我曾与许多类型的计量经济学模型打交道——那些用许多方程来表示经济系统的模型，利用这些方程我们能预估参数、预报和分析实际数据。这种方法被广泛地应用了 30 到 40 年，在差不多所有情况下模型本质上是线性的。有些模型据称是非线性的，因而我们不得不应用一些技术按非线性模型来处理它们。这是我对代表计量经济学现状的文章不满意的原因，虽然对我来说非线性模型也经常是不满意的。

我感兴趣的第二个原因与经济学的理论方面有关。数学经济学家们长期以来对证明经济系统的存在与平衡中心感兴趣。他们

尤其对惟一、稳定的平衡感兴趣，所以他们试图证明目前的平衡是稳定的并希望是惟一的。他们非常努力试图发现在某些非常大的经济系统中惟一和稳定的平衡得以建立的条件。对平衡不存在、不稳定或不惟一的系统他们通常不感兴趣。这种方法对我来说似乎太过于空想了，而且与现实的经济系统无关。我的兴趣在于建立稍许满意一些的理论来从经验的观点或者理论的观点处理经济系统中的非线性方面。

甚至在在座的社会科学家和经济学家中，他们所感兴趣的事十分不同，因而他们各自心中的社会系统的数学模型也可能很不相同。关于在我心目中的一个经济系统的独特模型，我想说得更精确一些。我对股市的模型不感兴趣。我感兴趣的是被称为多部门动态宏观经济的模型。

例如考虑某个国家的经济如日本的经济。这种经济包括许多产业：第一产业、第二产业、第三产业、农业、制造、建筑、服务等等。每一个产业每年利用劳动力、资本和其他产业的中间产品如材料和设备等来生产物品。每年生产的东西要么被消费者消耗掉，要么被用作再生产的原料或作为股本，如机器和设备。所有这些可以在一方程组系统中用动态的方式来表示，使得今年的决定在许多方面影响下一年的决定。用这种方法，我们就能编制一种经济的宏观动态多部门的模型。

在这类模型中实际涉及两类方程。一种称为技术方程，它与两国之间的关系由技术来决定，例如汽车的生产需要特定的钢。另一类称为特性方程，它处理消费者对每类消费物品相对价格的反映，当然是在现有收入的限制下。还有几种机构性的方程，例如与政府税收有关的方程。这些方程联立起来可以用来表示一个动力学系统。这种系统的动力特性会是什么呢？当我们同时考虑技术方程和特性方程时，有一些微妙和细微的方面要涉及到。当我们考虑每个部门对相对价格不同变化所采取的行动时，我们发现该系统在某种意义上变得非常不稳定。不一定总是不稳定的，但对相对价格的变化非常敏感，因为如果一个部门在亏损，那个

部门就会减产。但如果那个部门盈利很多，在那个部门就会有投资，产量就会增加。

使我感兴趣的是这类动态经济模型迄今还没有满意的理论分析。最成功的模型是交叉平衡模型，它在理论上是可行的，但确是非常不现实的，所有部门都以相同速率成比例增长。我的兴趣是想知道这一系统是否是一种真正的有可能被描述为混沌的非线性系统。任何社会科学中的数学理论都被认为是对现实的一种粗糙近似，所以我并不认为能够获得充分的描述或基于数学模型的长期预报。所有我们能够做的是对经济机制和其他社会系统有一个相当粗糙的预测或理解。

混沌理论能按经济系统实际运转的那样为我们提供对该系统的更深入理解吗？对我来说好像存在这样的希望，即混沌理论能帮助我们更好的理解经济系统，尤其是阐明其中某些特别有趣和微妙的方面。我们知道经济系统有时是稳定的有时是不稳定的，但经常有强大的力量从明显绝望的境地中恢复。所以我的兴趣是如何和在哪些情况下这种现象会发生，我希望混沌理论能够运用某种动力系统模型解释这些事情。

我也对运用非线性模型来比较不同类型系统的前景感兴趣，希望在那些很不相同的模型中找到相似性。例如，我发现某些生态模型有十分类似于某些社会经济模型的特征。我还想把有关自然环境和自然资源（尤其是那些可更新的资源）的情况结合到这些动态社会模型中去。

费根鲍姆：对那些我想看到事情的进展的方面，我想作一到两点评论。我们应该牢记在心的是，对这种与混沌相联系的数学，目前我们所能理解的情况真的是非常有限。如果我们来看任一稍许大于2的共维分叉，我们就难于处理它们，还有大量开始出现的细节。因而我们可能想知道这是否是一条可继续走下去的正确道路，因为无疑我们想见到在理解这些现象方面的更多进步。如果我们试图去检查和理解给出幂定律的尺度结构的一般情

况（我们知道如何去做这类分析），我们就会看到利用一元函数我们可以做得很好。我们知道如何把它们注入和嵌入到维数高得多的空间中去，但我想说在过去 5 年中，我们出乎意外地几乎没有进步。这种用二维函数做的半分析为我们提供了认识事物的特殊的几何学。但我们想了解的这类问题的数学前景仍是难以捉摸的，我们能有多大的进步仍有待继续观察。

早在观察某些弯曲的二维特性过程中，我们马上认识到了我们对维的理解并不是很好。维包括很多东西，这些对它都是有用的，但维是一个与任何尺度特性完全不相容的概念，很清楚我们需要一个更好的关于维的定义。我们想到的许多应用和数据操作都与维的确定有关：到底有多少个我们要观察的分量实际决定着数据。现有的最好的算法当然是由 Peter Grassberger 和 Itamar Procaccia 给出的算法，但那个算法并不是非常好。我们希望看到有更好的算法出现。

在生物学中我们也很快认识到我们的技术缺点。这些缺点之一是需要很长的数据流。在一个很好的分析中，David Ruelle 或多或少说过你应该用点数的以 10 为底的对数。那就是说如果你有 10^6 个点，你就得到 6。这对应该有什么样的上限给出了很好的概念，并且说明你可以相信用这种分析得出的任何结论。对生物学测量而言这是一个有深远意义的限制，因为我们没有那样长的数据流。我们应仔细思考这样的问题，如果我们同时有多个通道，因而有大量的并行数据可得到，能否利用这些数据在短时间内得到好的分析呢？对各种不同的生物学上的应用这具有决定性的意义。审视一下我们在混沌中了解的和作为工具运用的东西，会清楚地发现有大量悬而未决的领域。问题又是：对如何涉足这些领域我们有什么想法吗？

毕肖：我想知道是否有人愿意说明最有意义的问题是否仍在混沌理论中，并特别指出它们在其他专业中具有的意义。

如勒：说动力系统理论运用到物理系统中仅限于低维是不真实的。它很大程度上决定于你能不能控制该系统的方程。所以，例如，在气象学中你对基本方程有很好的理解，因而你能处理的决不是小维数的系统。对天文学同样是这样，这里我们对基本方程有极好的理解，因而我们能够做那些仅用实验观察不可能做的事情。所以，在应用动力系统理论到物理系统方面已经有了进步及结果，因为这里我们能更好地控制这些系统的方程。这不是不合理的主张。你所有的是一个复杂和并不十分理解的系统。通过处理相对短的时间序列，关于基本方程是什么你能得到更好的概念，并且当你确信你已对基本方程有较好了解时，你可把它们放到计算机中去分析它们。这可用最朴实的方式来完成，虽然我们仍没有基本理解其中的振荡是怎么回事的。通过分析这些振荡，我们现在有了一个可产生振荡行为并能预报的模型动力系统。

麦耶-克里斯：我想有一点就我所知到目前为止还没有讨论过，即你还能运用混沌系统模型的观察和重建来影响系统，然后观察该系统对来自模型的冲击产生的响应，看模型在控制该系统方面做得怎样。运用混沌系统来控制复杂系统的这一大的领域，我认为在将来是很有潜力的，目前正在被研究，尤其是在伊利诺斯大学。

格拉斯：问题是“在混沌系统中什么是必需的？”。在我从事生物学研究的年代里，有一件事可能具有巨大的价值。如果有一个可操作的检验来决定一个系统是决定性的还是非决定性的，那将是极好的事情。那可以节省每个人大量的时间，但这是一个与求其维数或功率谱不同的问题。

费根鲍姆：你能肯定那是一个不同的问题吗？如果你能得到一个说明维数是 3.7 的十分规则的幂次律，这个问题就解决了。

格拉斯：或许可能，但在生物学中曾作过这一工作的人极少能得到十分规则的幂次律。他们得到 3.7，但不是在与洛伦兹系统或其他有 200 000 个点精确到 10^{-14} 的系统有相同尺度量级的区域内得到的。

费根鲍姆：我完全同意你的观点。那就是我所说的有关利用并行数据流。从观察在生物学中的应用可清楚地看到我们需要较高质量的数据。

毕肖：我同意你说的。来自生物学中系统的数据从来是不清晰的，这使得应用非常困难。

竹内：在经济学中的数据甚至比生物学中的数据更不清楚。所以我认为，在经济学和其他社会科学中，在同一套数据的基础上我们可建立各种各样的模型，因而对模型的形式有很宽的选择范围。所以我认为甚至对非线性模型，我们既可以选择非混沌模型也可以选择混沌模型。如果这种选择不是数据的类型强加给我们，而是选择运用混沌模型，我认为混沌模型的好处是它能提供对经济系统及其运转方式的更深入和有用的理解。原因之一是政治方面的而且与制定政策有关，这样某些政策在不同的情况下会导致不同的结果。有些政策可能是有益的和可以获利的，有些则不然。在某些情况下，政策的细微改变可能会是灾难性的，这样的现象我想能用混沌模型来解释。

艾哈拉 (Aihara)：从神经生理学的观点来看，我有几点评论。大脑是一个具有巨大自由度数的十分高维数的系统，而且包含着非常复杂的相互作用。观察单一的相互作用，选取一个具有极低维数易于处理的元素后，我们就可以分析这些相互作用的动力学。为了认识大脑，我们必须分析一个由 100 亿个这类混沌元素或次系统组成的功能网络。必须要用特殊的工具来分析具有这

样高维数的系统。

费根鲍姆：关于这点是毫无疑问的。当然，可能会被证明一个有 100 亿个元素的系统实际上具有的维数是远小于 100 亿的，而且定会小于神经细胞的总数，但引人注目的问题依然存在。问题变为：我们能否将现有的工具精细化，或者，如果这一整套想法不合适的话，我们能否学会开发新的工具。

波得林：在 Yoichiro Takeuchi 的论述中似乎隐含这样的意思，即在经济政策分析中，与线性分析技术相反，非线性分析技术的运用可能会证明同样的政策会有不同的影响和不同的结局。我很想要有一个这样的例子，因为这一事情在我处理过的所有模型中从没有被发现过。一种或另一种政策的影响从技术上讲决定于模型的结构和建立这一模型时所作的经济学假定，但决不取决于分析技术的类型或描述的形式。所以如果你有这样的例子的话，我很想看到这样的例子。

竹内：我没有引用我们所观察到的例子，但我想你会同意我这样的观点，即类似的驱动力在不同的情况下有时会产生很不同的影响。所以如果有可能把一种模型运用到不同的情况中来解释不同结果，它将帮助我们理解该经济系统以及经济驱动力如何起作用。

阚里柯 (Kaneko)：Leon Glass 关于物理学家的缺点作了评论，但我认为它主要与西方的物理学家有关。我说这一点的原因是 Mitchell Feigenbaum 提到的普遍性只是数量上的普遍性。这把应用只限制在诸如湍流这样的概念上。但东方的物理学家们能够处理复杂的系统如事物的复杂性，因而能研究真正复杂系统中定性的普遍性。这正是我们走进超高维混沌系统如生物学系统时所必需的。

谢里：除了所描述过的那些在医学领域的应用外，还有谁能想象一下在不久的将来混沌的实际应用吗？在实际应用方面，是否还有我们可以期望的其他应用呢？

我还有一个更哲学性的问题。我们正在讨论确定性混沌。但确定性基本上是简化论的概念，而混沌是一个更整体性的概念。我们是否把混沌的发展看成是加强那种能使我们更有效地处理更大范围内的现象的简化论方法呢？或者混沌的研究最终将导致增强整体性方法，这种方法将帮助我们更直接地处理复杂性吗？

裴克多：至于最近的应用，它们已经开始了，但不是在商业上的。它们较多的出现在工业和造船业。

毕肖：确是这样。大学里的人不那么倾向于商业，但有许多业已设计的和将来会想象到的商业方面的东西。目前为止我们看到的这一方面的大多数工作是处理避免混沌的问题，而不是混沌的实际应用。但我想在将来会有更多的利用混沌的应用。

格里博格：我想我已经提到了几个应用。关于混合问题又是怎样的呢？在化学工业它已经得到了十分有效的研究。如果你想让反应剂有效地发生反应，你必须保证有效的混合，而混沌由于拉伸和折合它能提供这一点。这是一个被研究很多，而且很有效地已将混沌运用其中的问题。

我还想提一下有关热核聚变的老例子。如果微波能量从等离子体外部引入，微波将在等离子体的特定地点聚集其能量，而你想要的是均匀地加热等离子体。因而你就要将混沌特性加到辐射之中。

另一个在将来我们预期会有重要应用的是混沌的控制，我想控制的途径是利用混沌吸引子来获得对参数空间的很大区域的接近。当你设计一个如一个参数值固定的化学反应器的系统，你就

能稳定这一空间的不同区域。

竹内：我的哲学问题是：混沌理论与随机理论的之间的关系是什么？可能存在随机的混沌吗？即行为由随机法则控制又结合有混沌的特性。存在这种可能性吗？

如勒：我想这在某种程度上是一个语义学的问题。随机变量是种根据某种几率分布以随机方式变化的量。你能运用混沌的动力系来创造随机变量。其中一个是另一个的特殊情况。

曼德尔：有一位数学家，名叫 David Knowshim，在德国布莱梅，我相信是在 Ludwig Arnold 学院，目前正在从事动力系统中的随机微分方程的研究，并运用了足够的样本，因而有一种体系上的结合。

斯贝朗扎 (Speranza)：我认为现在有必要提及这样的事实，即随机扰动的动力系统的理论已由 Haken 于 1972 年在一篇文章中发表。也许，你所指的是噪声应看成是外部的还是内部的。这不是一个语义学的问题。你使用随机噪声以便重现某种统计特性，这种统计特性是用由许多模式在较大的系统中产生的。在这种情况下，这模式是在系统内部的。

竹内：我指的是在某些随机过程中形成的那种内部不确定性和不可预测性。对我来说，混沌似乎是比较随机的一个概念。

斯贝朗扎：不管如何，我们已有一个相当好的随机扰动动力系统的理论。我们可以在此基础上工作，有时它确是迈向获得同样统计特性的第一步。

费根鲍姆：我想这个小组讨论已经结束了，感谢各位的参加。

开 幕 词

联合国大学校长，Heitor Gurgulino de Souza

各位与会者、尊敬的客人和观察员，欢迎参加关于“混沌对科学和社会的冲击”的国际研讨会。本次会议是联合国大学计划的有关“科学和技术前沿”一系列新的活动的第一个会议。

联合国大学的宪章要求我们“对社会科学、人文学科以及自然科学（包括纯粹的和应用的）给予应有的重视”。然而很少有机会像今后3天的会议这样将所有这些领域的代表聚集在一起。

联合国大学是在1969年时任联合国秘书长的吴丹先生(Uthant)建议下，于1975年成立的一所年轻的学院，大学中心位于东京。它的设计企图是真正国际性的并且致力于世界的和平与进步。然而为了调动国际学术资源，需要一种全新的学术机构。因此，今日的联合国大学的活动不局限于在大学的中心东京这里，而是通过世界范围的学者网络，通过位于赫尔辛基、马斯特里赫特、内罗毕、澳门、加拉加斯的“研究与培训中心和计划”，还有世界各地的尤其是临近东京总部的“高等研究院”来实现其目标。

联合国大学的“研究和研究生培训项目”致力于全球性问题及其在世界范围的影响。因而全球环境的改变、第三世界的发展、科学和技术的跨国联系以及不断增长的超大城市的管理都在我们的注意目标内。对这些问题复杂性的认识需要多学科的和新的科学方法、复杂的模型、新的思考和观察自然及社会环境的方法。正如在本次会议中将要显示的，“混沌”的概念在许多学科中已变成这种新的思想的一部分。

本次研讨会的目的是探索混沌这门新出现的科学对不同学科的冲击及由此对科学和社会产生的更广泛的影响。因而关注的焦点不是在混沌的技术方面，而是其广泛的关联性。混沌的特征是

它的广泛性和它的无处不在。例如，在本次会议上，我们有代表数学、物理、生物、地球物理学、地球生理学、天文学、医学、心理学、气象学、工程、计算机科学、经济学和社会科学的学者们。在我的印象中只有极少几次能有这么多不同学科在一次学术会议上聚在一起。其中之一是1984年我们与 Ilya Prigogine 和其他人在蒙彼利埃 (Montpellier) 举办的“复杂性的科学与应用”研讨会，它为本次会议起了先导作用。

当然，有这么多学科聚在一起就会有这样的风险，即我们不总是能够说同一种语言，尽管我们都是为着谈论“混沌”而来。但是我认为在寻求新的思想和科学途径时我们不得不冒这个险。在我们这个复杂的世界中，并非每一件事情都是可以计算和预测的。果真那样，那将不会有创造的余地了。

本次会议对联合国大学来说是一个试验，有些不同于我们通常组织的那类全球关心的非常具体的问题的会议。举办像这样一个实验论坛是为我们“科学和技术的前沿”新的研讨系列打个基础。

我要感谢我们的合作组织者——东京大学给我们的支持，尤其感谢校长有马明人 (Akito Arima) 教授从一开始对这一想法的支持和提供的设备，感谢数学工程和信息物理系的阿里俊一 (Shun-ichi Amari) 教授，他的支持对本次会议的召开至关重要。我还要感谢从我们的国际顾问马里兰大学的 Celso Grebogi 教授 (他今天已来到这里) 和 James Yorke 教授得到的支持。他们俩的艰巨任务是把本次会议上发表的来自不同科学专业的对混沌的不同研究编在一本书中，作为我们会议的成果出版。

我确信你们3天的接触将加强你们间业已存在的联系，为首次见面的人提供在将来会发展的联系。最后我希望你们能够熟悉联合国大学，在今后一如既往地支持我们共同的协会。在把发言权交给我们的主持人有马 (Arima) 教授之前，我祝你们会议成功。在小组工作讨论的间隙、在今晚的为特邀演讲人举行的招待会上我希望能够同你们个别交谈。

感谢各位的参加。

原著作者名单

1. Kazuyuki Aihara, 东京, 东京大学, 工学院, 数学工程与信息物理系
2. Steven R. Bishop, 伦敦, 伦敦大学学院, 非线性动力学及其应用中心
3. Michele Boldrin, 马德里, 马德里卡洛斯三世大学, 经济系
4. David K. Campbell, 耳邦纳市 (Urbana), 伊利诺斯大学, 物理系
5. 丁明洲 (Mingzhou Ding), 博卡雷顿 (Boca Raton), 佛罗里达大西洋大学, 复杂系统中心与数学系
6. Mitchell J. Feigenbaum, 纽约, 洛克菲勒大学, 物理系
7. Leon Glass, 蒙特利尔, 麦克吉尔大学, 生理学系
8. Celso Grebogi, 马里兰, 学院公园, 马里兰大学, 数学系
9. 郝柏林, 北京, 理论物理研究所
10. Kensuke Ikeda, 草津, 立命馆大学, 科学与工程学院, 物理系
11. Kunihiro Kaneko, 东京, 东京大学, 艺术与科学学院, 纯科学与应用科学系
12. V. I. Keilis-Borok, 莫斯科, 国际地震预报理论和数学地球物理研究所, 俄罗斯科学院
13. Bruce E. Kendall, 圣他巴巴拉, 圣他巴巴拉加洲大学, 生态分析与综合中心
14. Arnold J. Mandell, 博卡雷顿, 佛罗里达大西洋大学, 数学系
15. Gottfried Meyer-Kress, 耳邦纳, 伊利诺斯大学, 贝克门研究所, 复杂系统中心
16. Renate Mayntz, 科隆, 马克思-勃兰克研究所
17. Lars F. Olsen, 欧登塞, 欧登塞大学, 生物化学研究所
18. David Pierre Ruelle, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Bures-sur-Yvette
19. W. M. Schaffer, 图森, 亚利桑那大学, 生态与进化生物学系
20. Karen A. Selz, 博卡雷顿, 佛罗里达大西洋大学, 心理学家, 实验与结构数学实验室
21. Antonio Speranza, Presidenza del Consiglio dei Ministri, Dipartimento per i servizi tecnici nazionali, Roma

- 22. C. W. Tidd, 图森, 亚利桑那大学, 生态学与进化生物学系
- 23. Yorshisuke Ueda, 京都, 京都大学, 电气工程系
- 24. James A. Yorke, 马里兰, 学院公园, 马里兰大学, 数学系与物理科学
和技术研究所
- 25. 刘式达, 北京, 北京大学, 地球物理系

索引

- Abe, Minoru 326, 333, 336, 337
声学空化 133
适应性系统 21, 58
适应性变换 (在社会系统中) 313
老化, 对脑电图模式的影响 85
总涨落 (经济中的) 274
 建模 274
Akamatsu, Norio 338, 339, 340
算法 6, 225, 383 ~ 384
Allen-Schaffer 模型, 灭绝概率 193
模拟计算, 非线性振荡 323 ~ 333
Anderson 局域化 (电子的) 151
 破坏中的噪声效应 153
Anosov 系统 8
人类的预期能力 311
面积守恒映射 11
亚美尼亚地震 [1988] 249
军备竞赛模型 24, 38 ~ 44
 三国 Richardson 型模型 43 ~ 44
 二国 Richardson 型模型
 具有全球资源限制 42
 具有有限资源响应 41
 简单逻辑斯蒂模型 40 ~ 41
 战略防御主动模型 42 ~ 43
 另见 Richardson 型模型
“阿诺德” 舌头 67, 68
人工智能 (AI) 技术 45
人工神经网络, 混沌中 115 ~ 117
人工神经计算 106, 117
 占星术, 科学家的态度 371 ~ 372
 天文学, 和混沌理论 373, 393
 异步振荡 325
 大气环流模型 239
 大气流动方程 231
 第一解 232
 处理方法 240
Aubry-Mather 集合 12
自治系统, 术语的意义 94
繁殖 [自行再生产] 303
 在社会学中的应用 304, 307
自回归限制异方差模型 282
公理 A 吸引子 96
 与洛伦茨吸引子比较 96
公理 A 系统 11
 各态历经理论应用 98 ~ 99
平衡十字 [经济] 模型 392
巴尔的摩县 [美国], 麻疹流行病
 数据 196, 197
破产 315
斜压不稳定性 232
吸引盆 23, 33
 边界 9, 22, 33, 52, 266
 在种群动力学中 192, 193, 194
 和船舶运动研究 264 ~ 266
 大小 191, 203
 另见势井
拍频振荡 325, 344
Belousov-Zhabotinskii 反应 133

- 分岔图
 - 大气环流模型 239
 - 离散时间逻辑斯蒂方程 34
 - 麻疹流行病学模型 195
 - 镶嵌种群模型 189, 190
 - 神经元模型 112
- 分岔 235
 - 例子 21, 30, 31, 52, 97
 - 术语的意义 21, 52, 97
- 生物学网络 171
 - 中的同质混沌 181, 182
- 生物学, 和混沌理论 186 ~ 205
- Birkhoff, G. D. 2, 233
- 波尔兹曼常数 140
- 大脑
 - 电活动的混沌性质 63 ~ 72, 115
 - 创造性解/突破性发现 44, 45
 - 信息记忆极限 54
 - 问题求解极限 45
 - 空间功能对称 62
 - 另见脑电图 (EEG) 模型
- 脑干
 - 神经元放电方式, 确定性的和随机模型 74 ~ 78
 - 网状形式细胞 75
 - 老化损失 85
- 脑干神经元 74
 - 放电/触发率 74
 - 脑电图的噪声驱动 74
 - 峰间信号间隔的时间序列数据 76
 - 等级范围 76, 81
- Brock-Dechert-Scheinkman(BDS)试验 283
- Brookhaven 国家实验室 (BNL), 混沌研究档案馆 346 ~ 348
- 布朗运动 138
- 官僚政治机构, 适应性变化 313
- 商业周期
 - 渐近特性 281
 - 模型 274
- 蝴蝶效应 38, 135
- 计算的必要性 128
- 加利福尼亚 [Loma Prieta] 地震 [1989] 249, 251
- 康托尔集 12
- 容量维数 5
- 心脏心律不齐抑制试验(CAST) 224
- 心脏心律不齐 385
 - 非线性动力学 222 ~ 224
- 心病学 221 ~ 226
- 承受能力 28
- Cartwright-Littlewood Van der Pol 系统 67
- 猫视觉皮质, 振荡现象 115
- 灾变理论 21, 300, 378, 387, 388
 - 应用 300 ~ 301, 387, 388, 389
- 灾变, 原因 315
- 天体力学 254
- 单元映射 266
- 细胞自动机 172
 - 在地震研究中 246, 247
 - 在人口研究中 49
- 混沌
 - 选择术语 323
 - 回避 396
 - 危机道路 7
 - 首次发现 94
 - 首次用的术语 219

- 作为仪器 379, 381
- 阵发道路 7
- 和数学 93 ~ 103, 373, 375, 379
- 术语的意义 194, 219, 302, 323
- 引入歧途的主张 373
- 术语的非技术用法 219, 374
- 倍周期道路 7, 31
- 周期性 194 ~ 205
- 在物理系统中 8 ~ 10
- 量子抑制 146 ~ 152
 - 噪声效应 153 ~ 154
- 拟周期道路 7
- 道路 7 - 8
 - 物理观察 8, 33, 38
- 标准模型 172, 173
- 的抑制 146 ~ 152
 - 和模式选择 174
- 的显示 49, 257, 261, 347, 374
- 混沌吸引子 256 ~ 257
 - 例子 257, 347
 - 存在性未证明 3
 - 和同宿点 8
 - 另见奇怪吸引子
- 混沌扩散 151 ~ 152
 - 量子抑制的噪声效应 153
- 混沌动力学
 - 应用 76 ~ 77
 - 和军备竞赛模型 38 ~ 44
 - 与量子力学相对的经典力学 143
 - 和经济理论 274
 - 经验研究 281 ~ 284
 - 阻碍混沌 276 ~ 281
 - 理论研究 284 ~ 289
- 例子
 - 在生物系统中 187
 - 在工程中 255
 - 总的看法 1 ~ 14
 - 在生理系统中 220 ~ 221
 - 和天气预测 35 ~ 38, 234
- 混沌单元网络 177 ~ 180
 - 应用 180
- 心律紊乱, 术语的医学 218
- 用法
 - 混沌巡回 180
 - 混沌振荡 325
 - 混沌瞬变 3
 - 在工程中 264 ~ 271
 - 另见瞬变周期性
 - 混沌行波 174 ~ 175
 - Charney, Jule 232, 355
 - 化学工业应用 396
 - 化学反应, 动力学的 126
 - 经典混沌动力学 142 ~ 143
 - 和量子力学 143 ~ 144
 - 理论桥接 165 ~ 167
 - 复原
 - 需要的外部激励 145, 152
 - 恢复混沌的内在性质 157 ~ 158
 - 自恢复 145, 155 ~ 157
 - 另见半经典理论
 - 经典文化, 瓦解的社会原因 314
 - 经典各态遍历
 - 相对量子各态遍历 148 ~ 150
 - 恢复 152 ~ 158
 - 气候模拟, 对照天气预报 234
 - 解析模型, 放弃 378 ~ 379

- 成团 178, 179
- Cobb-Douglas 形式的生产函数 280
- 认知理论 306
- 相干
 - 在脑电图模式中 73
 - 和神经元的数目 180
- 集体社会行为 310
- 商业应用 396 ~ 397
- 补偿机制, 在社会系统中 312
- 完全稳定固定点 336 ~ 337
 - 吸引域 341
 - 例子 339 ~ 340
- 复杂性丧失, 在疾病状态 61
- 压缩的频谱束 70
 - 例子 [脑电图] 70, 84
- 计算工具 49 ~ 51
- 计算机游戏 49, 54
- 计算机舍入误差, 影响 10 ~ 11, 32
- 计算机技术 9
- 使用的理论研究 323 ~ 328, 331
- 计算机辅助政治学 25, 49
- 凝聚态物理 126
- 知觉状态
 - 脑电图频率带 63
 - 波动的同步 82
- 保守系统, 混沌在 23, 131
- 连续逻辑斯蒂动力学 28 ~ 29
- 控制技术 47 ~ 48
 - 另见反馈机制
- 关联维数 6
 - 应用 61, 282, 284
 - 使用的 BDS 试验 282
- 皮质-皮质路径 73
- 偶合映射格子 (CML) 173, 174
- 危机事件
 - 在军备竞赛模型中 41
 - 术语的意义 35
 - 在麻疹流行数据中 194, 195
- 危机道路到混沌 7
 - 物理观察 8
- 临界动力学 134
- Dalzell 定理 66
- Day [经济] 增长模型 279
 - 应用的借贷约束 289
- d 维测度 4
- 无驱势, 经济数据 276, 277
- Denjoy 定理 66
- 状态密度 144
- 确定论 130, 396
 - 和概率论 131
- 确定性混沌 22 ~ 23
 - 特性 32, 52, 396
 - 作为定义的测度 222
 - 和生理波动 219, 225
 - 和社会学 301
- 确定性非周期运动, 混沌被描述为 194
- 确定性的可预测时间
- 底特律 [美国], 麻疹流行数据 196
- 扩散, 混沌的 151
- 扩散模型, 应用到社会行为 300
- 不连续性, 社会系统 311
- 离散逻辑斯蒂动力学 29 ~ 35
- 疾病状态, 复杂性丧失 61
- 色散关系 [脑电波的] 72
- 耗散试验 160 ~ 161
- 耗散系统, 混沌在 23, 130, 234

- 驱动摆
 - 混沌吸引子确定 258, 261
 - 运动方程 258
 - 势井 258 ~ 260
- Duffing 方程 2, 258
 - 周期解的振幅特性曲线
 - 非零阻力系数 328 ~ 331, 334
 - 零阻力系数 328, 331
 - 初始条件区域 326
- 动力学规划, 经济学优化 285
- 化学反应动力学 126
- 动态疾病 218 ~ 226
- 动力系统 233
 - 理论应用到物理系统 375, 393
 - 计算机绘图 380
 - 术语的意义 94
 - 和结构稳定性 9
- 动态 Zeta 函数 101 ~ 102
- 多震断层, 和非线性动力学 242
- 地震 354
 - 原因 241
 - 模型化 246 ~ 247, 261
 - 每年的次数 241
 - 预报 48, 248 ~ 252
- 生态学模型 191
- 计量经济学模拟 274
- 经济学数据
 - 因次性方面 277 ~ 278
 - 缺少基本的不变映射 277
 - 非平稳性 276 ~ 277
 - 不可靠性 277, 394
- 经济理论
 - 和混沌动力学 177, 274
- 经验研究 281 ~ 284
- 阻碍混沌 276 ~ 281
- 理论研究 284 ~ 289, 389
- 混沌边沿 18, 48
- 脑电图 (EEG)
 - Einstein-Brillouin-Keller 量子化条件 144
- 弹性碰撞硬球系统 12
- 心电图(ECG)模式, 心脏心律不齐 222
- 脑电图 (EEG) 模式
 - 特征性的频率带 64
 - 压缩的频谱束 70
 - 整体非线性振子 64 ~ 71
 - 氟烷影响 63
 - 缺乏稳定性 70
 - 例子 70
 - 锂影响 84 ~ 85
 - 测量方法 206
 - 新皮质区 71, 74
 - 拟周期性 66, 67, 81
 - 和单个神经元动力学 83
 - 临床例子 83 ~ 86
 - 空间相干必要 78
 - 作为奇怪吸引子 60 ~ 69, 86
 - 安定型药物影响 70
 - 波力学 73
- 突发特性[自组织结构的] 20 ~ 21
- 内在循环假设[经济中]的 275
- 工程应用 254 ~ 271, 372 ~ 373
- 熵 3, 134, 234
- 环境问题
 - 所考虑的分岔 21, 52
 - 提出的混沌控制方法 47 ~ 48
 - 全球变化的动力学模型 51

- 模拟的极限 23
- 另见温室效应
- 流行病学研究
 - 心脏病死亡 222
 - 儿童疾病 195 ~ 200
- 癫痫 201 ~ 205
 - 抗发病的药物治疗 204
 - 脑监测/刺激疗法 204, 205
 - 分类 206
 - 动力学解释 202
 - 脑电图模式 202
 - 预映像 204
- 偶发繁殖, 人口动力学 29
- 平衡态统计力学 99
- 遍历理论 6, 95
 - 微分动力系统
 - 公理 A 系统 98 ~ 99
 - 一般系统 100
- 各态遍历性, 经典与量子比较 148
- 误差增长分析 233, 238
- 进化模型 181
 - 应用例子 181 ~ 182
- 进化系统 48
- 实验数学 380
- 实验研究
 - 分类 132
 - 早期研究 9, 95 ~ 96
 - 观察 384, 388
 - 船舶运动 256 ~ 258
 - 使用的系统 9 ~ 10
- 指数增长 25 ~ 28
- 灭绝概率 193
- 断层带 [在岩石圈中的] 242
 - 流体渗透造成的不稳定性 243
- 繁殖率, 对人口增长的影响 26
- 反馈机制 47
 - 在生物学中 187
- 耦合的急冲转子 155 ~ 156
 - 受其影响的心率波动 225 ~ 226
- 在社会政治政策中 47
- Feigenbaum (费根鲍姆) 分岔 97
- Feigenbaum (费根鲍姆) 普适常数 10
- 金融数据, 非平稳性 179
- 有限性, 作为基本原则 139
- 闪噪声 177
- Floquet (弗洛凯) 乘子 236
- 流体动力学, 在气候模拟中 354
- 流体
 - 渗透到岩石圈 243, 245
 - 湍流的发生 9, 23, 62, 95
- 强迫耗散系统, 正测度集 68
- 强迫非线性振荡系统 257, 325
- 预报应用 46 ~ 47
- 前视假设 [在经济模型中] 279
- 分形盆 [吸引子的] 266 ~ 269
- 分形集合 4, 33
 - 维数 4, 38
 - 多重分形 6
- 频率诱导 323
- 频率 (功率) 谱
 - 脑电图模式 73, 74, 76
 - 拟周期系统 68
- 频率变换 134
- 冻结混沌 174, 176
- 充分发展的时-空混沌 (FDSTC) 175
- 广义自回归限制异方差 (GARCH)

- 模型 282, 283, 284
- 遗传算法 45 ~ 46
- 最短流, 在负曲率的流形上 94
- 几何洛伦茨 (Lorenz) 吸引子 96
- 几何理论, 在应用力学中 255 ~ 261
- Gleick, James 350
- 整体性质 233
- 整体耦合动力学 178
- 整体耦合映射 (GCM) 178
 - 世界图 51
- 控制势能函数 258
 - 另见势井
- Grassberger-Procaccia 算法 217, 384
- 掘墓人模型 [卡尔 马克思] 315
- 温室效应 21, 52
 - 影响因子 20
- 格里菲思 (Griffith) 准则 243
- Gutenberg [震级] 定律 247, 248
- Gutzwiller 的半经典理论 144
- Gutzwiller 的轨迹公式 166
- GZ 曲线 258
- Hadamard, Jacques 94
- Hadley 环流 235
- 哈肯 (Haken) 的协同学 303
- 氟烷, 受其影响的脑电图模式 63
- 哈密顿系统 11 ~ 12, 150
- 豪斯多夫 (Hausdorff) 维数 4
- Hayashi, Chihiro 323
 - McGraw-Hill 图书 328, 333
 - 个人特征 348 ~ 350
 - 混沌概念的否定 345
 - 退休 346
 - 在美国作为访问教授 335
- 心率易变性
 - 和确定性混沌 226
 - 影响因子 226
- 心脏节律
 - 正常节律 222
 - 另见心脏心律不齐, 过早心室收缩 (PVC)
- 埃农 (Hénon) 映射 2, 101
 - 轨道阴影 11
- 异宿点 336
 - 另见同宿点
- 高维混沌 171 ~ 182
 - 作为统计力学的基础 177
 - 神经信息处理 180 ~ 181
- 海马神经元, 锂的影响 83, 84
- Hiraoka, Susumu 323
- 历史发展, 影响因子
- Hodgkin-Huxley 方程 60, 81, 107
 - 获得的混沌振荡 109
 - 获得的回归映射 112
- Hölder 连续性 65
- 同质混沌 181
 - 在生态学中的例子 181 ~ 182
- 同宿点 2
 - 和混沌吸引子 8
 - 另见异宿点
- 同宿缠绕 226
 - 吸引盆域的侵蚀 268
- 霍普夫 (Hopf) 分岔 97, 235, 236
- 霍普夫 [水动力学湍流的] 朗道 (Hopf-Landau) 理论 98
- 马蹄映射 2, 147
 - 和符号动力学 13

- 水动力学湍流 9, 23, 62, 95
- 双曲系统 100
 - 另见公理 A 系统, 洛伦茨吸引子
- 超混沌 175
- 超循环概念 303
- 现实的理想化 382
- Ikegami-Kaneko 演化模型 181, 182
- 惯性流形 10
- 信息维数 6
- 信息熵 3
- 信息处理, 和确定性混沌 117
- 社会系统的信息开放特性 307
- 初始条件, 对其敏感性 21, 22
- Inoue, Yoshiaki 346
- 不稳定性, 自组织 154 ~ 156
- 完整性 [工程] 消失 271
 - 和同宿缠绕 270
- 智能传输工艺 53
- 交互式软件 49 ~ 51
- 互相依赖
 - 社会系统, 一个因素变化的影响 314
 - 技术社会系统, 和灾变的原因 315
- 阵发 7, 35
 - 通向混沌的道路 7
 - 物理观察 8
- 阵发混沌 35
- 不可逆性, 作为起源的量子混沌 145 ~ 146
- 突入式间歇现象 198, 201
 - 作为癫痫模型 202
- 日本吸引子 347
 - 首次遭遇 331, 348
 - 首次使用的术语 346
- Josephson 结 133, 171, 178
- KAM 见 Kolmogorov-Arnold-Moser
- Kawakami, Hiroshi 335, 339, 351
- KDC-I 计算机 334
- 急冲转子 149
 - 耦合 155 ~ 157
 - 对扩散常数的噪声效应 153
- Kolmogorov, A.N., 容量维 5
- Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM)
 - 曲线 143
- KAM 稳定性定律 12
- KAM 环 149, 177
- Kolmogorov 流 (K 流) 139
- Kuramitsu, Masami 334, 340, 351
- Kuwahara, Michiyoshi 341 ~ 342
- 京都大学
 - 工程系 323, 333, 346, 349
 - 数学科学研究所 343
- 朗道-霍普夫 [水动力学湍流的]
 - (Landau-Hopf) 理论 62, 98
- 语言能力, 神经网络 116 ~ 117
- Laplace, Pierre Simon 22
- 大数定律, 崩溃 139, 179
- 大社会技术系统, 事故的原因 315
- Lebesgue 测度 4, 99, 100
- 李天岩 (Li Tien-Yien), 被引述 350
- 光吸收
 - 量子混沌诱导 160
 - 模拟 161 ~ 166
 - 传统理论 160
- 极限环行为 2, 30, 35, 197, 235
 - 例子 195, 197
- 线性性, 术语的意义 127

- Lipschitz 常数 65
- 锂, 对脑电图模式的影响 83, 84
- 岩石圈
 - 作为地震研究中的“黑箱” 248
 - 不稳定性机制 243 ~ 246
- 耳垂动力学 261
- 局部特性 234
- 局部化现象 145, 150, 152
- 局部去甲肾上腺素能神经元
 - 放电/触发率 74
 - 细胞数 74
 - 峰间间隙时间序列数据 76
 - 等级范围 76, 81
 - 统计密度分布 80
- 逻辑斯蒂 (Logistic) 动力学
 - 连续时间 28 ~ 29
 - 离散时间 29 ~ 35
- 逻辑斯蒂映射 31, 34, 187, 190
 - 作为倍角正弦函数公式的平方 31
- 洛伦茨, Edward 35, 135, 231, 233
- 洛伦茨模型/方程 24, 35 ~ 38, 135
 - 计算机模拟 8, 95, 96
 - 应用的符号动力学
- 洛伦茨 [奇怪] 吸引子 37, 96
 - 轨线弯曲 248
 - 分形维 38
 - 几何图形的 96
 - 投影到 X-Z 平面 37
 - 另见混沌吸引子, 奇怪吸引子
- 低维混沌
 - 嵌入到其他高维系统 10, 382
 - 自然中的例子 172
 - 发生原因 171, 172
 - 由实验数据重构动力学 177
 - 另见高维混沌
- 低维系统 10, 172, 234, 235
- 李雅普诺夫维 (Lyapunov) 6, 134
- 李雅普诺夫指数 6, 147, 158
 - 在气候模拟中 240
 - 在确定混沌中 192, 217, 221
 - 在计量经济学模型中 283
 - 在神经元模型中 114
- 机器学习, 用于优化解 44 ~ 46
- 宏观经济模型 390
- 宏观世界, 复杂性 144
- 马尔萨斯 (Malthusian) [人口] 动力学 25 ~ 28
 - 增长极限 28
- 市场完整 (在经济模型中) 279
- 市场逻辑, 控制的社会情况 311
- Markov 分隔 98
- 数学图表理论, 应用于社会学 299
- 数学模拟
 - 应用于社会现象 305
 - 生态学的极限/社会政治问题 20
 - 受限的可能情况的识别 21
- 数学
 - 和混沌理论 93 ~ 103, 373, 375
 - 外行的看法 376, 380
 - 与物理学的关系 93, 95
- 最大有限不变域, 例子 337
- May 的生态学模型 189
- 麻疹流行 194 ~ 200
- 混沌的测量 3 ~ 6, 221
- 测量 3 ~ 4
- 医学科学 218 ~ 226

- 镶嵌种群理论 189
- 气象学 231 ~ 232, 393
 - 另见天气预报
- 测量熵 4
- 微观 - 宏观关系 308 ~ 310
- 微波电离 133
- 中纬度极圈射流模型 234 ~ 238
- 混合 [流体] 396
- 模式锁定 66
- 模型
 - 军备竞赛 24, 38 ~ 44
 - 大气环流气候 238
 - 自回归限制异方差 (ARCH)
 - Day [经济] 增长模型
 - 地震发生 246 ~ 247
 - 生态学的 189
 - 经济学的 390, 391, 282
 - 演化 181 ~ 182
 - 广义自回归限制异方差(GARCH) 282
 - 全球环境变化 51, 52
 - 中纬度极圈射流
 - 神经元动力学 78 ~ 80, 107, 110
 - 重复产生 (OLG) 289
 - Ruelle-Takens-Newhouse 62
 - 季节强迫 SEIR 方程 195
 - 社会的 298 ~ 299
 - Solow [经济] 增长模型 280
- 多重分形 6
- 多区动态宏观经济学模型 390
- Murakami, Toshiaki 326
- 自然灾害
 - 花费在预防的经费 375
 - 另见地震
- 自然测度 5, 98
- 自然科学理论
 - 和社会学
 - 间接理论转换 306
 - 理论的隐喻使用 305 ~ 306
 - 理论转换 304 ~ 305
- 纳维 - 斯托克斯 (Navier-Stokes)
 - 方程 97
- 新皮质, 柱状组织 73
- 新皮质区域, 产生的脑电图信号 73
- 神经膜, 混沌动力学 107 ~ 112
- 神经信息处理, 和高维混沌 180
- 神经网络
 - 人工的 45, 106, 115 ~ 117
 - 联合动力学 118
 - 生物学的 112 ~ 115, 177
 - 语言能力 116 ~ 117
- 神经计算 106 ~ 107, 117
- 神经元动力学 78 ~ 80
 - 和脑电图模式 80
 - 临床例子 83
 - 在其中的噪声 81 ~ 83
- 神经元模型 81
 - 电子电路模型 112
 - 奇怪吸引子 115
 - 数学模型 107, 110 ~ 112, 394
 - 一维映射 111
- 神经放电模式
 - 确定性模型 78 ~ 80
 - 相对于随机模型 78
 - 随机模型 78
- 峰间间隙的时间序列数据 76
 - 等级范围 76, 81

- 统计密度分布 80
- 神经元, 大数原因
- 神经生理学 107 ~ 115, 394
- 纽约城, 麻疹流行数据 196, 197
- 牛顿-拉弗森 (Newton-Raphson) 近似方法 330
- 牛顿力学 131, 255, 264, 298
- Nishikawa, Yoshikazu 326, 333, 351
- 噪声 132, 134, 135
 - 效应 10 ~ 11, 153
 - 在神经元模型中 81 ~ 83
 - 另见白噪声
- 噪声周期性 34
- 非线性动力学 235
 - 和心病学 221 ~ 226
 - 和多震断层 242 ~ 246
 - 和脑电图模式 83
 - 微观 - 宏观联系 308 ~ 309
 - 和社会学 308
 - 和社会 - 政治问题 18 ~ 54
- 物理系统中的非线性振荡 133
 - [Hayashi, 1964] 333
 - 计算 328 ~ 333
 - 另见 Hayashi, Chihiro
- 非线性振荡研究 258, 323 ~ 350
- 非线性问题, 需要的新数学 127
- 去甲肾神经元 75
 - 另见局部去甲肾上腺素能神经元
- 离岸结构 256
- Ohnuki, Masako 350
- Ohshima, Kenji 340
- 一维平方映射
- 开环控制 47
 - 优点 47
 - 社会政治政策中的例子 48
- 光学双稳定性 133
- 有序参数 308
- 混沌理论的起源 322 ~ 351
- Ornstein 理论 4
- 振荡化学反应
- 重复产生 (OLG) 模型 289
- 舒缩间期过长[心脏病机理] 222
- 震颤麻痹综合征 66
- 偏微分方程 172
- 路径积分公式格林函数 163, 164
- 摆
 - 参数激励的
 - 局部混沌吸引子 258
 - 运动方程 258
 - 势井 259 ~ 260
- 周期倍串级 31, 97, 134, 187
 - 作为通向混沌的道路 8
 - 首次报告 9
 - 物理观察 8, 33, 37, 110
- 周期性 194, 204
 - 另见拟周期振荡
- 相图 79, 267, 329, 330
- Phi 标度 65
- 物理系统, 混沌 8 ~ 10
- 物理学 130
 - 和混沌理论 373, 374
 - 前沿
 - 整体耦合动力学 178
 - 与数学的关系 93, 95 ~ 96
- 生理系统, 混沌动力学 217, 218
- 庞加莱 (Poincaré), J. Henri 1, 23

- 庞加莱映射/采样/截面 11, 256
 - 自动映射装置 336, 338
 - 例子 108 ~ 111, 257, 324
- 庞加莱截面法 11
- Poincaré-Bendixson 定律 2
- 政治观点形成, 模拟 303
- 种群动力学 24 ~ 25, 35, 181, 192
- 势井 258 ~ 260
 - 和船舶倾覆机制 258 ~ 260, 264
 - 另见吸引盆域
- 幂律 391, 394
- 功率谱 102
 - 脑电图模式 83
- 预测, 术语的意义 379, 380
- 过早心室收缩 (PVC) 222 ~ 224
 - 和突然心脏病死亡 224 ~ 225
- 前兆性地震活动图像
 - 研究的区域 249
 - 首先在层次结构模型中被注意到 247
 - 全球相似性 250
 - 多种响应现象 249
- 质数定律 102
- 概率论, 和确定论 130, 131
- 问题求解工具 45
- 生产函数
 - Cobb Douglas 形式 280
 - 两部门经济学 287
- 标准映射 2
- 平方映射 100, 187
- 量子混沌 136, 142 ~ 167
 - 术语的意义 145
- 量子力学 127, 130, 131
 - 时间相关 136
 - 相空间中不可追踪的轨迹 143
 - 量子轨道不稳定性 157 ~ 159
 - 混沌的量子抑制 146 ~ 152
 - 噪声效应 153 ~ 154
 - 拟地转方程 232
 - 拟周期振荡
 - 和混沌振荡 325, 331
 - 脑电图模式 83
 - 枪乌贼巨轴突 111
 - 拟周期转变到混沌 7
 - 物理观察 8, 70 ~ 71, 126
 - 准静态超瞬变 174
 - 随机转变现象
 - 术语的意义 322, 343
 - 另见混沌
 - 随机性 126
 - 背缝核血清素能神经元 75
 - 放电/触发率 74
 - 峰间间隔时间序列数据 76
 - 等级范围 76, 81
 - 统计密度分布 80
 - 合理选择途径 [社会行为的] 310
 - Rayleigh-Duffing 混合型方程, 拍频振荡 343, 344
 - 简化论 127
 - 重新进入的心脏心律不齐 223
 - 松弛过程
 - 经典力学 142 ~ 143
 - 量子动力学 143, 148 ~ 150
 - 重整化群技术 97, 129, 132, 134
 - 雷尼维数 6
 - 多重分形特征 6

- 共振 102
- 另见随机共振
- Rhebinder 效应 243
- Richardson, L. F. 24, 38
- Richardson 型 [军备竞赛] 模型
 - 背景 38 ~ 39
 - 与图表结合 49, 50
 - 三国模型 43 ~ 44
 - 二国模型 39 ~ 43
- Ricker 映射
- 黎曼 (Riemann) Zeta 函数 102
- 罗斯贝 (Rossby) 循环 237
- 轮盘赌例子 33
- Ruelle-Takens-Newhouse 模型 62
- Runge-Kutta-Gill 方法 334
- 鞍点 262, 263, 329
- Sannomiya, Nobuo 333, 351
- SEIR 方程 205
 - 在季节强迫模型中的麻疹值 195
 - 分岔图 195
 - 突入式间歇现象 198
 - 下一个振幅图 197, 199
 - 瞬变周期性 198
- 地震学 241 ~ 252, 374
- 自恰的不确定性关系 158
- 不稳定性的自组织 155 ~ 156
- 自组织系统 246, 303 ~ 304
 - 突发特性 20 ~ 21, 48
- 半经典理论 144, 165 ~ 167
- 拟周期吸引子 197
- 半潜离岸平台 256
- 血清素细胞 76
 - 另见背中缝核血清素细胞
- 影子 11, 194
- Shibayama, Hiroshi 325, 333, 350
- 移位运算 32, 54
- 移位变换 13
- 船舶
 - 倾覆 256 ~ 260, 264 ~ 266
 - 在横波中侧摇 257, 260, 264
 - 模型化 264
- 混合诊断 283
- 模拟软件 49 ~ 50
- Sinai-Ruelle-Bowen (SRB) 测度 5
- Slutsky-Frisch-Tinbergen [经济的] 方法学 274
- 小尺度混沌, 在军备竞赛模型中 40
- 社会相互依赖, 单组元中的变化
 - 影响 314
- 社会规范 313 ~ 314
- 社会秩序, 影响因子 297 ~ 298
- 社会系统
 - 反作用能力 314 ~ 315
 - 破坏 312 ~ 313
 - 原因 313 ~ 316
 - 社会学理论 312 ~ 316
 - 影响事件的交点 315
 - 影响改变的速度 313
 - 阈值机制 313 ~ 314
- 社会特征, 不连续改变 300
- 社会学 296 ~ 317, 379
- 社会 - 政治问题, 应用于建模的非
 - 线性动力学 18 ~ 54
- 太阳系, 混沌特征 373
- Solow [经济] 增长模型
- 航天飞机/望远镜 376

- 空间变化问题 52
- 时空混沌 (STC) 173
 - 和脑动力学 175, 176, 203
 - 充分发展的 175 ~ 176
 - 模拟 173 ~ 174
 - 普适性层次 174 ~ 175
- 时空阵发 (STI) 175, 176
- 螺旋波不稳定性 171
- 自发的有序过程 303
 - 另见自组织系统
- 枪乌贼巨轴突
 - 观察到的混沌振荡 108, 110
- 标准映射 150
- 稳定的耗散 159 ~ 167
- 统计力学 126
 - 作为基础的高维混沌 177
- 器质性癫痫病患者 206
 - 另见癫痫
- Stewart, H. Bruce 347 ~ 348, 350
- 随机特性 132
- 随机混沌 397
- 随机共振 81
 - 应用于神经元模型 81
- 随机扰动的动力学系统, 理论 397
- 股票市场模型 178
- 奇怪吸引子 132, 133, 233
 - 脑电图模式 60 ~ 62
 - 神经网络的电子电路模型 115
 - 例子 257, 259, 347
 - 术语的意义 31
 - 二阶系统 321
 - 首次使用的术语 5
 - 三阶系统 36
 - 另见混沌吸引子, 洛伦茨吸引子
- 战略防御起始 (SDI), 军备竞赛
 - 模型 42 ~ 44
- 应力腐蚀 242 ~ 244
 - 在岩石圈中 242 ~ 244
- 频闪采样 [混沌运动的] 256, 336
- 结构稳定性 372
 - 缺点 377
- 突发心脏病死亡
 - 和心律不齐 224 ~ 225
 - 和心率易变性 225 ~ 226
 - 危险病人识别 228, 383
- 超导量子干涉装置 (SQUIDS)
- 符号动力学 13 ~ 14, 133, 135
 - 应用 133
- 协同学 303
- 系统理论
 - 应用于社会学 299, 309
 - 失败 378
- 构造板块 242
- 脑丘细胞放电模式 71
 - 和脑电图模式 60 ~ 62
- 丘脑 - 皮质 - 丘脑连接 72
- 热力学 131
 - 和社会学理论 306
- 热核反应应用 396
- 三体问题 2, 130
- 阈值机制, 在社会系统中 313 ~ 314
- 时间倒转实验 158 ~ 159
- 时间尺度, 任意小 148
- 时间序列研究 10, 256, 276
- 拓扑熵 4
- 拓扑空间, 和微分方程解

- 瞬变混沌 3
 - 另见混沌瞬变
- 瞬变动力学 264
- 瞬变周期性 194
 - 和癫痫 202
- 热带雨林, 演化模型 181 ~ 182
- 湍流理论 9, 23, 62, 95, 373
- 通向湍流的道路 125
- 大道增长模型 275
- 大道性质 286
- 二体问题 138
- Ueda, Yoshisuke
 - 首次发现混沌 256, 323 ~ 326
 - 首次提出混沌 345
 - 博士学位 333
 - 首次发表的论文 342, 343
 - 作为研究生 323 ~ 333
 - 数学研讨会 333 ~ 334
 - 首次报告的奇怪吸引子 347
- Uenosono, Chikasa 346, 349, 351
- 非故意的结果概念(在社会学中) 309
- 普适性 23, 53, 384
 - 在时空混沌中的层次 174 ~ 175
- Urabe, Minoru 343, 349, 350
- 美国
 - 麻疹流行数据 196, 197
 - 股票回归数据 283 ~ 284
- 安定型药物, 引起脑电图变化 68
- 范德波尔(Van der pol)方程 2, 275
- Velikovsky, Immanuel 371
 - 科学家的看法 371
- 心室纤维性颤动 222
- 心室心动过速 222
- Verhulst 方程 28
 - 各种初始条件的解
- 可视化(计算机)工具 49, 374
- 田鼠(*Microtus* spp.)种群动力学 193
- Von Neumann, John 231
- 天气预报 231, 232, 372
 - 与气候模拟相比
- 白噪声 140
- Whitney 嵌入定理 10
- Wightman, A. S. 132
- Wold 的分解定理 276
- 世界图 51
- 世界模型 52
- 钇铁榴石(YIG)球, 螺旋波不稳
 - 定性 133 ~ 134
- Zeta 函数 101 ~ 102

(杨立译)

热爱是最好的教师，它远远超过责任感。

——爱因斯坦

书籍是人类的总结。书籍是全人类的营养品。

——莎士比亚

对我来说，不学习，毋宁死。

——罗蒙诺索夫

首先应该感谢的是本译著的审稿工作会议得到了北京大学的支持和北京大学地球物理系的具体帮助，使译稿得以充分讨论，以尽量体现原作的要求。同时，也自然扩大了它的影响。用中国文人一句老话：“一登龙门，则身价十倍”来表达译者们对北大的衷心谢意，也许并非自诩。

现按惯例介绍一点译书过程：我校工程热物理博士点的专业方向之一与湍流问题有关，曾派博士研究生杨立、蒋小勤去北大学习非线性物理基础，且蒋的博士论文实验工作主要在北大湍流重点实验室完成（现他们均已毕业并均为本书译者），这就引起了我学习非线性科学中混沌理论的兴趣。于是利用1998年旅美的机会，收集了一些有关混沌研究的最新出版资料，其中之一即本书原著（1997年出版）。

原著中的两位作者，中科院院士郝柏林教授和北大地球物理学家刘式达教授是孕育本书的国际研讨会的中国代表。他们对此书的翻译出版工作给予了热情指导和大力支持。郝柏林教授说：“翻译出版这本书是件好事”并乐意提供他自己的文章译稿，还对出版工作提了好的建议。刘式达教授欣然同意撰写

“序言”并慨允将他的已被选入本书而因为联系时间耽误的原文补上。同时承担起译著的校审和审稿会议工作。还有华中师范大学生物系博士生导师陈曲侯老教授慨然承担翻译本书重要的生物学内容一章，以上这些都使我这个自勉好学的老学生在组织这次翻译工作之初干劲大鼓、信心倍增。

当然，必须着重提到的是担任最大部分翻译任务的年轻人，他们都是高学位、高职称的各自领域的学术骨干力量（见译者名单）。当我开始同他们联系商讨翻译工作时，我直言这是业余的义务劳动（实际上出版社惠予了较高的译稿费），他们却都积极利用寒假和春节时间认真完成任务，其中杨立还承担了繁重的联系和稿件校阅工作。这充分反映了我国年轻一代学子的勤奋精神。

同时，出版社的工作效率和责任编辑的热情工作、好学精神，也大大促进了任务的按时完成。这充分显示了他们重视宣传、执行“科教兴国”的战略方针。确实，我期望本译著的发行，能够步他们已出版的《第一推动丛书》的后尘而驰骋祖国的学海、书场。

还要感谢大连轻工业学院熊弟霖教授，他非常关心本书的翻译质量，对我的“前言”译稿及多篇译文反复推敲建议，并及时提供郝柏林主编的《非线性科学丛书》学习参考。另有北京大学李守中教授对多篇译文作了认真的审校，大连老虎滩海军干休所吴修垣教授对一些英文难点词句作了认真细致的辅导。在此一并致谢。

最后，对我的侄儿湖南计算机学校外办主任杜国才为出版工作的联系以及老伴程上青和在美的姨姐程身正，儿杜斯海、媳付白薇等为我创造的良好工作和生活条件，在此也道声谢谢。

海军工程大学，工程热物理博士点

教授、博士生导师 杜先之

2000年6月

译者名单

1. 郝柏林, 中国科学院理论物理所, 院士, 第 7 章
2. 刘式达, 北京大学地球物理系, 博士生导师, 第 12、18 章
3. 陈曲候, 华中师范大学, 博士生导师, 第 10 章
4. 李新元, 朱晶, 北京大学, 博士, 第 13 章
5. 郑紫, 武汉医药设计院英语翻译, 第 3 章
6. 朱强, 湖北医科大学, 博士生, 第 3 章
7. 夏冰, 湖北医科大学附属第二医院, 教授, 第 3 章
8. 章军建, 湖北医科大学附属第二医院副教授, 第 3 章
9. 杜先之, 海军工程大学, 博士生导师, 前言, 开幕词
10. 杨立, 海军工程大学, 教授, 博士, 第 1, 9, 17 章, 索引
11. 刘巨斌, 海军工程大学, 博士, 副教授, 第 4, 5 章, 小组讨论
12. 蒋小勤, 海军工程大学, 博士, 副教授, 第 6 章
13. 朱锡, 海军工程大学, 教授, 博士, 第 14 章
14. 陈伯义, 海军工程大学, 副教授, 硕士, 第 11 章
15. 吴静霓, 海军工程大学, 硕士研究生, 第 16 章
16. 龚耘, 海军工程大学, 博士, 副教授, 第 16 章
17. 李大鹏, 海军工程大学, 博士研究生, 讲师, 第 8 章
18. 陈志俊, 海军工程大学, 博士研究生, 讲师, 第 2, 15 章

